

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ СДВИГА НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ
ВКЛЮЧЕНИИ С ДВУМЯ РАЗРЕЗАМИ НА ГРАНИЦЕ ФАЗ

Методом [1], аналогичным использованному в случае одного разреза [2], определяется напряженно-деформированное состояние на границе цилиндрического включения с двумя разрезами, расположенными по контуру контакта. Внешнее возмущение изменяется гармонически и представляет плоскую волну в изотропной среде. На границе включения волна сдвига отражается и преломляется сдвиговой волной.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в цилиндрической системе координат действие плоской волны сдвига на упругое включение в форме кругового цилиндра $r \leq a$, $z \in (-\infty, \infty)$, сцепленного упруго по контуру $r = a$, $\theta \in \Omega = (\alpha_1, \pi - \alpha_2) \cup (\pi + \alpha_2, 2\pi - \alpha_1)$, $z \in (-\infty, \infty)$, где участок $r = a$, $\theta \in \Omega_0$, ($\Omega_0 = [-\alpha_1, \alpha_1] \cup [\pi - \alpha_2, \pi + \alpha_2]$), соответствует двум разрезам (фиг. 1). Для упрощения расчетов разрезы располагаем симметрично относительно фронта падающей волны.

В условиях антиплоской деформации единственная отличная от нуля компонента смещения $U_z = W$ удовлетворяет в случае установившейся нагрузки следующим волновым уравнениям:

$$(\Delta + \beta^2) W = 0, \quad r > a \quad (\Delta + \beta_1^2) W = 0, \quad r < a \quad (1.1)$$

где $\beta = w/c$, $\beta_1 = w/c_1$ — волновые числа.

На границе включения со средой должны выполняться условия

$$\begin{aligned} W^+ + W^- &= W; \quad \sigma^+ + \sigma^- = \sigma, \quad r = a, \quad \theta \in \Omega \\ \sigma^+ + \sigma^- &= 0, \quad \sigma = 0, \quad r = a, \quad \theta \in \Omega_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где σ^\pm — напряжения, соответствующие сдвигу; индексом плюс помечена компонента в падающей волне, минус — в отраженной. На бесконечности падающая и отраженная волны должны удовлетворять условию излучения и условию Майкснера на ребре [3]. Поэтому учитывая симметрию поставленной задачи, решения первого уравнения (1.1) будем разыскивать в виде (временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен)

$$\begin{aligned} W^+ + W^- &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_n W_0 \frac{J_n(\beta r)}{J_n(\beta a)} + A_n \frac{H_n(\beta r)}{H_n(\beta a)} \right] \cos n\theta \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2(-r)^n, & n = 1, 2, \dots, \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение второго уравнения (1.1) должно удовлетворять условию ограниченности в начале координат и конечности энергии, поэтому имеем

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_n(\beta_1 r)}{J_n(\beta_1 a)} \cos n\theta. \quad (1.4)$$

2. Решение. Представляя напряжения через смещения и подставляя в граничные условия (1.2), получаем парные рядовые уравнения. Для их решения используем методику решения одного специального класса парных уравнений [1]. Дополним левую часть третьего условия (1.2) при $\theta \in \Omega$ слагаемыми

$$[-a\mu^{-1}h(\theta) - i\beta a W_0 \cos \eta\theta \exp(i\beta a \cos \theta)] \quad (2.1)$$

Здесь $h(\theta)$ — неизвестная функция касательного напряжения на контуре $r = a$, $\theta \in \Omega$, соответствующая полю возмущенной волны, μ — упругий модуль сдвига для среды, μ_1 — то же для включения. Парные уравнения при учете дополнения (2.1) представим следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} A_0 r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} A_n \left[\frac{\beta a H_{n+1}(\beta a)}{H_n(\beta a)} - 2n \right] \cos n\theta = \\ = \Lambda(\theta) - i\beta a W_0 \cos \theta \exp(-i\beta a \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$B_0 \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos n \theta + \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} B_n \left[\frac{\beta_1 a J_{n+1}(\beta_1 a)}{J_n(\beta_1 a)} - 2n \right] \cos n \theta = \Lambda_1(\theta)$$

$$\Lambda(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [0, \alpha_1] \cup [\pi - \alpha_2, \pi] \\ -a\mu^{-1}h(\theta), & \theta \in (\alpha_1, \pi - \alpha_2) \end{cases}$$

Функция $\Lambda_1(\theta)$ соответствует замене $\mu \rightarrow \mu_1$. Коэффициенты A_n и B_n находятся из разложения правых частей уравнений (2.1) в ряды Фурье и представляются так:

$$A_0 \tau_0 = -\beta a W_0 J_1(\beta a) - \frac{a}{\mu \pi} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(\theta) d\theta$$

$$A_n = 2a w_n \left[\frac{1}{\mu n \pi} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(t) \cos n t dt - \frac{\beta W_0 (-i)^n J_n'(\beta a)}{n} \right]$$

$$w_n = \begin{cases} 1 - \tau_n, & n = 1, 2, \dots, N \\ 1, & n > N \end{cases}; \quad \tau_n = \frac{\beta a H_{n+1}(\beta a) - 2n H_n(\beta a)}{\beta a H_{n+1}(\beta a) - n H_n(\beta a)}$$

$$\beta_0 \rho_0 = -\frac{a}{\mu_1 \pi} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(\theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{-2a \xi_n}{\mu_1 n \pi} \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(t) \cos n t dt.$$

ξ_n — такая же функция, как w_n , где τ_n имеет вид, указанный в формуле (2.3) для ρ_n (см. ниже).

Подставляя найденные коэффициенты A_n и B_n в условия (2.2) и меняя порядки суммирования и интегрирования, получим интегральное уравнение с разрывным ядром

$$\frac{2a}{\pi} \left[\gamma \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(t) \eta_n(t, \theta) dt - \xi_n \int_{\alpha_1}^{\pi - \alpha_2} h(t) \cos n t dt \right] = A_0 - B_0 + W(P_n + \theta_n) \quad (2.3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_1}, \quad \eta_n(t, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n t \cos n \theta}{n}, \quad G = \frac{\mu}{\mu_1}$$

$$\xi_n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n - G \tau_n}{n G}, \quad \rho_n = \frac{\beta_1 a J_{n+1}(\beta_1 a) - 2n J_n(\beta_1 a)}{\beta_1 a J_{n+1}(\beta_1 a) - n J_n(\beta_1 a)}$$

$$Q_n = \sum_{n=1}^N (-i)^n \frac{\tau_n}{n} J_n(\beta a) \cos n \theta,$$

$$P_n = J_0(\beta a) \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left[\frac{\beta a}{n} J_n'(\beta a) + J_n(\beta a) \right] \cos n \theta$$

Введем [1] новые переменные ζ и φ по формулам

$$\cos t = b + b_1 \cos \zeta, \quad \cos \theta = b + b_1 \cos \varphi \quad (2.4)$$

где b и b_1 — такие постоянные, что переменные φ и ζ полностью покрывают интервал от 0 до π . Они определяются в виде

$$b = (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)/2, \quad b_1 = (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)/2$$

Из соотношений (2.4) имеем

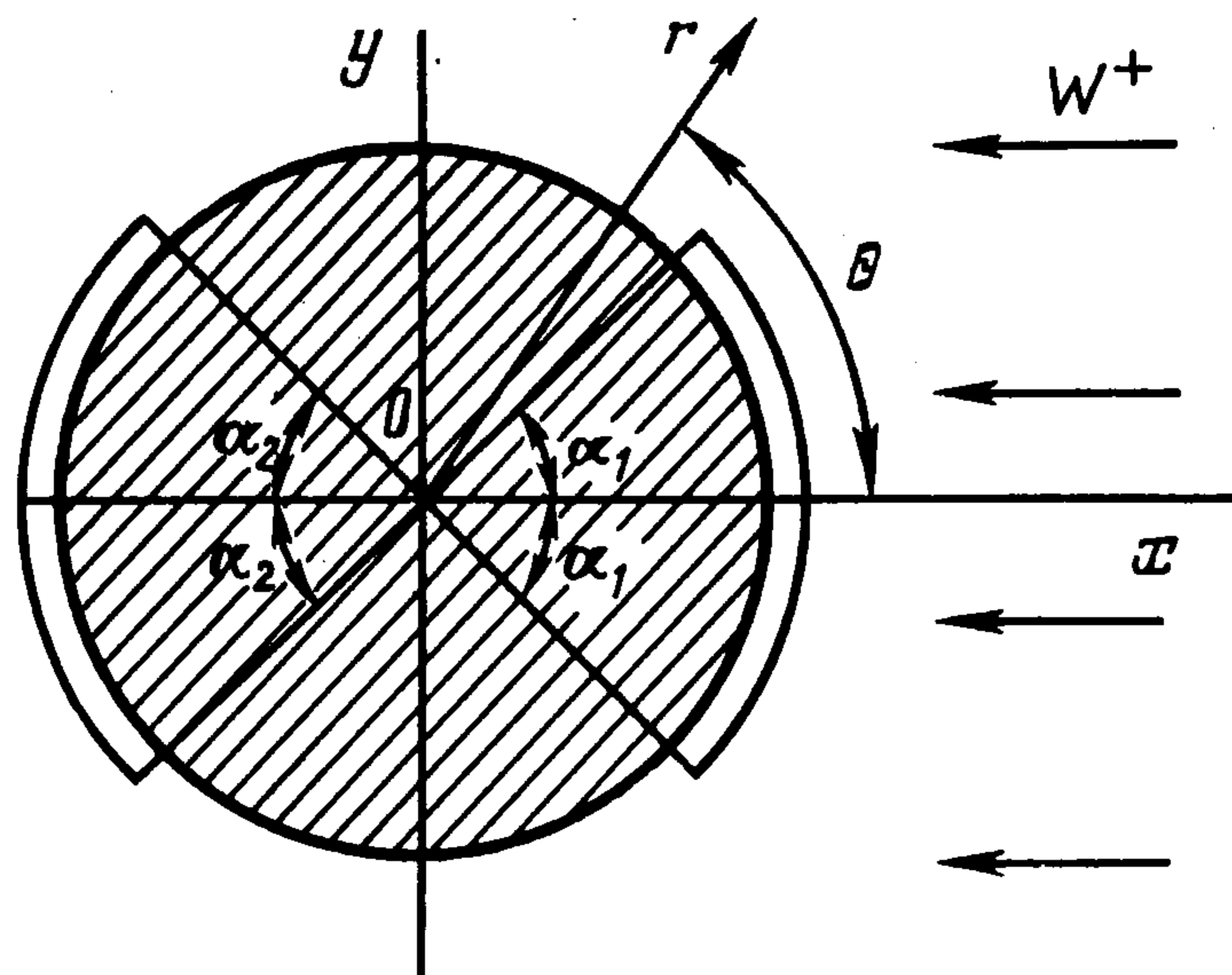
$$\alpha \theta / \alpha \varphi = \Theta(\theta), \quad \Theta(\theta) = (\cos \alpha_1 - \cos \theta)^{1/2} (\cos \alpha_2 + \cos \theta)^{1/2} / 2 \sin \theta \quad (2.5)$$

Функция $h(\theta) \alpha \theta / \alpha \varphi$ удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке от 0 до π , поэтому ее можно разложить в ряд Фурье

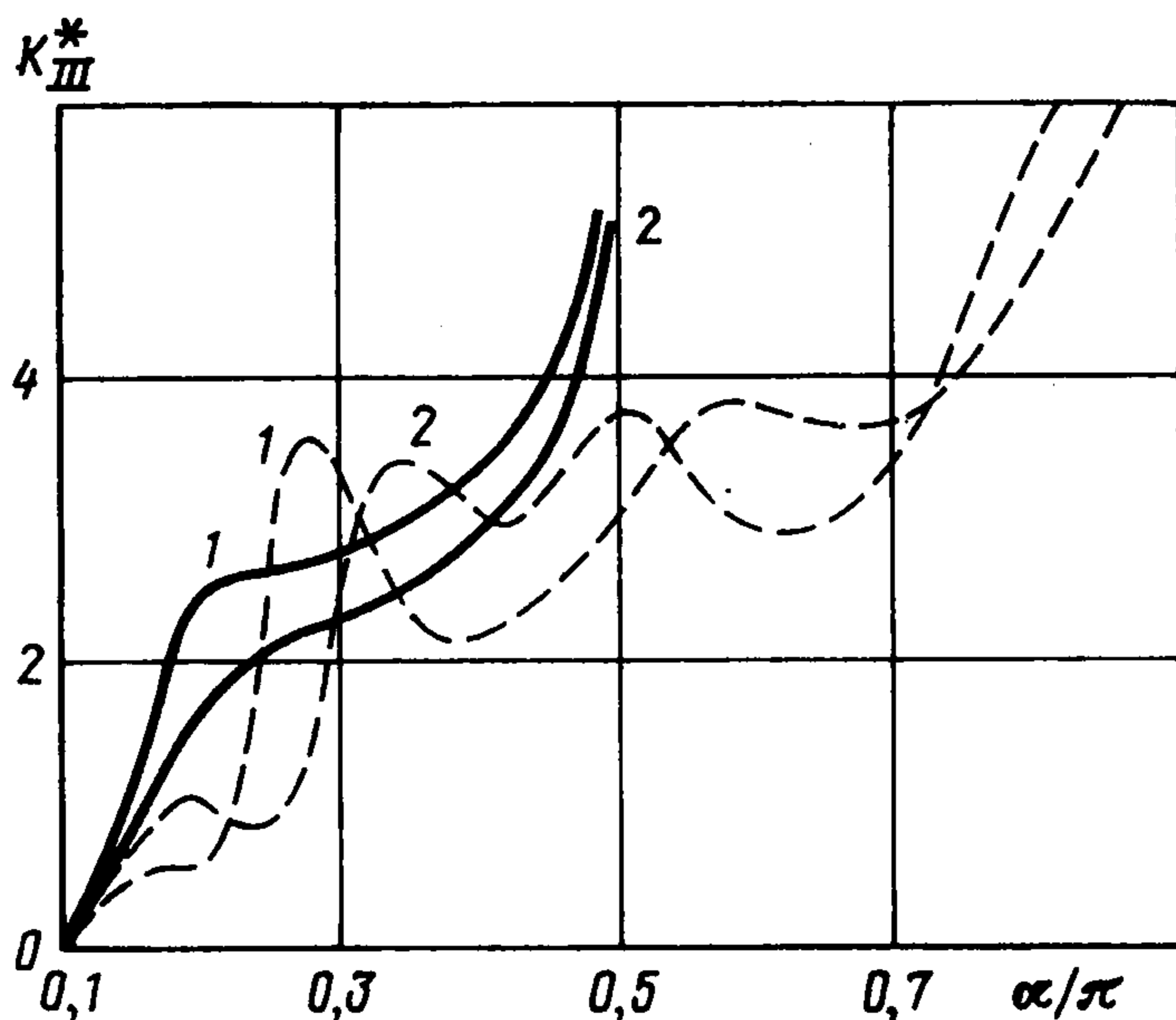
$$h(\theta) \frac{d\theta}{d\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cos(m-1)\varphi, \quad \varphi = \arccos \left(\frac{\cos \theta - b}{b_1} \right) \quad (2.6)$$

При учете соотношения (2.5) имеем

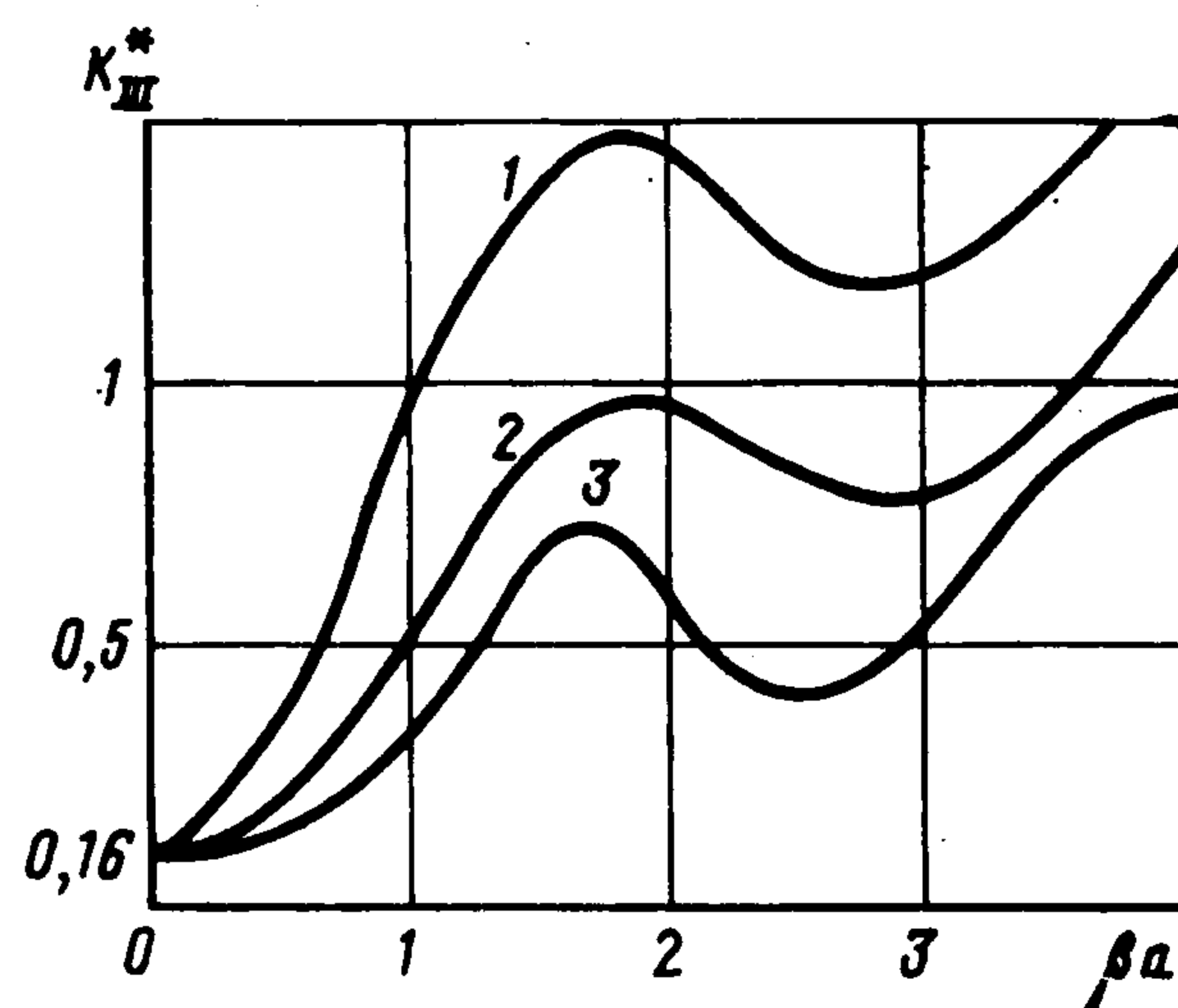
$$h(\theta) |_{\theta \in (\alpha_1, \pi - \alpha_2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \frac{\cos(m-1)\varphi}{\Theta(\theta)}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В результате, подставляя выражение (2.6) в уравнение (2.3) и используя свойство ортогональности функций, получаем систему конечных алгебраических уравнений относительно неизвестных $d_j(m)$:

$$b_m^1 \alpha_m + \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N \alpha_j D_{jm} = \frac{2W_0}{a} (P_m - \theta_m) + C_0 \delta_m \quad (2.7)$$

где b_m^1 , D_{jm} , C_0 , δ_m такие же, как в работе [2].

3. Частные случаи. Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для трещины, находящейся в освещенной зоне

$$K_{III}^1 = \lim_{\theta \rightarrow \alpha_1} [V 2\pi a (\theta - \alpha_1) h(\theta)] = V \pi a \operatorname{tg} \alpha_1 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m$$

Для трещины в теневой зоне имеем

$$K_{III}^2 = \lim_{\theta \rightarrow \alpha_2} [V 2\pi a (\theta - \pi + \alpha_2) h(\theta)] = V \pi a \operatorname{tg} \alpha_2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \alpha_m$$

Для сравнения полученных результатов рассмотрим случаи, когда $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$, тогда имеем КИН, как в работе [2]. При $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$ имеем случай теневой трещины, когда КИН получится в виде

$$K_{III} = V \pi a \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \alpha_h$$

Для определения КИН в статике используем асимптотику цилиндрических функций при малых значениях аргумента. Из системы (2.7) найдем (при $N = 0$)

$$\alpha_1 = \frac{C_0}{b_1^1}, \quad C_0 = \frac{W_0}{a} \left[J_0(\beta a) - \frac{J_1(\beta a) H_0(\beta a)}{R_1(\beta a)} \right]$$

$$b_1^1 = \gamma \ln b_1 + \frac{H_0(\beta a)}{\mu \beta a H_1(\beta a)} - \frac{J_0(\beta_1 a)}{\mu_1 \beta_1 a J_1(\beta_1 a)}$$

В пределе получим

$$\lim_{\beta\alpha \rightarrow 0} \alpha_1 = 2\mu\mu_1 \frac{W_0}{\alpha}$$

Тогда статические КИН определяются выражением

$$K_0^m = 2\mu\mu_1 \sqrt{\pi a \operatorname{tg} \alpha_m} W_0/a$$

где $m = 1$ для освещенной трещины, $m = 2$ для теневой трещины.

4. Численные результаты. Результаты расчетов КИН для постоянного волнового числа при различных расположениях трещин в зависимости от длины трещин приводятся на фиг. 2, где кривые 1 соответствуют освещенной трещине, 2 — теневой трещине, причем штрихами показан случай одной трещины, сплошными линиями — случай двух трещин. В отличие от поведения КИН в статическом случае характерно наличие локальных максимумов и минимумов. Это наводит на предположение о существовании своеобразного резонанса при определенной длине трещины и частоты нагрузки.

При наличии по контуру контакта одной трещины, расположенной в теневой зоне, определяется относительный КИН $K_{III}^* = |K_{III}|/K_0$, представленный на фиг. 3, при постоянной длине трещины $\alpha = \pi/4$ в зависимости от изменения волнового числа и при разных характеристиках контакта. Здесь введены следующие обозначения кривых: 1 — жесткий контакт, 2 — упругий контакт при $\mu_1/\mu = 20$, $\rho_1/\rho = 2$, 3 — упругий контакт в случае однородной среды. В этом случае наблюдаются явления, аналогичные отмеченным в предыдущем примере.

Используя критерий локального разрушения [4], для рассматриваемого случая получим критерий локального разрушения

$$\gamma = (1/\mu_1 + 1/\mu) K_{III}^*/8$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hussain M. A., Pu S. L. Dynamic stress intensity factor for unbounded plate having collinear cracks // Eng. Fract. Mech. 1972. V. 4. P. 14—23.
2. Беляев К. П. Взаимодействие волны сдвига с упругим полым цилиндрическим включением с трещиной по контуру контакта // Докл. АН УССР. 1984. Сер. А. № 10. С. 17—19.
3. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. М.: Наука, 1982. 272 с.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

Запорожье

Поступила в редакцию
2.IV.1990