Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.375

С. А. Назаров

ОБ ЭФФЕКТЕ ТРЕХМЕРНОСТИ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ

Обсуждается влияние профиля торца трещины на напряженно-деформированное состояние тонкой пластины. В непосредственной близости от концов трещины возникает трехмерный пограничный слой, а вдали от концов поправочным членом в асимптотике служит линейная комбинация специальных, имеющих особенности, решений однородной задачи об обобщенном плосконапряженном состоянии. Уточняется формула для энергетического баланса при продвижении трещины и указываются постановки двумерных задач, учитывающих два члена асимптотики (в частности, вводится понятие эффективной длины плоского изображения трещины).

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Пусть G_0 — область на плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром Γ и содержащая отрезок $M = \{y \in \mathbf{R}^2\colon\ y_2 = 0,\ |y_1| \leqslant 1\}$, а $G_0{}^h = G_0 \times (-{}^1/{}_2h,\ {}^1/{}_2h)$ — пластина малой относительной толщины h (все координаты безразмерные), заполненная упругим материалом с постоянными Ламе λ и μ. Обозначим через d четную неотрицательную гладкую функцию на $[-{}^1/{}_2,\ {}^1/{}_2]$ и введем множество $M^h = \{x \equiv (y, z) \in \mathbf{R}^3\colon\ y_2 = 0,\ |z| \leqslant {}^1/{}_2h,\ |y_1| \leqslant 1 + hd\,(h^{-1}z)\}$, представляющее собой трещину в $G_0{}^h$ (функция d описывает профиль концевой зоны трещины). Пластину с трещиной обозначим $G^h = G_0{}^h \setminus M^h$ и предположим, что массовые силы отсутствуют, верхнее и нижнее основания $\Sigma_\pm{}^h$ пластины и берега $M_\pm{}^h$ трещины свободны от напряжений, а деформация осуществляется за счет самоуравновешенной нагрузки p, приложенной к боковой поверхности Γ^h пластины и имеющей вид $p\,(x) = (p'\,(y), 0)$, где $p' = (p_1, p_2)$. Вектор $u = (u_1, u_2, u_3)$ смещений является решением краевой задачи

$$L\,(\nabla_x)\,u\,(x) \equiv \mu\nabla_x\cdot\nabla_x u\,(x) + (\lambda + \mu)\nabla_x\nabla_x\cdot u\,(x) = 0, \quad x \in G^h \tag{1.1}$$

$$\sigma^{(3)}\,(u; x) = 0, \quad x \in \Sigma_\pm{}^h \tag{1.2}$$

$$\sigma^{(2)}\,(u; x) = 0, \quad x \in M_\pm{}^h; \quad \sigma^{(n)}\,(u; x) = p\,(x), \quad x \in \Gamma^h \tag{1.3}$$

$$(\nabla_x = \operatorname{grad}, \quad \sigma^{(j)} = \sigma e^{(j)}, \quad \sigma^{(n)} = \sigma n, \quad n = (n', 0))$$

Точкой обозначено скалярное произведение, $\sigma\,(u)$ — трехмерный тензор напряжений, $e^{(j)}$ — орт в $\mathbf{R}^3$; n' — единичный вектор внешней нормали к границе области $G_0 \subset \mathbf{R}^2$.

Известно, что решение u задачи (1.1)—(1.3) с некоторой точностью приближается решением $v^0 = (v_1{}^0, v_2{}^0)$ задачи об обобщенном плосконапряженном состоянии

$$L'\,(\nabla_y)\,v^0\,(y) \equiv \mu\nabla_y\cdot\nabla_y v^0\,(y) + (\lambda' + \mu)\nabla_y\nabla_y\cdot v^0\,(y) = 0, \quad y \in G = G_0 \setminus M \tag{1.4}$$

$$\tau^{(2)}\,(v^0; y) = 0, \quad y \in M_\pm; \quad \tau^{(n)}\,(v^0; y) = p'\,(y), \quad y \in \Gamma \tag{1.5}$$

$$(\nabla_y = (\partial/\partial y_1,\ \partial/\partial y_2), \quad \lambda' = 2\lambda\mu\,(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \tau^{(n)} = \tau n', \quad \tau^{(2)} = (\tau_{12},\ \tau_{22}))$$

Здесь $\tau\,(v^0)$ — двумерный тензор напряжений (с константами λ' и μ).

Точное утверждение об оценке остатка сформулируем в этом разделе только для решения u задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины G_0^h без трещины (нагружение то же, что и ранее). Положим $V^0(x, h) = D(h, z, \nabla_y) v^0(y)$, где D — (3×2)-матричный дифференциальный оператор, определенный равенством

$$D(h, z, \nabla_y) v = (v, 0) - \lambda [\lambda + 2\mu]^{-1} z e^{(3)} \nabla_y \cdot v + {}^1/_2 \lambda [\lambda + 2\mu]^{-1} [z^2 - {}^1/_{12} h^2] (\nabla_y \nabla_y \cdot v, 0) \tag{1.6}$$

Компоненты соответствующего трехмерного тензора напряжений находятся по формулам

$$\sigma_{jk}(V^0) = \tau_{jk}(v^0) + {}^1/_2 \lambda (\lambda + 2\mu)^{-1} (z^2 - {}^1/_{12} h^2) \tau_{jk} (\nabla_y \nabla_y \cdot v^0) \tag{1.7}$$
$$\sigma_{j3}(V^0) = 0 \quad (j, k = 1, 2) \quad \sigma_{33}(V^0) = 0$$

Предположим, что $p_1, p_2 \in W_2^{5/2}(\Gamma)$. Тогда решение v^0 задачи (1.4), (1.5) в области G_0 (без трещины M — отсутствует первое краевое условие в (1.5)) принадлежит $W_2^4(G_0)$. С использованием результатов [1—3] выводится неравенство

$$\| u_j - V_j^0 \| + h^{-1} \| u_3 - V_3^0 \| + \| (d + h) \sigma (u - V^0) \| \leqslant c h^{7/2} \tag{1.8}$$

Здесь $\| \cdot \|$ — норма в $L_2(G_0^h)$, $d(x) = \operatorname{dist}(y, \Gamma)$, постоянная не зависит от параметра h. Кроме того, считается, что векторы u и V^0 нормированы одинаковыми условиями, устраняющими произвол в выборе жесткого смещения (в частности, u_3 — нечетная функция переменной x_3). Как и в [3], требуя дополнительную гладкость вектора p', можно получить оценки разности $u - V^0$ в весовых классах Гельдера.

Решение v^0 задачи (1.4), (1.5) в области с трещиной допускает разложение

$$v^0(x) = c^0 + r^{1/2} (K_1 \Phi^1(\varphi) + K_2 \Phi^2(\varphi)) + (b_1^0 x_1 + b_2^0 x_2, - b_2^0 x_1 - b_1^0 \lambda' [\lambda' + 2\mu]^{-1} x_2) + r^{3/2} (k_1 \Upsilon^1(\varphi) + k_2 \Upsilon^2(\varphi)) + O(r^2) \quad (r \to 0) \tag{1.9}$$

$$(\Phi_r^1(\varphi), \Phi_\varphi^1(\varphi)) = (4\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} ([2\varkappa' - 1] \cos {}^1/_2\varphi - \cos {}^3/_2\varphi, \sin {}^3/_2\varphi - [2\varkappa' + 1] \sin {}^1/_2\varphi), \quad (\Phi_r^2(\varphi), \Phi_\varphi^2(\varphi)) = (4\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} (3 \sin {}^3/_2\varphi - [2\varkappa' - 1] \sin {}^1/_2\varphi, 3 \cos {}^3/_2\varphi - [2\varkappa' + 1] \cos {}^1/_2\varphi) \tag{1.10}$$

$$(\Upsilon_r^1(\varphi), \Upsilon_\varphi^1(\varphi)) = (12\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} (\cos {}^5/_2\varphi + [2\varkappa' - 3] \cos {}^1/_2\varphi, -\sin {}^5/_2\varphi + [2\varkappa' + 3] \sin {}^1/_2\varphi), \quad (\Upsilon_r^2(\varphi), \Upsilon_\varphi^2(\varphi)) = (12\mu)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \cdot (5 \sin {}^5/_2\varphi + [2\varkappa' - 3] \sin {}^1/_2\varphi, 5 \cos {}^5/_2\varphi - [2\varkappa' + 3] \cos {}^1/_2\varphi)$$

$$(c^0 = (c_1^0, c_2^0), \ \varkappa' = (\lambda' + 3\mu)(\lambda' + \mu)^{-1} = (5\lambda + 6\mu)(3\lambda + 2\mu)^{-1})$$

Здесь c_j^0, b_j^0 — некоторые постоянные; (r, φ) — полярные координаты с центром $(1, 0)$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$; K_1 и K_2 — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН); k_1 и k_2 — коэффициенты при младших сингулярных членах. Аналогичное представление имеет место и в окрестности другой вершины (далее используются обозначения $(r_\pm, \varphi_\pm)$, $K_{j\pm}$ и т. п.). Заметим, что для КИН верны формулы [4, 5]

$$K_j = \int_\Gamma p'(y) \cdot \zeta^j(y) \, ds_y \quad (j = 1, 2) \tag{1.11}$$

Здесь ζ^j — весовые функции, решения однородной $(p' = 0)$ задачи (1.4), (1.5), ограниченные всюду, кроме точки $y = (1, 0)$, и имеющие асимптотику

$$\zeta^j(x) = r^{-1/2} \Psi^j(\varphi) + \sum_{k=1,2} C_{jk} r^{1/2} \Phi^k(\varphi) + O(r) \quad (r \to 0) \tag{1.12}$$

$$(\Psi_r^1(\varphi), \Psi_\varphi^1(\varphi)) = [\varkappa' + 1]^{-1} (8\pi)^{-1/2} (3\cos {}^1/_2\varphi - [2\varkappa' + 1]\cos {}^3/_2\varphi, \\ -3\sin {}^1/_2\varphi + [2\varkappa' + 1]\sin {}^3/_2\varphi), \quad (\Psi_r^2(\varphi), \quad \Psi_\varphi^2(\varphi)) = [\varkappa' + \\ + 1]^{-1} (8\pi)^{-1/2} (-\sin {}^1/_2\varphi + [2\varkappa' + 1]\sin {}^3/_2\varphi, \quad -\cos {}^1/_2\varphi + [2\varkappa' - \\ - 1]\cos {}^3/_2\varphi) \tag{1.13}$$

Матрица C, составленная из множителей C_{jk} в разложениях (1.12), зависит от G, λ, μ и является симметрической (в случае краевой трещины такая матрица положительно определена [6], но здесь этого свойства может не быть).

Возвращаясь к обсуждению поведения решения задачи (1.1)—(1.3) при $h \to 0$, подчеркнем, что из-за особенностей $O(r^{1/2})$ в представлениях (1.9) величины (1.6) не могут служить асимптотическим приближением: функции (1.7), вообще говоря, не являются квадратично суммируемыми в G^h. Цель настоящей работы — построить глобальную асимптотику решения; как обычно в подобных ситуациях, необходимо исследовать пограничные слои.

2. Модельная задача о пограничном слое. Обозначим через Π^0 слой $\{\eta \in \mathbf{R}^3\colon |\eta_3| < {}^1/_2\}$, а через N — множество $\{\eta : \eta_2 = 0, \ |\eta_3| \leqslant {}^1/_2, \eta_1 \leqslant d(\eta_3)\}$. Область $\Pi = \Pi^0 \setminus N$ получается из пластины с трещиной G^h, если ввести «растянутые» переменные $\eta = (h^{-1}(y_1 - 1), h^{-1}y_2, h^{-1}z)$ и перейти формально к $h = 0$. Пограничный слой, возникающий вблизи концов разреза M^h, описывается при помощи специальных решений U^j однородной задачи теории упругости

$$L(\nabla_\eta) W^j(\eta) = 0, \quad \eta \in \Pi; \quad \sigma^{(2)}(W^j; \eta) = 0, \quad \eta \in N_\pm \\ \sigma^{(3)}(W^j; \eta) = 0, \quad \eta \in \Pi_\pm = \{\eta : \eta_3 = \pm {}^1/_2\} \setminus N \tag{2.1}$$

Этот пограничный слой имеет вид $h^{1/2}(K_1 W^1(\eta) + K_2 W^2(\eta))$, а решения W^j согласно формуле (1.9) и условиям сращивания [7] следует подчинить соотношениям

$$W_k^j(\eta) = r_\eta^{1/2}\Phi_k^j(\varphi_\eta) + o(r_\eta^{1/2}), \quad k = 1, 2, \quad W_3^j(\eta) = o(r_\eta^{1/2}) \\ (r_\eta \to \infty) \tag{2.2}$$

Здесь (r_η, φ_η) — полярные координаты, отвечающие двумерным декартовым координатам $\eta' = (\eta_1, \eta_2)$. Используя симметрию области Π относительно плоскости $\eta_2 0 \eta_3$, заключаем согласно [8], что справедливо более точное представление

$$W^j(\eta) = D(1, \eta_3, \partial/\partial\eta_1, \partial/\partial\eta_2)\{r_\eta^{1/2}\Phi^j(\varphi_\eta) + c_j(d)\, r_\eta^{-1/2}\Psi^j(\varphi_\eta)\} + \\ + O(r_\eta^{-1}) \quad (r_\eta \to \infty) \tag{2.3}$$

В (2.3) D — оператор (1.6), $c_j(d)$ — некоторые величины, зависящие от μ, λ и формы конца разреза N (от функции d).

Пусть (ρ_η, θ_η) — полярные координаты в плоскости, проходящей через точку $\eta = (d(\eta_3), 0, \eta_3)$ и перпендикулярной дуге $T = \{\eta : \eta_2 = 0, |\eta_3| < {}^1/_2, \eta_1 = d(\eta_3)\}$, причем $|\theta_\eta| < \pi$ и $|\eta_3| < {}^1/_2$. Вблизи торца T трещины N решения задач (2.1), (2.2) допускают разложения

$$W^1(\eta) = \beta_1(\eta_3)e^{(1)} + \beta_3(\eta_3)e^{(3)} + t_1(\eta_3)\rho_\eta^{1/2}\Phi_*^1(\theta_\eta) + O(\rho_\eta(\rho_\eta - \\ - |\eta_3| + {}^1/_2)^{\operatorname{Re}\Lambda-1-\delta}), \quad W^2(\eta) = \beta_2(\eta_3)e^{(2)} + t_2(\eta_3)\rho_\eta^{1/2}\Phi_*^2(\theta_\eta) + \\ + t_3(\eta_3)\rho_\eta^{1/2}\Phi_*^3(\theta_\eta) + O(\rho_\eta(\rho_\eta - |\eta_3| + {}^1/_2)^{\operatorname{Re}\Lambda-1-\delta}) \quad (\rho_\eta \to 0, \\ |\eta_3| < {}^1/_2) \tag{2.4}$$

Здесь $e^{(m)}$ — орт в $\mathbf{R}^3$; $\Phi_*^j = (\Phi_{*1}^j, \Phi_{*2}^j, 0)$; $j = 1, 2$ — угловые части, определенные формулами (1.10), в которых величина $\varkappa'$ заменена на $\varkappa =$

$= (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)^{-1}$; $\Phi_*^3(\theta) = (0, 0, \mu^{-1}(2\pi)^{-1/2}\sin {}^1/_2\theta)$; β_m и t_m — некоторые гладкие на $(-{}^1/_2, {}^1/_2)$ функции, δ — произвольное положительное число. Оценка остатка в (2.4) и поведение функций β_m, t_m при $\eta_3 \to \pm{}^1/_2$ определяются тем, что точки $P_\pm = (d({}^1/_2), 0, \pm{}^1/_2)$ являются для границы $\partial\Pi$ особыми точками типа вершины полиэдра. Соответственно через $\operatorname{Re}\Lambda$ обозначается наименьшая положительная вещественная часть показателей степеней однородности (по расстоянию до P_+) решений трехмерной задачи теории упругости в области $\Xi = \{x \in \mathbf{R}^3\colon x_3 < {}^1/_2\} \setminus \setminus \{x\colon x_1 \leqslant d'({}^1/_2)(x_3 - {}^1/_2, x_2 = 0)\}$, в полупространстве с угловой в плане трещиной. Такие показатели $\Lambda(\alpha, \nu)$ вычислялись в [9, 10]. Они зависят от раствора $\alpha = \operatorname{arctg} d'({}^1/_2) + {}^1/_2\pi$ угла трещины и от коэффициента Пуассона $\nu = {}^1/_4(3 - \varkappa)$, причем $\operatorname{Re}\Lambda(\alpha, \nu) \geqslant 0$, а функция $\alpha \to \Lambda(\alpha, \nu)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и $\Lambda(0, \nu) = 0$, $\Lambda(\pi, \nu) = 1$ (см., например, [11]). Поскольку асимптотика вектор-функции U^j при $\eta \to P_\pm$ определяется показателями $\Lambda(\alpha, \nu)$ (точнее, названными решениями трехмерной задачи), то производные функций β_m и t_m, вообще говоря, обращаются в бесконечность при $\eta_3 = \pm{}^1/_2$.

Далее используются оценки

$$|\beta_m(\eta_3)| \leqslant c_0, \quad |[({}^1/_4 - \eta_3^2)\partial_3]^{n+1}\beta_m(\eta_3)| \leqslant c_{n+1}({}^1/_4 - \eta_3^2)^{\operatorname{Re}\Lambda - \delta}$$
$$|[({}^1/_4 - \eta_3^2)\partial_3]^n t_m(\eta_3)| \leqslant c_n({}^1/_4 - \eta_3^2)^{\operatorname{Re}\Lambda - 1/2 - \delta} \tag{2.5}$$
$$m = 1, 2, 3,\ n = 0, 1, \ldots,\ \partial_m = \partial/\partial\eta_m,\ \delta > 0$$

Обращаем внимание на различия в показателях степеней величин ${}^1/_4 - \eta_3^2$, эквивалентных расстоянию на T до точек $P_\pm$. В первой из оценок (2.5) учтено то, что в асимптотике W^j вблизи $P_\pm$ фигурируют жесткие поступательные смещения — именно они и определяют поведение $\beta_m(\eta_3)$ при $\eta_3 \to \pm{}^1/_2$. Дифференцирование ∂_3 устраняет эти слагаемые из разложения и старшим членом становится производная однородного решения в полиэдре Ξ, которое в сферических координатах $(\rho_+, \theta_+, \varphi_+)$ с центром P_+ имеет вид

$$c_+\rho_+^{\Lambda(\alpha, \nu)}\Upsilon(\theta_+, \varphi_+),\quad c_+ = \text{const} \tag{2.6}$$

Угловая часть Υ является решением некоторой краевой задачи в области Ω_α, вырезаемой полиэдром Θ на единичной сфере S^2. Область Ω есть полусфера с удаленной дугой большого круга, и на ее границе $\partial\Omega_\alpha$ расположены три угловые точки: одна из точек (обозначим ее Q) является вершиной одномерной трещины, а в двух других гладкие дуги контура $\partial\Omega_\alpha$ встречаются под прямым углом. Можно проверить, что асимптотика вектор-функции Υ в малой окрестности точки Q, написанная с точностью $O(d)$, где d — расстояние на сфере до Q, совпадает с аналогичной асимптотикой вблизи вершины трещины в плоской и антиплоской задачах теории упругости. Поэтому решение (2.6) вносит вклад в каждый член разложения (2.4) вблизи ребра T. Иными словами, справедливо соотношение (при некоторых дополнительных условиях)

$$\beta_m(\eta_3) = \beta^0_{m\pm} + c_\pm\beta^\Lambda_{m\pm}({}^1/_4 - \eta_3^2)^\Lambda + o(({}^1/_4 - \eta_3^2)^\Lambda) \quad (\eta_3 \to \pm{}^1/_2)$$

Это соотношение и приводит ко второй из оценок (2.5). Уменьшение на ${}^1/_2$ показателя степени в оценках для t_m связано с тем, что $\rho_+ \sim \rho_+ d$, и значит, часть $O(\rho_+^{1/2})$ сингулярности $O(\rho_+^\Lambda)$ функции (2.6) на ребре уже учтена самой формулой (2.4). Наконец, угловая часть в (2.6) полиномиально зависит от $\ln\rho_+$, когда спектральная задача в Ω_α имеет присоединенный вектор; поэтому в (2.4), (2.5) введено произвольное положительное число δ.

Математическое обоснование приведенных фактов содержится в [12].

Выведем одно тождество для функций k_m. С этой целью заметим, что производная $\partial_1 W^j \equiv \partial W^j/\partial\eta_1$ удовлетворяет равенствам (2.1), а соотношение (2.2) приобретает следующий вид (ср. с рассуждениями из [6]):

$$\partial_1 W^j(\eta) = -(4\mu)^{-1}(1 + \varkappa')D(1, \eta_3, \partial/\partial\eta_1, \partial/\partial\eta_2)r_\eta^{-1/2}\Psi^j(\varphi_\eta) + O(r_\eta^{-1}) \quad (r_\eta \to \infty) \tag{2.7}$$

Дифференцируя по η_1 разложения (2.4), имеем

$$\partial_1 W^1(\eta) \sim -(4\mu)^{-1}(1+\varkappa)[1+d'(\eta_3)^2]\, t_1(\eta_3)\, \rho_\eta^{-1/2}\Psi_*^1(\theta_\eta)$$

$$\partial_1 W^2(\eta) \sim -(4\mu)^{-1}(1+\varkappa)[1+d'(\eta_3)^2]\{t_2(\eta_3)\rho_\eta^{-1/2}\Psi_*^2(\theta_\eta) + 4(1+\varkappa)^{-1} t_3(\eta_3)\rho_\eta^{-1/2}\Psi_*^3(\theta_\eta)\} \quad (\rho_\eta \to 0) \tag{2.8}$$

Здесь угловые части Ψ_*^1, Ψ_*^2 определяются по (1.13) так же, как Φ_*^1, Φ_*^2 в (2.4) определялись по (1.10), $\Psi_*^3(\theta) = (0, 0, 2(2\pi)^{-1/2}\sin {}^1/_2\theta)$; оценки остатков в (2.8) не приводятся — они вытекают из (2.4) и (2.5).

Обозначим через T_ε трубчатую ε-окрестность множества T и применим формулу Бетти в области $\{\eta \in \Pi\colon r_\eta < \varepsilon^{-1}\} \setminus \overline{T}_\varepsilon$ для полей W^j и $\partial_1 W^j$. В результате получим равенство, связывающие интегралы от разности $\sigma^{(n)}(W^j)\,\partial_1 W^j - \sigma^{(n)}(\partial_1 W^j)\, W^j$ по поверхностям $\{\eta \in \Pi\colon r_\eta = \varepsilon^{-1}\}$ и $\partial T_\varepsilon \cap \Pi$. Устремим ε к нулю и для вычисления пределов интегралов воспользуемся оценками (2.5) и асимптотиками (2.2), (2.7) и (2.4), (2.8) соответственно. Кроме того, напомним, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{\rho_\eta=\varepsilon\}} \{\sigma^{(\rho)}(\rho_\eta^{1/2}\Phi_*^j)\rho_\eta^{-1/2}\Psi_*^k - \sigma^{(\rho)}(\rho_\eta^{-1/2}\Psi_*^k)\rho_\eta^{1/2}\Phi_*^j\}\, ds_\theta = \delta_{j,k}$$

Переходя к интегралам первого рода по T (множитель $1 + d'(\eta_3)^2$ в (2.8)) заключаем, что верны тождества

$$\frac{1+\varkappa'}{1+\varkappa} = \int\limits_T t_1(\eta_3)^2\, ds_3 = \int\limits_T t_2(\theta_3)^2\, ds_3 + \frac{4}{1+\varkappa}\int\limits_T t_3(\eta_3)^2\, ds_3 \tag{2.9}$$

3. Главный член глобальной асимптотики. Процедура сращивания [7] определяет по разложению (1.9) решения v^0 гладкого типа поведение на бесконечности решения $K_1 W^1 + K_2 W^2$ типа пограничного слоя (задача (2.1), (2.2)). Точно так же сращивание представления (2.3) с решением $D(h, z, \nabla_y)(v^0 + hv^1 + \ldots)$ гладкого типа доставляет асимптотическую (при $r \to 0$) формулу для v^1. Именно, вектор-функцию v^1 следует подчинить соотношениям

$$L'(\nabla_y)\, v^1(y) = 0, \quad y \in G_0 \setminus M; \quad \tau^{(n)}(v^1; y) = 0, \quad y \in \Gamma \cup M \tag{3.1}$$

$$v^1(y) = \sum_{j=1,2} c_j(d) K_{j\pm} r_\pm^{-1/2}\Psi^j(\varphi_\pm) + c_\pm^1 + O(r_\pm^{1/2}) \quad (r_\pm \to 0) \tag{3.2}$$

Знаки плюс и минус отвечают вершинам (1, 0) и (—1, 0) трещины M. Согласно определению весовых функций $\zeta^{1\pm}$ и $\zeta^{2\pm}$ из (3.2), (1.12) выводим

$$v^1(y) = \sum_{\pm}\sum_{j=1,2} c_j(d) K_{j\pm}\zeta^{j\pm}(y) \tag{3.3}$$

Сформулируем оценку для остатка в полученной двучленной асимптотике; вывод такой оценки мало отличается от [3] — нужно лишь учесть появление дополнительных особенностей, что делается, в частности, при помощи результатов [13]. Для упрощения записи будем указывать лишь одну вершину (1, 0) трещины. Обозначим через χ такую срезающую функцию из $C_0^\infty(\mathbf{R})$, что $\chi(r) = 0$ при $r > {}^1/_2$ и $\chi(r) = 1$ при $r < {}^1/_4$, а асимптотическое приближение к решению задачи (1.1)—(1.3) определим равенством

$$V^1(x) = (1-\chi(h^{-1}r))\, D(h, z, \nabla_y)(v^0(y) + hv^1(y)) + \chi(h^{-1}r)(c^0 + hc^1, 0) + \chi(r)\sum_{j=1,2} K_j\{h^{1/2}W^j(\eta) - (1-\chi(h^{-1}r))\, D(h, z, \nabla_y)(r^{1/2}\Phi^j(\varphi) + hc_j(d)\, r^{-1/2}\,\Psi^j(\varphi))\} \tag{3.4}$$

Подчеркнем, что эта сложная конструкция нужна лишь при обосновании асимптотики решения. Благодаря представлениям (1.9), (1.12) и (2.3) можно увидеть, что $V^1 \sim D\,(v^0 + hv^1)$ вдали от торцевых зон трещины и что $V^1 \sim (c^0 + hc^1,\ 0) + h^{1/2}\,(K_{1+}W^1 + K_{2+}W^2)$ вблизи ее правого конца. Считая, что поле (3.4) и решение u задачи (1.1)—(1.3) подчинены одинаковым условиям ортогональности, устраняющим произвол в выборе жесткого смещения, получаем оценку

$$\| u_1 - V_1^1 \| + \| u_2 - V_2^1 \| + h^{-1} \| u_3 - V_3^1 \| + \| \sigma\,(u - V^1) \| \leqslant \mathrm{c}h^{3/2} \tag{3.5}$$

Отметим, что показатель степени h в (3.5) меньше, чем в (1.8). Дело в том, что в случае гладкого контура, ограничивающего срединное сечение пластины, решения v^1 и v^2 гладкого типа равны нулю, т. е. сама вектор-функция v^0 порождает приближение третьего порядка. Оказывается, что возмущение, появившееся из-за особой точки названного контура, имеет порядок h. Иными словами, в асимптотике решения трехмерной задачи содержатся ненулевые слагаемые hv^1 и h^2v^2; последнее из них отнесено в остаток, что и «загрубило» оценку (3.5) по сравнению с (1.8). Можно было бы определить и слагаемое v^2 — соответствующий член $h^{5/2}W\,(\eta)$ пограничного слоя получится после учета выражений порядков $r^{3/2}$ и $r^{1/2}$ в разложениях (1.9) и (1.12) соответственно.

Приведем несколько следствий, вытекающих из соотношений (3.4), (3.5).

1°. Пусть U^h и U_0 — потенциальная энергия деформации, а A^h, A_0 — работы внешних сил для задач (1.1)—(1.3) и (1.4), (1.5) соответственно. Поскольку $V^1 = D\,(v^0 + hv^1)$ вблизи Γ^h, то из (3.5), (1.7) и (3.3), (1.11) выводим равенства

$$U^h = -{}^1/_2 A^h = -{}^1/_2 h \int_\Gamma p'\,(y) \cdot (v^0\,(y) + hv^1\,(y))\,ds_y + O\,(h^3) =$$
$$= hU_0 - {}^1/_2 h^2 \sum_\pm (c_1\,(d)\,K_{1\pm}^2 + c_2\,(d)\,K_{2\pm}^2) + O\,(h^3) \tag{3.6}$$

2°. Пусть Λ_0 — простое собственное число оператора задачи (1.4), (1.5) и v^0 — отвечающий ему нормированный в $L_2\,(G)$ собственный вектор; для v^0 справедливо разложение (1.9). Известно, что собственная частота $\omega_0\,(h)$ продольных колебаний трехмерной пластины с плотностью материала γ удовлетворяет оценке $|\,\omega_0\,(h) - \Lambda_0^{1/2}\gamma^{-1/2}\,| \leqslant \mathrm{const}\,h$. Учет второго члена асимптотики дает уточненную формулу для собственной частоты

$$\omega_0\,(h) = \gamma^{-1/2}\,\Big(\Lambda_0 + h \sum_\pm \sum_{j=1,2} c_j\,(d)\,K_{j\pm}^2\Big)^{1/2} + O\,(h^2)$$

3°. Рассмотрим задачу о квазистатическом подрастании разреза M^h; положим $M\,(\varepsilon) = \{y\colon y_2 = 0,\ -1 \leqslant y_1 \leqslant 1 + \varepsilon\}$, $M^h\,(\varepsilon) = \{x\colon y_2 = 0,$ $|\,z\,| \leqslant {}^1/_2 h,\ -1 - hd\,(h^{-1}z) \leqslant y_1 \leqslant 1 + \varepsilon + hd\,(h^{-1}z)\}$, где $0 < \varepsilon$ — положительный параметр (т. е. рост трещины происходит в одну сторону и профиль концевой зоны остается неизменным). Через $U^h\,(\varepsilon)$ обозначим потенциальную энергию деформации пластины $G_0{}^h$ с трещиной $M^h\,(\varepsilon)$, $U_0\,(\varepsilon)$ — потенциальную энергию, отвечающую плосконапряженному состоянию области G_0 с трещиной $M\,(\varepsilon)$, а $K_j\,(\varepsilon)$ — соответствующий КИН.

Вблизи ребра $T_+{}^h = \{x\colon y_2 = 0,\ |\,z\,| < {}^1/_2 h,\ y_1 = 1 + hd\,(h^{-1}z)\}$ решение u задачи (1.1)—(1.3) допускает подобное (2.4) представление

$$u\,(x) = \sum_{m=1}^{3} \{\mathbf{B}_m\,(z)\,e^{(m)} + \mathbf{K}_m\,(z)\,\rho^{1/2}\Phi_*{}^m\,(\theta)\} +$$
$$+ O\,(\rho\,(\rho - |\,z\,| + {}^1/_2 h)^{\operatorname{Re}\Lambda - 1 - \delta}) \quad (\rho \to 0) \tag{3.7}$$

Здесь ρ, θ — полярные координаты в плоскости, проходящей через точку $(1 + hd\,(h^{-1}z),\ 0,\ z)$, где $|\,z\,| < {}^1/_2 h$, и перпендикулярной дуге $T_+{}^h$, а $\mathbf{K}_m(z)$ — КИН. Опираясь на соотношения (3.4), (3.5), можно проверить, что верны оценки (ср. с (2.5))

$$|\mathbf{K}_1(z) - t_1(h^{-1}z) K_1| + |\mathbf{K}_p(z) - t_p(h^{-1}z) K_2| \leqslant \mathrm{const}\, h\, ({}^1/_4 h^2 - z^2)^{\mathrm{Re}\,\Lambda - {}^1/_2 - \delta} \quad (p = 2, 3) \tag{3.8}$$

Теперь, используя равенства (2.9) и известную формулу Гриффитса — Ирвина, находим

$$dU^h/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = -(2\mu)^{-1} \int\limits_{T_+^h} \{{}^1/_4(1+\varkappa)(\mathbf{K}_1(z)^2 + \mathbf{K}_2(z)^2) + \mathbf{K}_3(z)^2\}\, ds_x =$$
$$= -(2\mu)^{-1} h \int\limits_{T} \{{}^1/_4(1+\varkappa)(K_1^2 t_1(\eta_3)^2 + K_2^2 t_2(\eta_3)^2) + K_2^2 t_3(\eta_3)^2\}\, ds_\eta +$$
$$+ O(h^2) = -(8\mu)^{-1} h (1+\varkappa')(K_1^2 + K_2^2) + O(h^2) \tag{3.9}$$

Следовательно, скорости высвобождения энергии, подсчитанные согласно трехмерной и двумерной формулам Гриффитса—Ирвина, совпадают с точностью $O(h^2)$.

Для улучшения оценки остатка применим соотношение (3.6). Имеем

$$\left.\frac{dU^h}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = h \left.\frac{dU_0}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} - h^2 \sum_{\pm} \sum_{j=1,2} c_j(d) K_{j\pm}(0) \frac{dK_{j\pm}}{d\varepsilon}(0) + O(h^3)$$

Производные КИН по длине трещины определены в [6, 14]. Напомним и введем некоторые обозначения: $K_{j\pm} \equiv K_{j\pm}(0)$ и $k_{j\pm}$ — коэффициенты в разложении (1.9) вектора v^0 вблизи вершины $(\pm 1, 0)$ трещины M; $\mathbf{C}_{jk}{}^+$ — множители $\mathbf{C}_{jk}$ в представлении (1.12) специальных решений ζ^{j+} задачи (3.1); эти решения имеют сингулярности $O(r^{-1/2})$ в точке (1, 0) и ограничены в окрестности другой особой точки (—1, 0), причем коэффициенты K_q, $q = 1, 2$, в разложениях вида (1.9) векторов ζ^{j+} при $r_- \to 0$ суть $\mathbf{C}_{jq}{}^-$. Справедливы соотношения

$$K_{j+}(\varepsilon) = K_{j+} + \varepsilon\{{}^1/_2 k_{j+} + (4\mu)^{-1}(1+\varkappa') \sum_{p=1,2} K_{p+}\mathbf{C}^+_{pj}\} + O(\varepsilon^2)$$
$$K_{j-}(\varepsilon) = K_{j-} + \varepsilon(4\mu)^{-1}(1+\varkappa') \sum_{p=1,2} K_{p+}\mathbf{C}^-_{pj} + O(\varepsilon^2) \tag{3.10}$$

Таким образом,

$$\left.\frac{dU^h}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = -(8\mu)^{-1}(1+\varkappa') h \sum_{j=1,2} K_{j+}^2 - h^2 \sum_{j=1,2} c_j(d) \times$$
$$\times \left\{K_{j+}\left[{}^1/_2 k_{j+} + (4\mu)^{-1}(1+\varkappa') \sum_{p=1,2} K_{p+}\mathbf{C}^+_{pj}\right] + (4\mu)^{-1}(1+\varkappa') K_{j-} \times\right.$$
$$\left.\times \sum_{p=1,2} K_{p+}\mathbf{C}^-_{pj}\right\} + O(h^3) = -h(8\mu)^{-1}(1+\varkappa') \times$$
$$\times \sum_{j=1,2} \{K_{j+} + hc_j(d)[(2\mu)^{-1}(1+\varkappa')k_{j+} + K_{1+}\mathbf{C}^+_{1j} + K_{2+}\mathbf{C}^+_{2j}] +$$
$$+ hc_1(d) K_{1-}\mathbf{C}^-_{j1} + hc_2(d) K_{2-}\mathbf{C}^-_{j2}\}^2 + O(h^3) \tag{3.11}$$

По сравнению с (3.9) в (3.11) учтены следующие, порядка h^2, члены асимптотики при $h \to 0$ КИН $\mathbf{K}_m(z)$ (см. (3.7) и (3.8)). Точно такая же формула получится, если построить член $h^{3/2} W(\eta)$ пограничного слоя, упомянутый после оценки (3.5), и воспользоваться аналогичными (3.9) преобразованиями.

4. «Объединенная задача» для двучленной асимптотики. Как показывают примеры 1°—3° разд. 3, при вычислении различных интегральных характеристик напряженно-деформированного состояния тонкой пластины с трещиной трехмерный пограничный слой принимает лишь опосредованное участие: поправочный член асимптотики таких характеристик определяется вторым членом (3.3) разложения гладкого типа, в котором фигурируют только величины $c_1(d)$ и $c_2(d)$ из представлений (2.3) специальных погранслойных решений W^1 и W^2. Поэтому разумными являются постановки задач в области $G = G_0 \setminus M \subset \mathbf{R}^2$, решения которых с точностью $O(h^2)$ совпадают с суммой $v^0 + hv^1$, причем в силу пренебрежения трехмерным погранслоем достаточно требовать такого совпадения лишь вне малых окрестностей вершины трещины M.

1°. Как обычно в методе сращиваемых асимптотических разложений, младшие члены асимптотики обладают неэнергетическими особенностями в иррегулярных точках границы (ср. с (3.3) и (1.12)). Поэтому одной из возможных постановок задачи, объединяющей два члена асимптотики, служит расширение области определения оператора задачи (1.4), (1.5). Соображения такого рода уже давно используются, например, в задачах дифракции (теория потенциалов нулевого радиуса; см. [15, 16] и др.). Приведем результаты применительно к задаче (1.4), (1.5) с массовыми силами f

$$-L'(\nabla_y)\, v(y) = f(y),\ \ y \in G;\quad \tau^{(n)}(v;\, y) = 0,\ y \in \partial G \tag{4.1}$$

Пусть $\mathbf{L}$ — (неограниченный) оператор в $L_2(G)$, заданный дифференциальным выражением $L'(\nabla_y)$ и имеющий область определения $D(\mathbf{L}) = \{v \in W_2^2(G)\colon v(\pm 1, 0) = 0$ и $\tau^{(n)}(v) = 0$ на $\partial G\}$; этот оператор замкнутый и симметрический. Пусть еще $\mathbf{L}^e$ — оператор, заданный тем же дифференциальным выражением, но имеющей такую область определения:

$$D(\mathbf{L}^e) = \Big\{v : v(y) = w(y) + \sum_{\pm}\Big[\chi(r_\pm)\, c^{0,\pm} + \sum_{j=1,2} K_{j\pm}(hc_j(d))\,\zeta^{j\pm}(y) + \\ + \chi(r_\pm)\, r_\pm^{1/2}\Phi^j(r_\pm)\Big)\Big],\ \ w \in D(\mathbf{L}),\ c^{0\pm} \in \mathbf{R}^2,\ K_{j\pm} \in \mathbf{R}\Big\} \tag{4.2}$$

Можно проверить, что оператор $\mathbf{L}^e$ — самосопряженное расширение оператора $\mathbf{L}$, и что решение v^e уравнения $-\mathbf{L}^e v^e = f \in L_2(G)$ равно сумме $v^0 + hv^1$, в которой $v^0 \in W_2^1(G)$ — решение задачи (4.1), а v^1 — вектор (3.3). Основное обстоятельство, позволяющее дать физическое истолкование поля смещений v^e как «дальнего поля», заключается в том, что квадратичная форма $^1/_2 h\,\langle \mathbf{L}^e v, v\rangle$, вычисленная на решении v^e названного уравнения, совпадает с первыми двумя членами асимптотики (3.6) потенциальной энергии U^h в исходной трехмерной задаче (это проверяется при помощи формул (4.2) и (1.11)).

2°. Рассмотрим задачу о трещине нормального отрыва, т. е. предположим симметрию данных задачи (1.1)—(1.3) относительно плоскости $x_2 0 x_3$. Тогда $K_2 = 0$ и в формуле (3.3) будет фигурировать лишь величина $c_1(d)$. Это позволяет ввести объединенную задачу отличными от 1° способами.

Сначала обратимся к моментной теории упругости со стесненным вращением

$$\mu\nabla_y\nabla_y w(y) + (\mu + \lambda')\,\nabla_y\nabla_y\cdot w(y) - 4\mu l^2\Theta(\nabla_y)\nabla_y\nabla_y\omega(y) = 0$$
$$\omega(y) = \Theta(\nabla_y)\, w(y),\ y \in G \tag{4.3}$$
$$\tau^{(n)}(w;\, y) - 4\mu l^2\Theta(n'(y))\nabla_y\cdot\nabla_y\omega(y) = p'(y),\ \ n'(y)\,\nabla_y\omega(y) = 0,\quad y \in \partial G$$
$$(\Theta(\nabla_y) = -^1/_2(\partial/\partial y_2,\ -\partial/\partial y_1),\quad \Theta(n') = -^1/_2(n_2,\ -n_1))$$

Здесь $w = (w_1, w_2)$ — вектор смещений, ω — поворот, n' — единичный вектор внешней нормали, $\tau(w)$ — тот же тензор (классических) напряжений что и в (1.5), l — показатель моментности, малый параметр.

Будем интерпретировать задачу (4.3) как регулярно вырождающуюся при $l \to 0$ задачу с малым параметром при старших производных и воспользуемся модификацией [17] метода Вишика — Люстерника [18]. Предельной для (4.3) служит задача (1.4), (1.5). При построении асимптотики возникают два пограничных слоя: для гладкой границы и для угловой точки. Вклад первого из них в асимптотику смещений w составляет [18] $O(l^2)$. Угловой пограничный слой определяется [17, 19] при решении задачи

$$\mu\nabla_\xi\nabla_\xi Z(\xi) + (\mu+\lambda')\nabla_\xi\nabla_\xi Z(\xi) - 4\mu\Theta(\nabla_\xi)\nabla_\xi\nabla_\xi\Omega(\xi) = 0$$

$$\Omega(\xi) = \Theta(\xi)\,Z(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}^2 \setminus N^0 \ (N^0 = \{\xi : \xi_2 = 0,\ \xi_1 \leqslant 0\})$$

$$2\mu\partial_2 Z_2(\xi) + \lambda'\nabla_\xi Z(\xi) = 0, \quad \mu(\partial_2 Z_1(\xi) + \partial_1 Z_2(\xi)) - 2\mu\nabla_\xi\nabla_\xi\Omega(\xi) =$$
$$= 0, \quad \partial_2\Omega(\xi) = 0, \quad \xi \in N^0 \quad (\partial_k = \partial/\partial\xi_k)$$

$$Z(\xi) = r_\xi^{1/2}\Phi^1(\theta_\xi) + O(r_\xi^{-1/2}), \quad \Omega(\xi) = O(r_\xi^{-1/2}) \quad (r_\xi \to 0)$$

Уточним поведение вектора Z на бесконечности:

$$Z(\xi) = r_\xi^{1/2}\Phi^1(\theta_\xi) + m r_\xi^{-1/2}\Psi^1(\theta_\xi) + o(r_\xi^{-1/2}).$$

Множитель m в последней формуле зависит от параметров Ламе λ' и μ. Срастим пограничные слои $l^{1/2}Z(-l^{-1}(1 \mp y_1), \pm l^{-1}y_2)$ с решением гладкого типа; в результате получаем, что вторым членом в решении гладкого типа служит сумма $lmK_{1+}\zeta^{1+} + lmK_{2+}\zeta^{2+}$, вполне аналогичная (3.3). Таким образом, если параметр $l = hc_1(d)/m$ (малый при $h \to 0$) является положительным (это зависит от знака $c_1(d)$), то вектор смещений w из задачи (4.3) отличается от построенного в разд. 3 асимптотического приближения $v^\circ + hv^1$ на величины $O(h^2)$ вне малых окрестностей точек $(\pm 1, 0)$. Иными словами, при специальном выборе показателя l решение плоской моментной задачи (4.3) вдали от вершин трещины содержит следующий член асимптотики решения трехмерной задачи.

3°. Другая возможность учета асимптотической поправки для трещины нормального отрыва заключается в изменении длины «плоского изображения» M трещины M^h. Положим $M_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^2\colon y_2 = 0,\ |y_1| \leqslant 1 + \varepsilon\}$, где $\mathbf{R} \ni \varepsilon$ — малый параметр, и рассмотрим задачу (1.4), (1.5) в области $G_0 \setminus M_\varepsilon$. Асимптотика решения такой задачи найдена, например, в [6] и вдали от точек $(\pm 1 \pm \varepsilon, 0)$ имеет вид $v^0 + \varepsilon z^1 + \ldots$, причем $z^1 = (4\mu)^{-1}(1+\varkappa')(K_{1+}\zeta^{1+} + K_{2+}\zeta^{2+})$. Сравнение с формулой (3.3) доставляет значение $\varepsilon_* = 4\mu h(1+\varkappa')^{-1}c_1(d)$ параметра ε, при котором решение задачи (1.4), (1.5) в $G_0 \setminus M_\varepsilon$ с точностью $O(h^2)$ совпадает вне малых окрестностей вершин трещины с решением $v^\circ + hv^1 + \ldots$ гладкого типа, входящим в представление решения задачи (1.1)—(1.3).

Подчеркнем, что здесь в отличие от задачи из 2° п. 4 не возникает ограничения на знак величины $c_1(d)$ — параметр ε может быть отрицательным. Длину $2(1+\varepsilon_*)$ будем называть (асимптотически) эффективной длиной трещины M^h.

5. Обсуждение. 1°. Обращаем внимание на то, что для тонкой пластины с трещиной приближение плосконапряженным состоянием дает погрешность $O(h)$, а не $O(h^3)$, как в случае гладкой направляющей цилиндра $G_0{}^h$. Именно трехмерный пограничный слой для концевых зон трещины не локализован в малых окрестностях и вносит возмущение $O(h)$ во все напряженно-деформированное состояние пластины. В рамках механики хрупкого разрушения такой пограничный слой может вызывать дополнительные, не учитываемые классической теорией, эффекты «порядка h». Описание влияния пограничного слоя на всю пластину в целом приходится так или иначе проводить при помощи полей смещения с особенностями в вершинах трещины M (ср.

с пп. 1°—3° разд. 4). Особенности несущественны для определения энергетического баланса, если правильно (см. п. 1° разд. 4) истолковывать функционал энергии — вершинам трещины за счет слагаемых $\zeta^{j\pm}$ предписывается дополнительный вклад в функционал.

Таким образом, применение энергетических критериев разрушения в уточняющей модели не встречает затруднений. Использование деформационных, силовых и других «локальных» критериев вроде бы невозможно без исчерпывающей информации относительно поведения напряженно-деформированного состояния вблизи конца трещины. Однако можно проследить, что постановки задач с упомянутыми критериями асимптотически эквивалентны (при малых зонах сцепления в устье трещины, при малых областях пластичности и т. п.) некоторым самосопряженным расширениям оператора задачи (1.4), (1.5), подобным (4.2). (Соответствующий асимптотический анализ проводился многими авторами, но не формулировался таким способом.) Поэтому после сравнения параметров самосопряженного расширения названные критерии также становятся пригодными, например, для объединенной задачи (п. 3° разд. 4).

2°. При изменении профиля d концевой зоны трещины M^h эффективная длина $2a_*(d) = 2\,[1 + 4\mu h\,(1+\varkappa')^{-1}\,c_1(d)]$ ее плоского изображения может увеличиваться за счет возрастания множителя $c_1(d)$, в то время как ее видимая длина $2\,[1 + hd\,(^1/_2)]$ (или $2\,[1 + h \max d\,(\eta_3)]$) остается постоянной. Можно установить, что сравнение энергий деформаций для двух задач (1.4), (1.5) в области G_0 с трещинами M_{ε^1} и M_{ε^2}, отвечающими разным профилям d^1 и d^2, дает приближение с точностью $O(h^3)$ к изменению энергии в трехмерной задаче.

Естественно следующее предположение: при квазистатическом движении трещина «выбирает» такой профиль d, что коэффициент $\mathrm{K}_1(z)$ постоянен для $z \in [-^1/_2 h, {}^1/_2 h]$ (см. разложение (3.7), где $\mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_3 = 0$ для трещины нормального отрыва). Оценки (3.8) показывают, что искомый профиль определяется с некоторой погрешностью при решении следующей задачи: требуется указать функцию d, для которой постоянной является величина $t_1(\eta_3)$ из представления (2.4) решения W^1 задачи (2.1), (2.2) в области $\Pi = \Pi^0 \setminus \{\eta\colon \eta_2 = 0,\ |\eta_3| \leqslant {}^1/_2,\ \eta_1 \leqslant \mathrm{d}(\eta_3)\}$. Простой ответ имеется только в случае $\nu = 0$, когда $\mathrm{d} = 0$ и $W^1(\eta) = r_\eta^{1/2}\Phi_*^1(\theta_\eta)$. Заметим, что условие $t_1 = \mathrm{const}$ накладывает ограничение на угол $\alpha = \operatorname{arctg} \mathrm{d}'(^1/_2) + {}^1/_2\pi$ — он должен быть таким, чтобы $\Lambda(\alpha, \nu) = {}^1/_2$ (см. пояснения к формуле (2.5)).

Гипотетически процесс квазистатического роста трещины разбивается на два этапа: сначала разрушение происходит на некоторых участках ребра (устанавливается нужная форма профиля) и лишь затем подрастание трещины сводится к параллельному переносу концевой зоны. Первый этап краткосрочен, но с ним могут быть связаны аномальные свойства старта трещины.

3°. Поскольку приращение потенциальной энергии деформации выражается через КИН, оно должно определяться поведением напряжений лишь вблизи движущегося конца трещины. На первый взгляд соотношение (3.11) противоречит этому положению — в правой части (3.11) фигурируют коэффициенты K_{j-} для неподвижной вершины трещины M. Дело в том, что величины K_{j+} и K_{j-} отвечают лишь главному члену асимптотики решения трехмерной задачи, а следующий член hv^1 строится по формуле (3.3) при учете всех сингулярностей поля $\tau(v^0)$ и слагаемые в (3.11), содержащие K_{j-}, возникают в силу учета энергии, порожденной полем $h\tau(v^1)$. С использованием равенств (3.10) можно проверить, что, если в качестве главного члена асимптотики выбрать решение v^* задачи (1.4), (1.5) в плоской области с трещиной эффективной длины $2a_*(d)$, то обсуждаемое несоответствие исчезнет: производная энергии по длине трещины станет равной $-h\,(8\mu)^{-1}\,(1+\varkappa')\,(K_{1+}{}^*)^2$, где $K_{1+}{}^*$ — КИН для напряжений $\tau(v^*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л., Колос А. В.* К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141—155.
2. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771—781.
3. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 642—650.
4. *Bueckner H. F.* A novel principle for the computation of stress intensity factors // ZAMM. 1970. V. 50. № 9. P. 529—546.
5. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29—60.

6. *Назаров С. А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124—129.
7. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
8. *Назаров С. А.* Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН Арм ССР. 1988. Т. 87. № 4. С. 156—159.
9. *Benthem J. P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Intern. J. Solids and Struct. 1977. V. 13. № 5. P. 479—492.
10. *Bazant Z. P.* Three-dimensional harmonic function near termination or intersection of gradient singularity lines: A general numerical method // Intern. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. № 3. P. 221—243.
11. *Мовчан Н. В.*, *Назаров С. А.* Асимптотика показателей сингулярностей для угловых в плане трещин // Вестн ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1990. Вып. 3. С. 34—38.
12. *Назаров С. А.*, *Пламеневский Б. А.* Задача Неймана для самосопряженных систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленингр. мат. о-ва, 1989. Т. 1. С. 174—211.
13. *Мазья В. Г.*, *Назаров С. А.*, *Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1981. 206 с.
14. *Nemat-Nasser S.*, *Sumi Y.*, *Keer L. M.* Unstable grouth of tension cracks in brittle solids: Stable and unstable bifurcations, snap-through, and imperfection sensitivity // Intern. J. Solids and Struct. 1980. V. 16. № 11. P. 1017—1033.
15. *Березин Ф. А.*, *Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1011—1014.
16. *Демков Ю. Н.*, *Островский В. Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ. 1975. 240 с.
17. *Назаров С. А.* Метод Вишика-Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками 1—2 // Сиб. мат. ж. 1981. Т. 22. № 4. С. 142—163; 1981. Т. 22. № 5. С. 132—152.
18. *Вишик М. И.*, *Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—122.
19. *Назаров С. А.*, *Семенов Б. Н.* Асимптотика решения задач механики трещин в моментной постановке // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд-во ЛГУ. 1986. Вып. 15. С. 118—135.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.VI.1990