

УДК 539.375

© 1991 г.

А. В. Капцов, Е. И. Шифрин

## РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

Рассматриваются динамические задачи теории упругости о трещинах нормального отрыва в безграничном линейно-упругом пространстве при гармонически меняющихся и ударных воздействиях. Исследование проводится путем сведения задач к интегродифференциальным уравнениям относительно скачков нормальных смещений на поверхности трещины. Для их решения используется метод, основанный на аппроксимациях Паде (АП). Применение этого метода требует представления коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора с высокой точностью. Поэтому решение задачи о гармонических воздействиях строится с помощью АП лишь для трещин эллиптической формы, когда коэффициенты разложения в ряд Тейлора по волновому числу выражаются в аналитическом виде. Решение задачи об ударных воздействиях получается аналитически путем исследования корней знаменателя аппроксимаций Паде для гармонической задачи. Исследуются наиболее существенные характеристики решения (коэффициенты интенсивности напряжений и полное сечение рассеяния), изучается влияние на них эксцентриситета эллипса. Проводится сравнение полученных результатов с известными.

1. Псевдодифференциальное уравнение задачи о трещине, к поверхностям которой приложены нормальные нагрузки, изменяющиеся во времени по гармоническому закону, имеет вид [1]

$$\begin{aligned} p_G \Omega_\beta b(x) &= t(x), \quad x = (x_1, x_2) \in G; \quad b(x) = 0, \quad x \notin G \\ \Omega_\beta(\xi) &= 2\mu\beta^{-2}[\xi^2(\xi^2 - \beta^2)^{1/2} - (\xi^2 - \beta^2/2)^2(\xi^2 - \alpha^2)^{-1/2}] \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2), \quad \xi^2 = |\xi|^2, \quad \alpha = \omega/C_d, \quad \sigma = \omega/C_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $b(x)$  — амплитуда скачка нормального смещения,  $t(x)$  — амплитуда действующих усилий,  $G$  — область в плоскости  $x_3 = 0$ , занимаемая трещиной,  $p_G$  — сужение] на область  $G$ ,  $\bar{G}$  — замыкание области  $G$ ,  $\Omega_\beta$  — псевдодифференциальный оператор,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\omega$  — частота изменения] прикладываемых усилий,  $C_d, C_s$  — скорость распространения продольных] и поперечных волн соответственно, значение  $S^{1/2}$  выбирается положительным при  $S > 0$  и  $-i|S|^{1/2}$  при  $S < 0$ .]

Уравнение (1.1) получено в предположении, что на бесконечности выполняются условия Зоммерфельда и] что в процессе деформирования не происходит налегания поверхностей трещины. Последнее может быть обеспечено, например, наличием начального раскрытия трещины или дополнительного статического усилия. Отметим, что в силу линейности уравнение (1.1) отвечает также задаче рассеяния трещиной плоских гармонических упругих волн. Уравнение типа (1.1) возникает и]в случае действия ударных нагрузок после применения к исходным уравнениям преобразования] Фурье или Лапласа по времени.

Рассматриваемые в статье задачи исследовались численно в ряде работ. В части из них использовались методы, применимые лишь для конкретных форм трещин [2—7]. Уравнение (1.1) также решалось [8] двухбазисным проекционным методом [9], применимым к задаче о трещине произвольной формы.

Идея аппроксимаций Паде (АП) заключается в переразложении функции, представленной рядом Тейлора, по базису рациональных функций, что позволяет расширить область ее сходимости и исследовать поведение функции в комплексной области. Подробное описание свойств АП и их приложений имеется в [10].

Здесь напомним лишь основные формулы. Пусть задан степенной ряд, представляющий функцию

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$$

Аппроксимацией Паде порядка  $[L/M]$  называется рациональная функция вида

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M} \quad (1.2)$$

разложение которой в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением  $f(x)$  с точностью до члена порядка  $L + M + 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i = [L/M] + O(x^{L+M+1}) \quad (1.3)$$

Это условие приводит к системе линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_i, b_j$  АП. Имеется ряд теорем, выявляющих условия сходимости аппроксимаций Паде  $[L_k/M_k]$  к исходной функции [10]. В отсутствие дополнительной информации о мероморфной функции, подлежащей приближению с помощью аппроксимаций Паде, наиболее целесообразно пользоваться диагональными  $[M_k/M_k]$  или парадиагональными  $[M_k \pm J/M_k]$ ,  $M_k \rightarrow \infty$  последовательностями. Отметим, что, поскольку аппроксимации Паде приближают мероморфную функцию в достаточно широкой области по конечному числу коэффициентов разложения в одной точке, коэффициенты ряда Тейлора должны быть вычислены достаточно точно.

2. Найдем ряд Тейлора по волновому числу для решения задачи (1.1). Предположим, что амплитуда прикладываемых усилий постоянна ( $t(x) = 1$ ) и будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$b(x, \beta) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x) \beta^i, \quad x \in G, \quad b_i(x) = 0, \quad x \notin \bar{G} \quad (2.1)$$

Пусть результат применения оператора  $\Omega_\beta$  к функциям  $b_j(x)$  выражается в области трещины  $G$  формулой

$$\Omega_\beta b_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k V_k(b_j) \quad (2.2)$$

Подставляя ряд (2.1), (2.2) в уравнение (1.1), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{k+m} V_k(b_m) = 1 \quad (2.3)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях  $\beta$  в левой и правой частях равенства (2.3) приводит к системе уравнений

$$V_0(b_0) = 1, \quad V_0(b_k) = - \sum_{j=1}^k V_j(b_{k-j}) \quad (2.4)$$

Таким образом, для решения задачи (1.1) в виде (2.1) требуется получить явное выражение для функций  $b_j$  и  $V_k(b_j)$ . Это удастся сделать для областей  $G$  канонической формы.

Сначала рассмотрим задачу о круговой трещине радиуса  $a$ . Обозначим

$$\psi^\nu(x) = (a^2 - r^2)^\nu, \quad r = |x| < a; \quad \psi^\nu(x) = 0, \quad r \geq a;$$

$$b_k = \sum_{p=0}^{N(k)} C_{k,p} \psi^{p+1/2}$$

Было показано [8], что результат применения оператора  $\Omega_\beta$  к функции  $\psi^\gamma$  представляется в виде бесконечного степенного ряда (2.2) по волновому числу с комплексными коэффициентами. В упрощенном виде функции  $V_j(\psi^\gamma)$  выражаются через гипергеометрическую функцию

$$V_j(\psi^\gamma) = \frac{\mu \Phi_j a^{2\gamma+j-1} \Gamma(1+\gamma) \Gamma(1/2)}{(2i)^j \Gamma(\gamma + (j+1)/2)} {}_2F_1\left(\frac{3-j}{2}, -\gamma + \frac{1-j}{2}; 1; \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2.5)$$

$$\Phi_0 = \eta^2 - 1, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_j = \frac{1}{\Gamma(j/2)} \begin{cases} H_{(j-2)/2}^R, & j = 2, 4, 6 \dots \\ H_{(j-3)/2}^I, & j = 3, 5, 7 \dots \end{cases}$$

$$H_p^R = \eta^{2p} \left[ 1 - 2 \frac{2p+1}{p+1} \eta^2 + \frac{(2p+1)(2p+3)}{(p+1)(p+2)} \eta^4 \right] + \frac{2p+1}{(p+1)(p+2)}$$

$$H_p^I = \eta^{2p+1} \left[ 1 - 8 \frac{p+1}{2p+3} \eta^2 + 16 \frac{(p+1)(p+2)}{(2p+3)(2p+5)} \eta^4 \right] + 8 \frac{p+1}{(2p+3)(2p+5)}$$

$$\eta^2 = (1 - 2\sigma)/(2(1 - \sigma))$$

где  $\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция.

Для полуцелых  $\gamma = i + 1/2$ , ( $i = 0, 1, 2 \dots$ ) эта гипергеометрическая функция вырождается в полином, в результате чего имеем

$$V_j(\psi^{i+1/2}) = \sum_{m=0}^{f(i,j)} S_{i,m}^j r^{2m} \quad (2.6)$$

$$S_{i,m}^j = \frac{\mu \Phi_j a^{2i+j-2m} \Gamma(3/2+i) \Gamma(1/2) \Gamma((j-1)/2)}{(2i)^j \Gamma((j-1)/2 - m) \Gamma(i + j/2 + 1 - m)}$$

$$f(i,j) = \begin{cases} N(j) + i, & j = 0, 2, 4 \dots \\ N(j), & j = 3, 5, 7 \dots \end{cases}, \quad N(j) = \begin{cases} j/2, & j = 0, 2, 4 \dots \\ (j-3)/2, & j = 3, 5, 7 \dots \end{cases}$$

Из формул (2.5), (2.6) следует, что  $V_1(\psi^{p+1/2}) = 0$ , вследствие чего  $b_1 = 0$ . Левые части уравнений (2.4) приобретают вид

$$V_0(b_k) = \sum_{n=0}^{N(k)} Y_n r^{2n}, \quad Y_n = \sum_{m=n}^{N(k)} C_{k,m} S_{m,n}^0, \quad k \neq 1 \quad (2.7)$$

Подстановка  $b_j$  в правые части (2.4) приводит к выражениям

$$-\sum_{j=2}^k V_j(b_{k-j}) = \Pi_1(k) + \Pi_2(k) \quad (2.8)$$

$$\Pi_1(k) = -\sum_{n=0}^{N(k)} \chi_{k,n}^{(1)} r^{2n}, \quad k \geq 2, k \neq 3; \quad \Pi_1(3) = 0$$

$$\Pi_2(k) = -\sum_{n=0}^{N(k-3)} \chi_{k,n}^{(2)} r^{2n}, \quad k \geq 3, k \neq 4; \quad \Pi_2(2) = \Pi_2(4) = 0,$$

$$\chi_{k,n}^{(s)} = \sum_{m=n}^{N(k-1-s)} \sum_{p=\varphi_s(m,n)}^{N(k-1-s)-m} C_{k-1-s-2m,p} S_{p,n}^{2m+s}, \quad s = 1, 2$$

$$\varphi_1(m,n) = \begin{cases} 0, & \text{для } m = 0, 1; \quad 1 \leq n \leq N(k), \quad m \geq n - 1 \\ n - 1 - m, & \text{для } 1 \leq n \leq N(k), \quad m \leq n - 1 \end{cases},$$

$$\varphi_2(m,n) = 0$$

Из (2.4), (2.7) и (2.8) получаем последовательность систем уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $C_{k,m}$ . Отметим, что формулы (2.7) дают возможность строить решение статической задачи о круговой трещине, к поверхностям которой приложены осесимметричные полиномиальные усилия вида

$$p = p_0 + p_1 r^2 + \dots + p_N r^{2N}.$$

Для решения уравнения (1.1) в виде (2.1) в случае трещины  $G$  эллиптической формы  $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 \leq 1$  естественно воспользоваться способом, аналогичным примененному выше для круговой трещины, с заменой функций  $\psi^\nu$  на  $\varphi^\nu$ , где

$$\varphi^\nu(x) = (1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2)^\nu, x \in G; \varphi^\nu(x) = 0, x \notin G.$$

Из-за отсутствия осевой симметрии обойтись только функциями  $\varphi^\nu$  не удастся и приходится находить результат применения оператора  $\Omega_\beta$  к функциям  $T_{p,q}^\nu = x_1^p x_2^q \varphi^\nu$ . Задача эта весьма громоздка, поэтому здесь лишь наметим два основных этапа ее решения.

На первом этапе вычисляется функция  $\Omega_\beta \varphi^\nu$ , которая выражается двумерным интегралом по плоскости переменных преобразования Фурье, записываемым в полярных координатах. Вначале берутся интегралы по радиальной переменной, которые при помощи соотношения

$$\exp(ir \cos \vartheta) = J_0(r) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n I_n(r) \cos(n\vartheta)$$

сводятся к интегралам, имеющимся в [8]. Затем вычисляются интегралы по угловой переменной, которые сводятся к табличным интегралам. Окончательный результат выражается степенным рядом по волновому числу вида (2.2), причем коэффициенты разложения для полуцелых  $\nu = i + 1/2$  таковы:

$$V_j(\varphi^{i+1/2}) = \sum_{n=0}^{f(i,j)} \sum_{k=0}^{f(i,j)-n} \Phi_{n,k}^{j,i} y_1^{2n} y_2^{2k}, \quad j = 0, 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

$$V_1(\varphi^{i+1/2}) = 0, \quad y_i = x_i/a_i, \quad x \in G$$

$$\Phi_{n,k}^{j,i} = \frac{\mu \Phi_j a_2^{j-1} \Gamma(3/2 + i) \Gamma(1/2) \Gamma((j-1)/2)}{(2i)^j \Gamma((j-1)/2 - k - n) \Gamma(i + j/2 + 1 - k - n)} N_{k,n}$$

$$N_{i,n} = \sum_{m=0}^i \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma^2(k+m+1/2) E_{k+m}((j-1)/2) (-1)^m V_{k+m}}{\Gamma(k+1/2) \Gamma(m+1/2) (k+m+n+i)! k! m! (n-k)! (i-m)!}$$

$$V_0 = 1, \quad V_k = 2(-1)^k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$E_k(\rho) = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} (-1)^m F_1(m+1/2, \rho; k+1; \chi^2)$$

$$\chi^2 = (a_1^2 - a_2^2)/a_1^2$$

В случае  $a_1 = a_2 = a$  формула (2.9) преобразуется в (2.6).

На втором этапе для вычисления  $\Omega_\beta T_{p,q}^\nu$  воспользуемся следующей формулой, доказательство которой можно провести методом математической индукции:

$$y_1^p y_2^q \varphi^\nu = \frac{p! q!}{(-2)^{p+q}} \sum_{k=0}^{[p/2]} \sum_{m=0}^{[q/2]} \frac{\Gamma(1+\nu) D_1^{p-2k} D_2^{q-2m} \varphi^{\nu+p+q-k-m}}{k! m! (p-2k)! (q-2m)!} \quad (2.10)$$

$$D_s = \partial/\partial y_s, \quad s = 1, 2$$

(квадратные скобки означают целую часть числа). Поскольку рассматривается случай, когда амплитуда прикладываемых усилий постоянна ( $t(x) = 1$ ), достаточно использовать функции  $T_{p,q}^\nu$  только с четными значениями  $p$  и  $q$  ( $p = 2k, q = 2m$ ). В силу этого ниже приведены формулы лишь для таких функций

$$V_j(y_1^{2k} y_2^{2m} \varphi^{i+1/2}) = \sum_{n=0}^{R(j,i,k,m)} \sum_{r=0}^{R(j,i,k,m)-n} Q_{n,r}^{k,m,n,r} y_1^{2n} y_2^{2r} \quad (2.11)$$

$$R(j, i, k, m) = \begin{cases} \varphi(j, i) + k + m, & j = 2, 4, 6, \dots \\ \varphi(j, i), & j = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

$$Q_{n, r}^{u, v, j, i} = \frac{(-1)^{u+v+1} \mu \Phi_j a_2^{j-1} \Gamma(3/2 + i) \Gamma(1/2) \Gamma((j-1)/2)}{(2i)^{j+2u+v} \Gamma(i+1+j/2+u+v-r-n) (2n)! (2r)!} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^u \sum_{q=0}^v \frac{(2n+2u-2p)! (2r+2v-2q)! N_{r+v-q, n+u-p}}{p! q! (2u-2p)! (2v-2q)! \Gamma((j-1)/2 - r - n - u - v + p + q)}$$

Как и выше, решение уравнения (1.1) представим при помощи ряда (2.1), причем для трещин эллиптической формы функцию  $b_i(x)$  выберем в виде

$$b_k = \sum_{i=0}^{N(k)} \sum_{j=0}^i C_{k, j+i(i+1)/2} T_{2i-2j, 2j}^{1/2}$$

Аналогично случаю круговой трещины получим  $V_1(b_k) = 0$ ,  $b_1 = 0$ . Подстановка  $b_k$  в левую часть равенства (2.4) приводит к выражению

$$V_0(b_k) = \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{m=0}^{N(k)-n} y_1^{2n} y_2^{2m} Y_{n, m}^k \quad (2.12)$$

$$Y_{n, m}^k = \sum_{i=n+m}^k \sum_{j=0}^i C_{k, j+i(i+1)/2} Q_{n, m}^{i-j, j, 0, 0}$$

Подставляя  $b_k$  в правую часть равенства (2.4), получим

$$-\sum_{j=2}^k V_j(b_{k-j}) = \Pi_1^{el}(k) + \Pi_2^{el}(k) \quad (2.13)$$

$$\Pi_1^{el}(k) = \sum_{n=0}^{N(k)} \sum_{m=0}^{N(k)-n} y_1^{2n} y_2^{2m} X_{n, m}^{(1), k}, \quad k \geq 2, k \neq 3; \Pi_1^{el}(3) = 0$$

$$\Pi_2^{el}(k) = \sum_{n=0}^{N(k-3)} \sum_{m=0}^{N(k-3)-n} y_1^{2n} y_2^{2m} X_{n, m}^{(2), k}, \quad k \geq 3, k \neq 4; \Pi_2^{el}(2) = \Pi_2^{el}(4) = 0$$

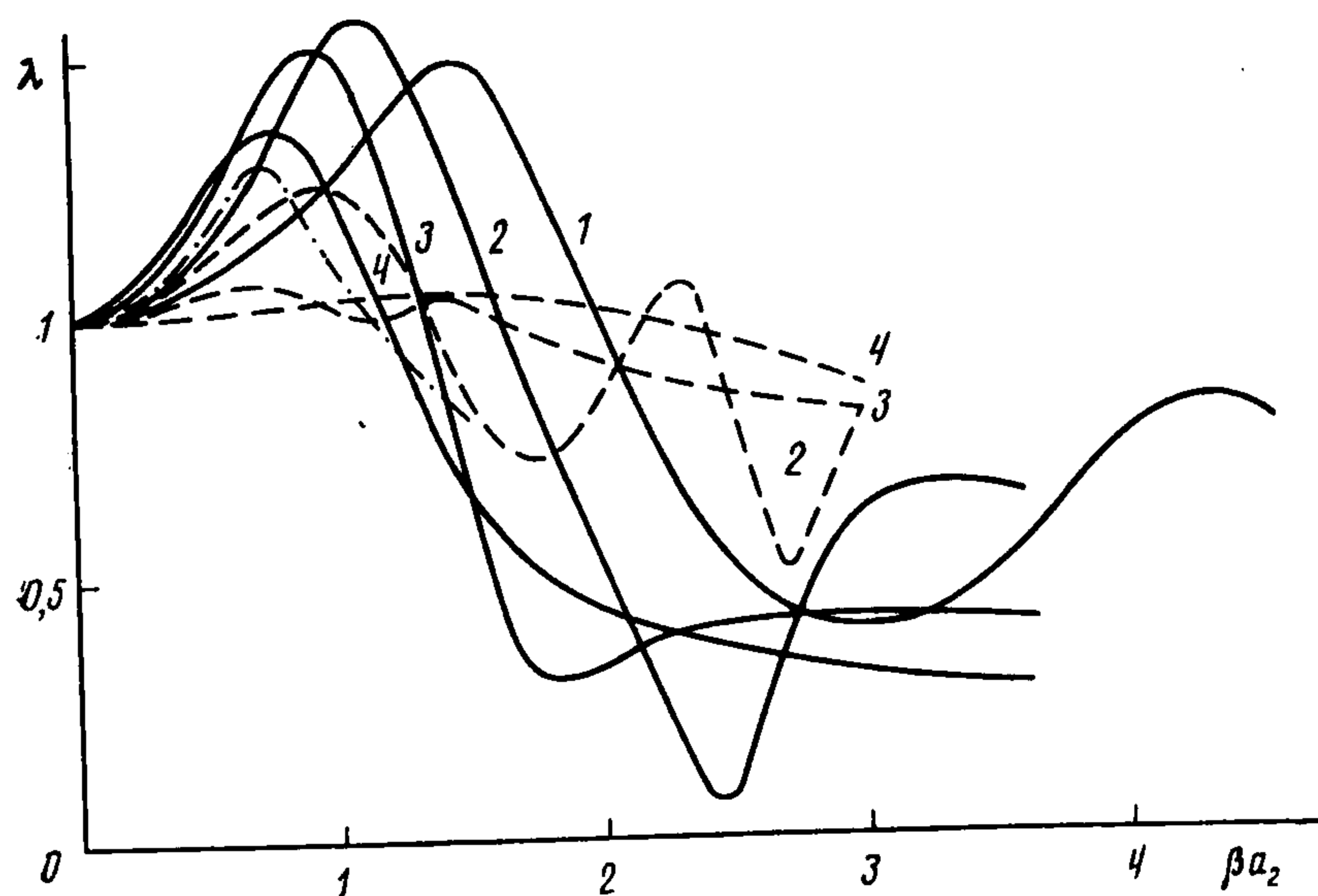
$$X_{n, m}^{(s), k} = \sum_{w=\tau_s(n, m)}^{N(k-1-s)} \sum_{i=0}^w \sum_{j=0}^i Q_{n, m}^{i-j, j, 2w+1+s-2i, 0} C_{k-2w+2i-1-s, j+i(i+1)/2}$$

$$\tau_1(n, m) = \begin{cases} 0, & n+m < 1 \\ n+m-1, & n+m \geq 1 \end{cases}, \quad \tau_2(n, m) = n+m$$

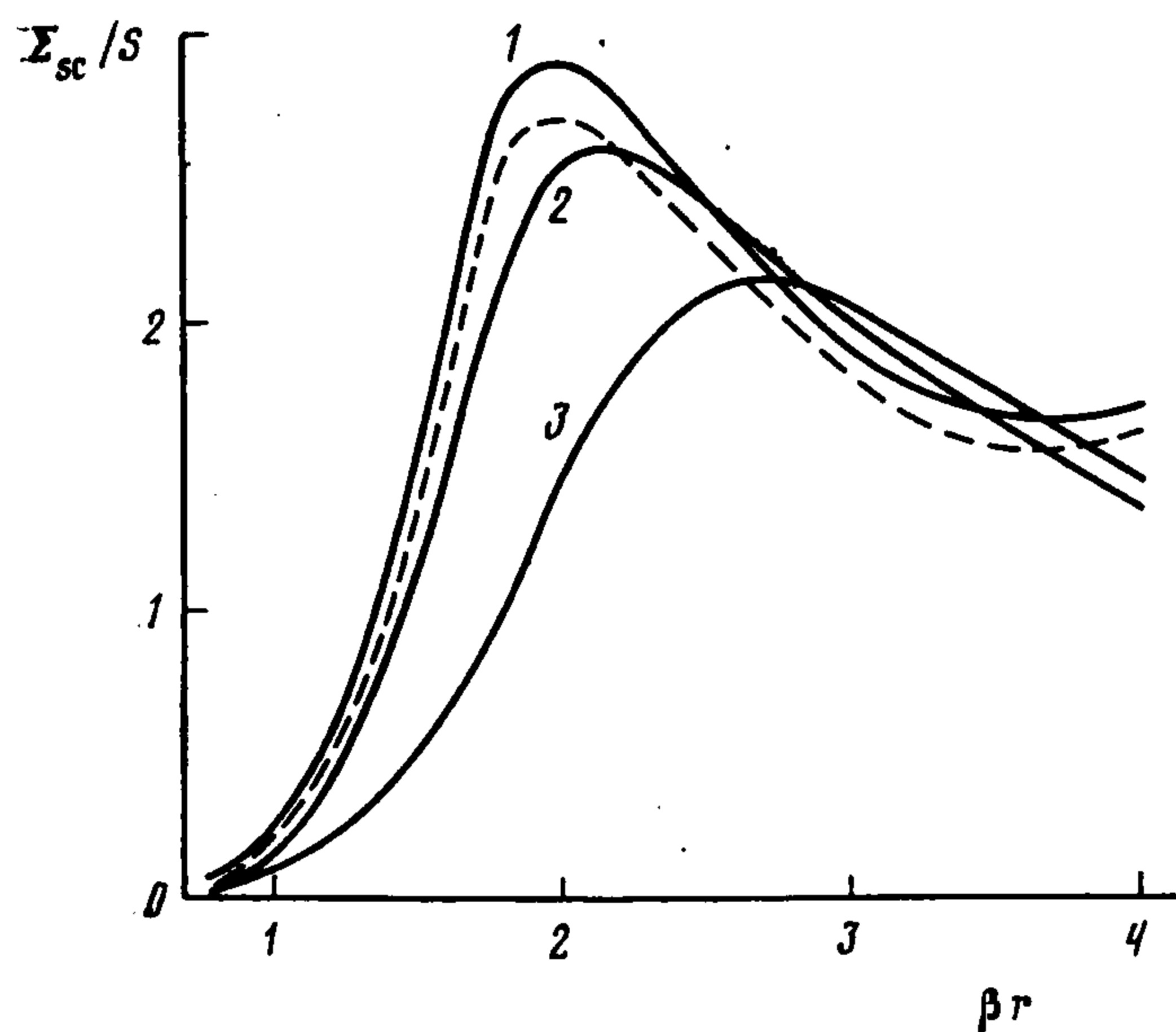
Из (2.4), (2.12) и (2.13) найдем последовательность систем линейных уравнений для определения коэффициентов  $C_{k, m}$ . Заметим, что формулы (2.13) позволяют строить решение статической задачи об эллиптической трещине для нагрузки, имеющей вид полинома, содержащего только четные степени по каждой переменной. Аналогичным образом можно получить формулы для решения задачи в случае нагрузки в виде произвольного полинома.

3. Рассмотрим результаты расчетов задач об эллиптических трещинах, полученные при помощи АП решений, записанных в виде степенных рядов в разделе 2. Всюду ниже было принято  $\sigma = 0,25$ . Заметим, что использование ряда Тейлора дает решение лишь в малой окрестности  $\beta = 0$  (статическая задача) из-за того, что функция, определяющая зависимость решения от волнового числа, имеет полюса.

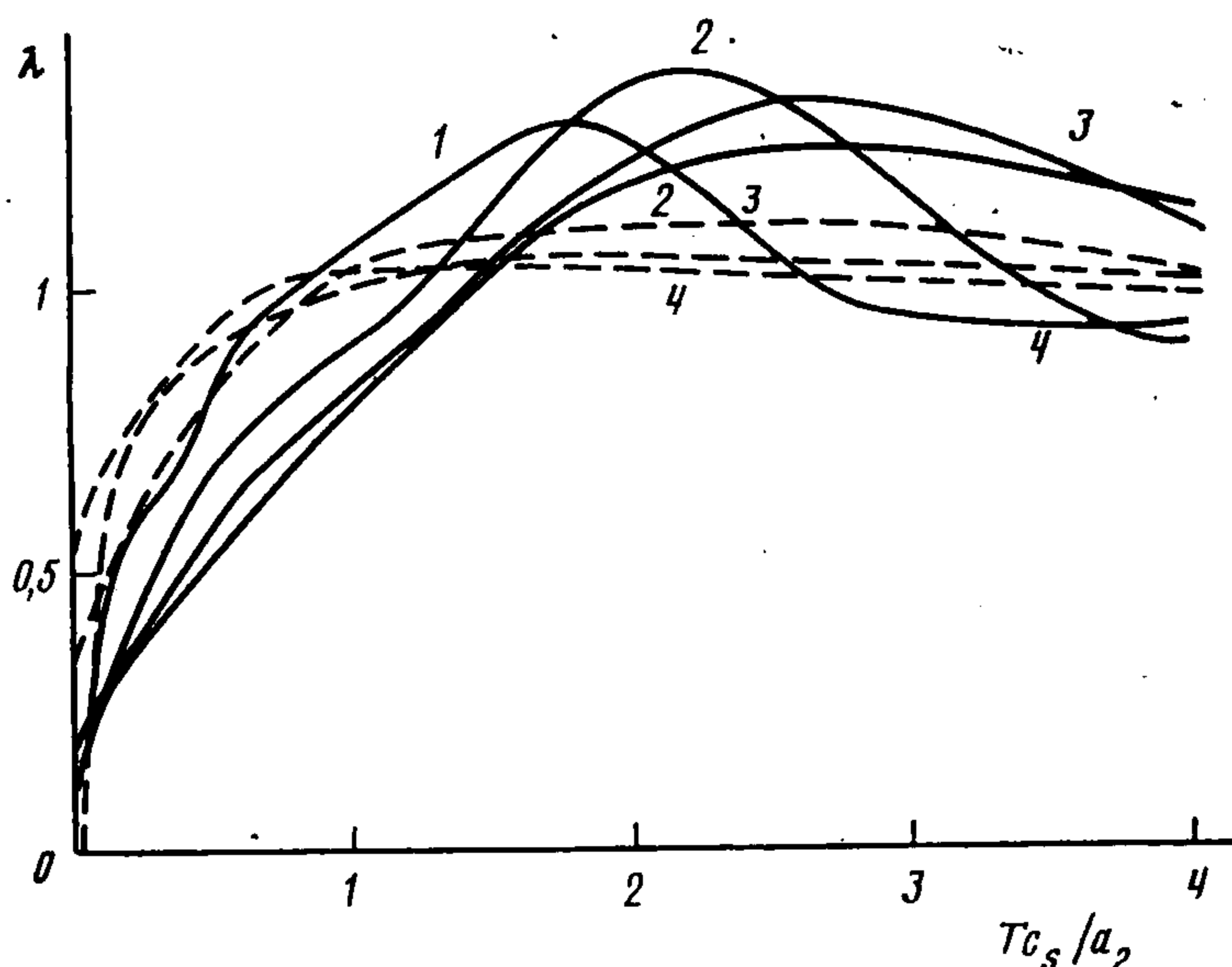
На фиг. 1 даны зависимости  $\lambda = |N|/N_{st}$  от приведенного волнового числа в точках эллипса  $(0, a_2)$  (сплошные линии) и  $(a_1, 0)$  (штриховые линии) для эллипсов с отношениями полуосей 1:1, 1:2, 1:4, 1:8 (кривые 1, 2, 3, 4). Здесь  $|N|$  — модуль амплитуды коэффициента интенсивности напряжений,  $N_{st}$  — значение коэффициента интенсивности напряжений в той же точке для статической задачи при однородной нагрузке единичной интенсивности. В расчетах рассматривались АП вида  $[L/L]$ ,  $[L+1/L]$ ,  $[L/L+1]$  вплоть до  $L = 9$ . Ограничение порядка АП связано с потерей



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

точности при вычислении коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора по формулам раздела 2. Все расчеты проводились с двойной точностью, приведенные результаты соответствуют АП [9, 9].

Для иллюстрации того, как быстро устанавливаются результаты расчетов в зависимости от значений приведенного волнового числа, и для оценки устойчивости вычисленных значений по отношению к порядку АП  $[L/L]$  ниже приведены зависимости первого максимума  $\lambda^{(1)}$  первого минимума  $\lambda^{(2)}$  и второго максимума  $\lambda^{(3)}$  ( $\lambda^{(k)} = |N^{(k)}|/N_{st}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ), а также соответствующие им резонансные значения волнового числа  $\beta^{(k)} a$ , отвечающие задаче о круговой трещине

$[L/L]$	[3/3]	[4/4]	[5/5]	[6/6]	[7/7]	[8/8]	[9/9]
$\lambda^{(1)}$	1,4701	1,4788	1,4791	1,4791	1,4791	1,4791	1,4791
$\beta^{(1)} a$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
$\lambda^{(2)}$	0,3274	0,4071	0,3971	0,4023	0,3980	0,3975	0,3975
$\beta^{(2)} a$	5,2	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0
$\lambda^{(3)}$	—	0,6422	0,7570	0,6929	0,7876	0,8296	0,8358
$\beta^{(3)} a$	—	5,2	5,5	4,3	4,3	4,3	4,3

Из фиг. 1 видно, что для эллиптических трещин величина первого максимума  $\lambda^{(1)}$  в точке  $(0, a_2)$  и соответствующее ей резонансное значение  $\beta_{res} a_2$  при увеличении эксцентриситета эллипса стремятся к значениям, отвечающим плоской задаче [11] (штрихпунктирная кривая). Отметим, что величина  $\lambda^{(1)}$  в точке  $(0, a_2)$  немонотонно зависит от эксцентриситета эллипса. Увеличение эксцентриситета эллипса приводит также к ухудшению сходимости АП, вследствие чего в указанном диапазоне изменений  $[L/L]$  для эллипса 1 : 8 в точке  $(0, a_2)$  стабилизируется лишь первый максимум. Это, видимо, связано как с чисто вычислительными причинами, так и с тем, что в плоской задаче разложение скачков смещений в асимптотический ряд содержит не только степенные, но и логарифмические слагаемые [11].

Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений, полученных методом, основанным на АП и двухбазисным проекционным методом [8, 9], показало их совпадение в исследуемом диапазоне волновых чисел с точностью до 5%.

Важной характеристикой, определяющей эффективность рассеяния дефектом плоской упругой волны, является полное сечение рассеяния  $\Sigma_{sc}$ , которое выражается через отношение усредненной за период колебаний и проинтегрированной по всем направлениям плотности потока энергии рассеянной волны к усредненной за период колебаний плотности потока энергии падающей волны [12]. В случае нормального падения на трещину плоской продольной волны полное сечение рассеяния выражается вытекающей из [12] формулой

$$\Sigma_{sc} = \beta/\eta \iint_G \text{Im}(b) dx$$

На фиг. 2 приведена зависимость  $\Sigma_{sc}(\beta r)/S$  для трещин различной формы, где  $S$  — площадь области трещины, а  $r$  — радиус круга площади  $S$ . Рассмотрены случаи эллипсов с отношениями полуосей 1 : 1, 1 : 2, 1 : 4 и квадрата (сплошные кривые 1, 2, 3) и штриховая кривая. Расчеты проводились для всех трещин двухбазисным проекционным методом [8, 9], а для эллиптических трещин еще и методом, основанным на АП. Поскольку величина  $\Sigma_{sc}$  при  $\beta \rightarrow 0$  имеет порядок  $\beta^4$ , то АП строились для функции  $\Sigma_{sc}/\beta^4$ . Кроме того, разложение  $\text{Im}(b)$  в ряд Тейлора по  $\beta$  содержит лишь нечетные степени, вследствие чего в качестве независимой переменной для этой функции бралось  $\beta^2$ . Поэтому порядок использованных АП был ниже, чем в случае исследования коэффициентов интенсивности напряжений. Представлены результаты, соответствующие АП порядка [3/4]. Результаты расчетов, полученных обоими методами, совпадают. Они также совпадают с полученными ранее результатами решения задачи о круговой трещине [13].

На основании численных расчетов можно предположить, что выполняется следующее изопериметрическое неравенство: среди всех трещин равной площади наибольшее по  $\beta$  значение  $\Sigma_{sc}$  максимально для круговой трещины.

4. Рассмотрим нестационарную задачу об ударных воздействиях, нормальных к плоскости трещины, для типичного случая полубесконечной ступенчатой нагрузки  $H(\tau)$  единичной высоты, приложенной в момент  $\tau = 0$  ( $H(\tau)$  — функция Хевисайда). Применение преобразования Лапласа по времени с параметром  $s$  к уравнениям теории упругости приводит к уравнениям, совпадающим с уравнениями задачи об установившихся колебаниях с заменой  $\omega^2 = -s^2$  [5, 7]. Следовательно, псевдодифференциальное уравнение рассматриваемой нестационарной задачи имеет вид

$$p_G \Omega_s^* u^* = \frac{1}{s}, \quad x \in G, \quad u^* = 0, \quad x \notin \bar{G} \quad (4.1)$$

$$u^*(x, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} u(x, \tau) d\tau, \quad \frac{1}{s} = H(s^*)$$

где символ псевдодифференциального оператора получается из символа  $\Omega_\beta^*$  заменой  $\omega = is$ . Из (1.1), (4.1) следует, что  $u^*(x, s) = b(x, is)/s$ . Таким образом, разложение образа Лапласа решения задачи об ударных воздействиях в ряд по параметру преобразования выражается через разложение в ряд Тейлора по волновому числу задачи об установившихся колебаниях. Обращение АП порядка  $[L/M]$ , приближающей решение  $u^*(x, s)$ , не представляет труда, поскольку  $[L/M]$  — рациональная функция [14].

В частности, если все  $M$  корней знаменателя аппроксимации порядка  $[L/M]$  простые, то

$$u^*(x, s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{j=1}^M \frac{K_j}{s - s_j}, \quad u(x, \tau) = K_0 + \sum_{j=1}^M K_j e^{(s_j \tau)} \quad (4.2)$$

$$K_j = \lim_{s \rightarrow s_j} u^*(x, s) (s - s_j)$$

где  $K_j, s_j$  — комплексные числа.

На фиг. 3 в случае АП порядка [9, 9] приведены кривые изменения коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от времени в точках эллипса  $(0, a_2)$ ,  $(a_1, 0)$ , причем обозначения кривых те же, что на фиг. 1. При увеличении эксцентриситета эллипса решение в точке  $(0, a_2)$  сходится к решению плоской задачи [15], а в случае круга хорошо согласуется как с известными результатами [5], так и с решениями, полученными авторами двухбазисным проекционным методом. Видно, что при  $\tau = 0$  величина  $N(0) \neq 0$ , т. е. имеется погрешность вычислений (она уменьшается с увеличением порядка АП).

Ниже на примере задачи о круговой трещине показан процесс стабилизации полюсов  $s_j = a_j + ib_j$  АП вида  $[L/L]$  по мере увеличения их порядка, причем  $a_1 = -0,595$ ,  $b_1 = 1,639$  для приведенных значений  $[L/L]$

$[L/L]$	[4/4]	[5/5]	[6/6]	[7/7]	[8/8]	[9/9]
$a_2$	-2,332	-2,239	-0,989	-0,708	-0,771	-0,713
$b_2$	4,249	4,713	4,006	4,249	4,359	4,351
$a_3$	—	—	-3,081	-4,293	-3,904	-3,850
$b_3$	—	—	2,851	2,581	2,440	2,308

Заметим, что мнимые части двух первых полюсов приблизительно соответствуют первому и второму максимумам частотной кривой (см. фиг. 1, сплошная кривая  $I$ ). При увеличении эксцентриситета эллипса ухудшается сходимость полюсов соответствующих АП. Например, если при использовании АП вида  $[L/L]$  вплоть до  $L = 9$  в случае круговой трещины устанавливаются три ближайших к нулю полюса, то для эллипса 1 : 8 в том же диапазоне АП устанавливается лишь ближайший к нулю корень.

5. В заключение перечислим отличительные особенности примененного здесь метода решения.

1°. В связи с требованиями, предъявляемыми к точности вычисления коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора, круг решаемых задач ограничивается лишь теми формами трещин, для которых можно получить аналитические выражения для членов ряда. Однако то, что здесь это удалось сделать в случае эллиптических трещин, показывает, что указанный круг задач достаточно широк.

2°. В противоположность использованным прежде методам, где в задаче об установившихся колебаниях необходимо находить численное решение для каждого значения волнового числа, здесь получаются аналитические выражения, приближающие решение сразу в некоторой области изменения волновых чисел.

3°. Решение неустановившихся задач, как правило, требует проведения трудной и недостаточно точной процедуры численного обращения преобразования Лапласа или Фурье. В методе, основанном на аппроксимациях Паде, это решение получается путем аналитического обращения приближенного выражения.

4°. В предлагаемом методе время счета в основном расходуется на получение значений коэффициентов ряда Тейлора. Вычисление 18 членов потребовало в случае круга менее 10 мин, в случае эллипса около 6 ч на ЕС-1055, ЕС-1055 М. Все последующие расчеты как для установившихся колебаний, так и для ударных воздействий занимают секунды.

5°. Имеется принципиальная возможность: увеличив точность выполнения арифметических операций, использовать большее количество членов ряда Тейлора и благодаря этому приблизить решение в сколь угодно большой области изменения волновых чисел.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонической волны // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 93—99.
2. Sih G. C., Loeber J. F. Normal compression and radial shear waves scattering at a penny shaped crack in an elastic solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. No. 3. P. 711—721.
3. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack // Intern. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. No. 5. P. 381—388.
4. Shindo Y. Normal compression waves scattering at a flat annular crack in an infinite elastic solid // Quart. Appl. Math. 1981. V. 39. No. 3. P. 305—315.
5. Shindo Y. Axisymmetric elastodynamic response of a flat annular crack to normal impact waves // Eng. Fract. Mech. 1984. V. 19. No. 5. P. 837—848.
6. Itou S. Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium // ZAMM. 1980. V. 60. No. 8. P. 317—322.
7. Itou S. Transient analysis of stress waves around a rectangular crack under impact load // J. Appl. Mech. 1980. V. 77. No. 4. P. 958—959.
8. Капцов А. В., Шифрин Е. И. О рассеянии плоской трещиной нормально падающей продольной гармонической волны // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 106—112.
9. Шифрин Е. И. О приближенном решении уравнений некоторых смешанных задач теории упругости // Механика деформируемого тела. Сер. Прочность, упруго-вязкопластичность. М.: Наука, 1986. С. 154—164.
10. Бейкер Дж., Грейес-Моррис М. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
11. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a Griffiths crack // Intern. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. No. 9. P. 763—776.
12. Barrat P. J., Collins W. D. The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves // Proc. Camb. Phil. Soc. 1965. V. 61. Pt 4. P. 969—981.
13. Krenk S., Shmidt H. Elastic wave scattering by a circular crack // Phil. Trans. R. Soc. London. 1982. V. A308. No. 1502. P. 167—198.
14. Reynolds J. A. Applied transformed circuit theory for technology. N. Y., 1985. 335 p.
15. Thau S. A., Lu T. H. Transient stress intensity factors for a finite crack in an elastic solid caused by a dilatational wave // Intern. J. Solids and Struct. 1971. V. 7. No. 7. P. 731—750.

Москва

Поступила в редакцию  
9.11.1990