УДК 532.5

Р. Н. Бахтизин, Р. К. Мухамедшин

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Исследуются групповые свойства [1] системы уравнений, описывающей течение в трубах жидкости, вязкость которой зависит от температуры, при больших числах Пекле. Показано, что при экспоненциальной и степенной зависимостях происходит расширение основной группы преобразований. Для этих случаев рассматриваются инвариантные решения, имеющие физический смысл.

Уравнения, описывающие движение вязкой жидкости в цилиндрической трубе, в безразмерном виде могут быть записаны следующим образом при $\delta \ll 1$, $\mathrm{Pe} \gg 1$ [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \delta \,\mathrm{Pe} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\mu R u) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial R} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1 - v}{R} \frac{\partial T}{\partial R} = u \frac{\partial T}{\partial z} \tag{2}$$

Здесь

$$z = \frac{x}{\mathrm{Pe}\, r_0}, \quad \mu = \frac{\eta}{\eta_0}, \quad T = \frac{t}{t_0}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad \delta = \frac{r_0}{l}, \quad p = \frac{P}{P_0}$$

$$v = R \frac{V_r \mathrm{Pe}}{2V_0}, \quad u = \frac{V_x}{2V_0}, \quad P_0 = \frac{2\eta_0 l V_0}{r_0^2}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{2V_0 r_0}{a}$$

где x — продольная координата, r — расстояние от оси трубы, r_0 — радиус трубы, t — температура, V_x, V_r — продольная и радиальная составляющие скорости, η — вязкость жидкости, l — длина трубы, P — давление, t_0, η_0, V_0 — характерные значения температуры, вязкости и скорости, Pe — число Пекле.

Из первого уравнения (1) следует, что $\partial p/\partial z$ — некоторая функция z, обозначим ее $g(z)$. Поэтому второе уравнение (1) может быть один раз проинтегрировано по R при естественном условии симметрии $\partial u/\partial R|_{R=0} = 0$. Вводя обозначение $f(T) = \delta\mu\mathrm{Pe}/2$ уравнение (1) заменим на следующее:

$$\partial u/\partial R = R f(T)\, g(z) \tag{3}$$

Проведем групповую классификацию [1] системы (2), (3).

При произвольном виде функции f система допускает инфинитезимальные операторы:

$$X_1 = R\left(1 - z\frac{g'}{g}\right)\frac{\partial}{\partial R} + 4z\frac{\partial}{\partial z} + 2u\left(1 + z\frac{g'}{g}\right)\frac{\partial}{\partial u} - R^2 u\left(z\frac{g'}{g}\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_2 = -R\frac{g'}{g}\frac{\partial}{\partial R} + 4\frac{\partial}{\partial z} + 2u\frac{g'}{g}\frac{\partial}{\partial u} - R^2 u\left(\frac{g'}{\partial}\right)'\frac{\partial}{\partial v}$$

Расширения этой алгебры получаются при следующих спецификациях $f(T)$ с точностью до преобразований эквивалентности [1]:

1) $f(T) \equiv \mathrm{const}$; дополнительные базисные операторы

$$X_3 = \partial/\partial T, \quad X_4 = T\partial/\partial T$$

2) $f(T) = T^\gamma$; дополнительный оператор

$$X_5 = \gamma R\partial/\partial R - 4T\partial/\partial T + 2\gamma u\partial/\partial u$$

3) $f(T) = e^T$; дополнительный оператор

$$X_6 = R\partial/\partial R - 4\partial/\partial T + 2u\partial/\partial u$$

Рассмотрим некоторые инвариантные решения, соответствующие этим операторам, которые допускают физическую интерпретацию.

При

$$f(T) = e^{\varepsilon T}, \quad g(z) = -2p_0 e^{-\varepsilon z}, \quad p_0 = \mathrm{const}$$

инвариантное решение оператора $X_2 - X_6$ имеет вид

$$v = \varphi_1(R), \quad u = \varphi_2(R), \quad T = z + \varphi_3(R)$$

φ_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений решение которой при граничных условиях

$$v/_{R=1} = u/_{R=1} = 0$$

может быть записано в виде

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(0)} + \varepsilon\varphi_k^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad k = 2, 3$$

$$\varphi_2^{(0)} = p_0(1 - R^2), \quad \varphi_2^{(1)} = -2p_0\int_R^1 R\varphi_3^{(0)}dR$$

$$\varphi_3^{(i)} = \int_0^R\left(\int_0^R R\varphi_2^{(i)}dR\right)\frac{dR}{R} + \alpha, \quad \alpha \equiv \mathrm{const}, \quad i = 0, 1$$

При

$$f(T) = e^{\varepsilon T}, \quad g(z) = -2p_0z^{1-\varepsilon}, \quad p_0 = \mathrm{const}$$

инвариантное решение оператора $X_1 - X_6$ имеет вид

$$v = \varphi_1(R), \quad u = z\varphi_2(R), \quad T = \ln z + \varphi_3(R)$$

где функции φ_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_2' = -2p_0Re^{\varepsilon\varphi_3}, \quad R\varphi_2 + \varphi_1' = 0$$

$$(1 - \varphi_1)\varphi_3' + R\varphi_3'' - R\varphi_2 = 0$$

решение которой

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)} + \varepsilon\varphi_i^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1^{(0)} = P_0(R^4/4 - R^2/2), \quad \varphi_2^{(0)} = p_0(1 - R^2), \quad \varphi_3^{(0)} =$$

$$= p_0\left(\int_R^1\left(\int_0^R(1 - R^2)RF(R)\,dR\right)\frac{dR}{RF(R)} + \alpha\right), \quad \varphi_1^{(1)} = -\int_R^1 R\varphi_2^{(1)}dR$$

$$\varphi_2^{(1)} = -2p_0\int_R^1 R\varphi_3^{(0)}dR, \quad \varphi_3^{(1)} = \int_R^1\left(\int_0^R(R\varphi_2^{(1)} + \varphi_1^{(1)}\varphi_3^{(0)\prime})RF(R)\,dR\right)\frac{dR}{RF(R)}$$

$$F(R) = \exp((p_0/4)(R^2 - R^4/4))$$

описывает течение в трубе с проницаемыми стенками при постоянной скорости вдува (отсоса) $v/_{R=1} = -p_0/4$.

При произвольных функциях f и g инвариантное решение оператора X_2 может быть записано в виде

$$v = -\frac{1}{4}\frac{g'}{g}\varphi(\xi), \quad u = \frac{\varphi(\xi)}{R^2}, \quad T = A_1\ln\xi + A_2$$

$$\varphi = \xi^{1/2}\left(1/4\int\xi^{-1/2}f(T)\,d\xi + A_3\right), \quad \xi = R^4g(z)$$

где A_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные, их можно подобрать таким образом, чтобы

$$\varphi(\beta_i) = 0, \quad \beta_i > 0, \quad i = 1, 2$$

Данное решение соответствует течению в кольцевом канале, радиусы стенок которого меняются по закону $R_i = (\beta_i/g)^{1/4}$. Поскольку $g(z)$ — произвольная функция, а первоначальная система уравнений инвариантна относительно сдвига по z, то можно выбрать функцию $g(z)$ и диапазон изменения z так, что R_i будут практически постоянны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 416 с.
2. *Тарг С. М.* Основные задачи теории ламинарных течений. М., 1951. 211 с.

Уфа

Поступила в редакцию 13.IV.1990