

УДК 539.375

© 1991 г.

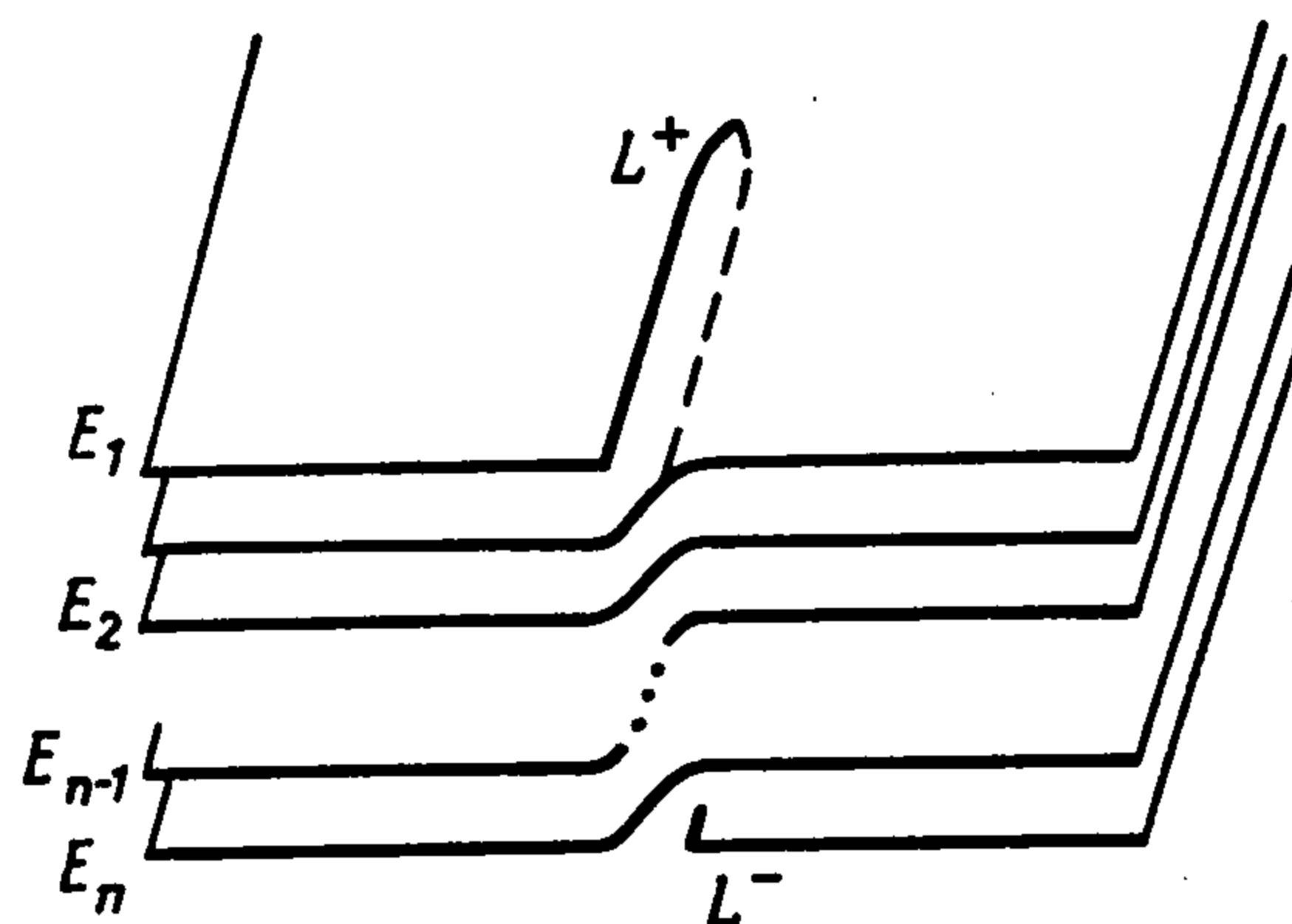
В. В. Сильвестров

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

На  $n$ -листной римановой поверхности с прямолинейными разрезами, соединяющими точки ветвления поверхности, рассматриваются основные первая, вторая и смешанная краевые задачи теории упругости. Разрезы таковы, что их берега расположены в разных плоскостях. Путем сведения к матричной краевой задаче Римана построены комплексные потенциалы, получены асимптотические представления напряжений и производных от компонент смещения вблизи вершин разрезов, вычислены инвариантные  $\Gamma$ -интегралы [1].

Первая и вторая основные задачи на римановой поверхности в случае  $n = 2$  были решены [2] методом краевой задачи Римана на римановой поверхности. При  $n = 1$  результаты совпадают с известными решениями для плоскости [3].

1. **Постановка задачи.** Пусть  $n$  одинаковых тонких однородных изотропных упругих бесконечных пластин  $E_1, E_2, \dots, E_n$  одной и той же толщины с разрезами по одним и тем же отрезкам  $l_j = [a_j, b_j]$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) действительной оси  $x$  наложены одна на другую так, что у всех пластин разрезы с одинаковыми номерами располагаются друг над другом, и нижние берега пластины  $E_k$  склеены с верхними берегами соответствующих разрезов пластины  $E_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ). При этом верхние берега разрезов пластины  $E_1$  и нижние берега разрезов пластины  $E_n$  остаются несклеенными. Обозначим их  $L^+$  и  $L^-$  соответственно. Если провести сечение, перпендикулярное пластинам  $E_k$  и пересекающее перпендикулярно один из отрезков  $l_j$ , то полученная система выглядит как фигура. Она представляет собой  $n$ -листную риманову поверхность алгебраической функции



$$w = \left( \prod_{j=1}^m \frac{z - a_j}{z - b_j} \right)^{1/n}, \quad z = x + iy \quad (1.1)$$

с краем  $L^+ \cup L^-$ . Если берега  $L^+$  и  $L^-$  мысленно склеить, т. е. отождествить, то получим замкнутую риманову поверхность  $R$  функции (1.1). На этой поверхности  $L^+$  и  $L^-$  являются берегами пространственных разрезов с концами в точках ветвления поверхности  $z = a_j$  и  $z = b_j$ .

Пусть все листы поверхности находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии, характеризуемом следующими условиями.

1. На линиях склеивания листов при переходе с одного листа на другой лист напряжения и смещения меняются непрерывно, а на несклеенных берегах  $L^+$  и  $L^-$  заданы либо нормальная и касательная напряжения  $\sigma_y^+, \tau_{xy}^+$  и  $\sigma_y^-, \tau_{xy}^-$  (первая основная задача на поверхности  $R$ ) либо

частные производные по  $x$  от компонент смещения  $(u', v')^+$  и  $(u', v')^-$  (вторая основная задача), либо на  $L^+$  заданы  $\sigma_y^+$ ,  $\tau_{xy}^+$ , а на  $L^-$  заданы  $(u', v')^-$  (основная смешанная задача). Заданные граничные значения напряжений и производных от компонент смещения будем считать  $H$ -непрерывными, причем во второй задаче

$$\int_{l_j} [(u' + iv')^+ - (u' + iv')^-] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.2)$$

так как приращение смещений вдоль верхнего берега разреза  $l_j$  по пластине  $E_1$  должно быть равно приращению смещений вдоль нижнего берега этого же разреза по пластине  $E_n$ .

2. На концах отрезков  $l_j$ , т. е. в точках ветвления поверхности, напряжения и производные от смещения могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в остальных точках отрезков они непрерывны.

3. На  $\infty$  пластины  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) напряжения распределены равномерно и здесь действуют главные напряжения  $(\sigma_1)_k$  и  $(\sigma_2)_k$  в направлениях, составляющих с действительной осью углы  $\varphi_k$  и  $\varphi_k + \pi/2$  соответственно. Вращение на  $\infty$  в пластине  $E_k$  равно  $\omega_k$ .

4. Пространственный эффект концентрации напряжений на линиях склеивания листов пренебрежимо мал.

В этих условиях напряжения  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k$  и производные по  $x$  от компонент смещения  $(u', v')_k$  в пластине  $E_k$  выражаются через две функции  $\Phi_k(z)$ ,  $\Psi_k(z)$  по формулам [3]

$$\begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)_k &= 4\operatorname{Re} \Phi_k(z) \\ (\sigma_y - i\tau_{xy})_k &= \Phi_k(z) + \Omega_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} 2\mu(u' + iv')_k &= \kappa\Phi_k(z) - \Omega_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} \\ \Omega_k(z) &= \bar{\Phi}_k(z) + z\bar{\Phi}_k'(z) + \bar{\Psi}_k(z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона, которые для всех пластин одинаковы. Функции  $\Phi_k$ ,  $\Omega_k$  аналитичны и однозначны в плоскости  $E_k$  с разрезами  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и имеют в окрестности  $\infty$  вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= \gamma_k - \frac{P_k}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \\ \Omega_k(z) &= \gamma_k' + \frac{\kappa P_k}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \\ \gamma_k &= \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)_k + \frac{2i\mu}{1 + \kappa} \omega_k, \quad \gamma_k' = \bar{\gamma}_k + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)_k \exp(2i\varphi_k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $-P_k = -(X_k + iY_k)$  — главный вектор усилий, приложенных к совокупности разрезов  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) со стороны пластины  $E_k$ . Числа  $P_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) будем считать заданными, причем в первой задаче эти числа и заданные граничные значения напряжений удовлетворяют условию равновесия поверхности  $R$ :

$$\sum_{k=1}^n P_k + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} [(\tau_{xy} + i\sigma_y)^+ - (\tau_{xy} + i\sigma_y)^-] dx = 0 \quad (1.6)$$

На концах отрезков  $l_j$  функции  $\Phi_k$ ,  $\Omega_k$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в остальных точках этих отрезков они имеют непрерывные граничные значения. Кроме того, будем считать, что во всех точках  $t \in l_j$  кроме концов

$$(z - \bar{z}) \Phi_k'(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow t^\pm \quad (1.7)$$

В рассматриваемых ниже задачах это условие выполняется в следствие  $H$ -непрерывности заданных граничных условий.

На основании (1.3), (1.7) краевые условия на берегах  $L^+$ ,  $L^-$  во всех задачах можно записать в единой форме ( $L$  — совокупность отрезков  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )):

$$\rho_1 \Phi_1^+(t) + \Omega_1^-(t) = f_1(t), \quad \rho_2 \Phi_n^-(t) + \Omega_n^+(t) = f_2(t), \quad t \in L \quad (1.8)$$

Здесь в первой задаче

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad f_1 = (\sigma_y - i\tau_{xy})^+, \quad f_2 = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-$$

Во второй задаче

$$\rho_1 = \rho_2 = -\kappa, \quad f_1 = -2\mu(u' + iv')^+, \quad f_2 = -2\mu(u' + iv')^-$$

В смешанной задаче

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = -\kappa, \quad f_1 = (\sigma_y - i\tau_{xy})^+, \quad f_2 = -2\mu(u' + iv')^-$$

Непрерывность напряжений и смещений на линиях склеивания листов описывается равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_k^-(t) + \Omega_k^+(t) &= \Phi_{k+1}^+(t) + \Omega_{k+1}^-(t) \\ \kappa \Phi_k^-(t) - \Omega_k^+(t) &= \kappa \Phi_{k+1}^+(t) - \Omega_{k+1}^-(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \dots \\ &\dots, n-1 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \Phi_k^-(t) = \Phi_{k+1}^+(t), \quad \Omega_k^+(t) = \Omega_{k+1}^-(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \dots \\ \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Тем самым для нахождения функций  $\Phi_k$ ,  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) имеем матричную краевую задачу Римана (1.8), (1.9), которую запишем в виде

$$\Phi^+(t) = A\Phi^-(t) + f(t), \quad t \in L \quad (1.10)$$

где  $\Phi(z)$  — неизвестная кусочно-голоморфная вектор-функция порядка  $2n$  с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ ;  $f(t)$  — вектор-функция порядка  $2n$  с компонентами  $f_1/\rho_1, 0, 0, \dots, 0, f_2$ ;  $A = (A_{kj})$  — матрица порядка  $2n \times 2n$ , у которой все элементы равны нулю, кроме элементов  $A_{1, n+1} = -1/\rho_1$ ,  $A_{k, k-1} = 1$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ ,  $A_{k, k+1} = 1$ ,  $k = n+1, n+2, \dots, 2n-1$ ,  $A_{2n, n} = -\rho_2$ . Функция  $\Phi(z)$  на концах линии  $L$  может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в окрестности  $\infty$  имеет в силу (1.5) вид

$$\Phi(z) = G + Hz^{-1} + O(z^{-2}) \quad (1.11)$$

где  $G$  и  $2\pi(1 + \kappa)H$  — векторы измерения  $2n$  с компонентами  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma_n'$  и  $-P_1, -P_2, \dots, -P_n, \kappa P_1, \kappa P_2, \dots, \kappa P_n$  соответственно,  $O(z^{-2})$  — вектор-функция, каждая компонента которого при больших  $z$  сравнима с  $z^{-2}$ .

**2. Решение задачи.** Обозначим:  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n$ ) — собственные числа матрицы  $A$ , а  $S$  — матрица, столбцы которой — собственные векторы матрицы  $A$ . Непосредственно находим, что в случае первой и второй задач

$$\lambda_k = \exp[i\pi(k-1)/n], \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.1)$$

в случае смешанной задачи

$$\lambda_k = \kappa^{1/2n} \exp[i\pi(2k-1)/(2n)]$$

а в качестве  $S = (S_{kj})$  можно взять матрицу с элементами

$$S_{kj} = \lambda_j^{1-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad S_{kj} = -\rho_1 \lambda_j^{k-n}, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n \quad (2.2)$$

Тогда [4] матрица  $S^{-1}AS$  диагональна с диагональными элементами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ . Разыскивая  $\Phi(z)$  в виде  $\Phi(z) = SF(z)$ , где  $F(z)$  — новая неизвестная вектор-функция с компонентами  $F_1, F_2, \dots, F_{2n}$  из (1.10) получим

$$F_k^+(t) = \lambda_k F_k^-(t) + g_k(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.3)$$

где  $g_k$  — компоненты вектор-функции  $S^{-1}f(t)$ . На концах линии  $L$  функции  $F_k$  могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а в окрестности  $\infty$  справедливо в силу (1.11) представление

$$F(z) = (F_k) = S^{-1}\Phi = S^{-1}G + S^{-1}Hz^{-1} + O(z^{-2}) \quad (2.4)$$

Согласно [5], решениями задач (2.3) будут функции

$$F_k(z) = X_k(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t-z} + \sum_{j=0}^m c_{kj} z^j \right) \quad (2.5)$$

$$X_k(z) = \prod_{j=1}^m \left( \frac{z-b_j}{z-a_j} \right)^{\alpha_k - i\beta} \frac{1}{z-b_j}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

где в первой и второй задачах  $\alpha_k = (k-1)/(2n)$ ,  $\beta = 0$ , в смешанной задаче  $\alpha_k = (2k-1)/(4n)$ ,  $\beta = (\ln \kappa)/(4\pi n)$ , а под  $X_k(z)$  понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по линии  $L$  и такая, что  $z^m X_k(z) \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ . При этом в первой и второй задачах из-за того, что  $\lambda_1 = 1$ , следует положить

$$X_1(z) = 1, \quad c_{11} = c_{12} = \dots = c_{1m} = 0 \quad (2.6)$$

В первой и второй задачах из (2.4), (2.5) при учете равенств (2.6) находим, что вектор с компонентами  $c_{10}, c_{2m}, c_{3m}, \dots, c_{2n,m}$  равен  $S^{-1}G$ , а вектор с компонентами

$$-\left( \int_L g_1(t) dt \right) / (2\pi i), \quad c_{k,m-1} + q_k c_{km}, \quad k = 2, 3, \dots, 2n$$

$$(q_k = (\alpha_k - i\beta)(a_1 + a_2 + \dots + a_m) + (1 - \alpha_k + i\beta)(b_1 + b_2 + \dots + b_m))$$

равен  $S^{-1}H$ . То, что величина  $-\left( \int_L g_1 dt \right) / (2\pi i)$  равна первой компоненте вектора  $S^{-1}H$  следует в первой задаче из условия (1.6), а во второй задаче — из условий (1.2). В смешанной задаче из (2.4), (2.5) находим

$$(c_{km})_{k=1,2,\dots,2n} = S^{-1}G, \quad (c_{k,m-1} + q_k c_{km})_{k=1,2,\dots,2n} = S^{-1}H$$

где  $q_k$  находятся по тем же формулам, что и в случае первой и второй задач.

Следовательно, если число разрезов  $m = 1$ , то все постоянные  $c_{kj}$  будут определены. Если  $m > 1$ , то для определения остальных постоянных  $c_{kj}$  в первой задаче надо потребовать, чтобы приращение смещений вдоль замкнутой кривой, составленной из берегов разреза  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) в каждой пластине  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) было равно нулю и приращение смещения вдоль отрезка  $[b_j, a_{j+1}]$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ) по пластине  $E_1$  было равно приращению смещений вдоль этого же отрез-

ка по пластине  $E_k$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ). Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (nS_{k\nu} + S_{k+n, \nu}) \int_{l_j} [F_{\nu}^{+}(t) - F_{\nu}^{-}(t)] dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

$$j = 1, 2, \dots, m - 1$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} [\kappa(S_{1\nu} - S_{k\nu}) + S_{k+n, \nu} - S_{n+1, \nu}] \int_{b_j}^{a_{j+1}} F_{\nu}(t) dt = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (2.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, m - 1$$

Подставив в эти равенства вместо  $F_k$  их значения, получим для определения оставшихся  $(2n - 1)(m - 1)$  постоянных  $c_{kj}$  ( $k = 2, 3, \dots, 2n$ ;  $j = 0, 1, \dots, m - 2$ ) систему  $(2n - 1)(m - 1)$  линейных алгебраических уравнений, однозначная разрешимость которой доказывается известным методом [3].

Во второй задаче одна из групп условий (2.7), например при  $k = 1$ , является следствием остальных условий и условий (1.2), поэтому вместо них надо задать дополнительно еще  $m - 1$  условий. Они получаются, если известны разности смещений точек  $b_j$  и  $a_{j+1}$ . Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (\kappa S_{1\nu} - S_{n+1, \nu}) \int_{b_j}^{a_{j+1}} F_{\nu}(t) dt =$$

$$= 2\mu [u(a_{j+1}) + iv(a_{j+1}) - u(b_j) - iv(b_j)], \quad j = 1, 2, \dots, m - 1 \quad (2.9)$$

Вместо разности смещений точек  $b_j$  и  $a_{j+1}$  можно задать также главный вектор внешних усилий, действующих на берег  $l_j^{+}$  в пластине  $E_1$  или на берег  $l_j^{-}$  в пластине  $E_n$  или на совокупность берегов  $l_j^{+}$  в  $E_1$  и  $l_j^{-}$  в  $E_n$ . Тогда при каждом  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m - 1$ ) должно выполняться одно из следующих условий:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \int_{l_j} [S_{1\nu} F_{\nu}^{+}(t) + S_{n+1, \nu} F_{\nu}^{-}(t)] dt = iQ_{j1} \quad (2.10)$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \int_{l_j} [S_{n\nu} F_{\nu}^{-}(t) + S_{2n, \nu} F_{\nu}^{+}(t)] dt = -iQ_{jn} \quad (2.11)$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \int_{l_j} [(S_{1\nu} - S_{2n, \nu}) F_{\nu}^{+}(t) + (S_{n+1, \nu} - S_{n\nu}) F_{\nu}^{-}(t)] dt = iQ_j \quad (2.12)$$

где  $Q_{j1}$ ,  $Q_{jn}$  и  $Q_j = Q_{j1} + Q_{jn}$  — главные векторы внешних усилий, действующих соответственно на берег  $l_j^{+}$  в пластине  $E_1$ , на берег  $l_j^{-}$  в пластине  $E_n$  и на совокупность берегов  $l_j^{+}$  в  $E_1$  и  $l_j^{-}$  в  $E_n$ . Условия (2.7), где  $k = 2, 3, \dots, n$ , (2.8) и одно из условий (2.9)–(2.12) при каждом  $j$  образуют однозначно разрешимую систему  $(2n - 1)(m - 1)$  уравнений для определения оставшихся  $(2n - 1)(m - 1)$  неизвестных  $c_{kj}$ .

В смешанной задаче для определения  $2n(m - 1)$  постоянных  $c_{kj}$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n$ ;  $j = 0, 1, \dots, m - 2$ ) надо брать условия (2.7), (2.8) и при каждом  $j$  одно из условий (2.9)–(2.12).

**3. Поведение напряжений и смещений вблизи концов разрезов. Инвариантные  $\Gamma$ -интегралы.** В случае первой и второй задач функции  $F_k(z)$  вблизи точки  $z = b_j$  имеют вид [5]

$$F_1(z) = O(\ln |z - b_j|) \quad (3.1)$$

$$F_k(z) = D_{kj}(z - b_j)^{\alpha_k - 1 - i\beta}, \quad k = 2, 3, \dots, 2n \quad (3.2)$$

$$D_{kj} = \eta_{kj}(b_j) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_k(t)}{X_k^+(t)} \frac{dt}{t-b_j} + \sum_{v=0}^m c_{kv} b_j^v \right) \quad (3.3)$$

$$\eta_{kj}(z) = X_k(z) (z - b_j)^{1-\alpha_k+i\beta}$$

где  $\alpha_k = (k-1)/(2n)$ ,  $\beta = 0$ , функции  $X_k$ ,  $g_k$  и числа  $c_{kv}$  определены в разд. 2, а под  $(z - b_j)^{\alpha_k-1-i\beta}$  понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по лучу  $(-\infty, b_j]$  действительной оси, принимаемая при  $z - b_j = 1$  значение 1. Интеграл в (3.3) существует как несобственный.

В смешанной задаче все функции  $F_k$ , в том числе и  $F_1$ , имеют вид (3.2), где  $\alpha_k = (2k-1)/(4n)$ ,  $\beta = (\ln \kappa)/(4\pi n)$ .

Так как вектор-функция  $\Phi(z)$  с компонентами  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ ,  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  равен  $SF(z)$ , то из (1.3), (3.1), (3.2) в случае первой и второй задач получим следующие асимптотические представления напряжений и производных от смещений вблизи точки  $z = b_j$  в пластине  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$(\sigma_x + \sigma_y)_k = 4 \operatorname{Re} \left( \sum_{v=2}^{2n} S_{kv} D_{vj} \omega_{vj}(z) \right) + O(\ln r) \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_y - i\tau_{xy})_k \\ 2\mu(u' + iv')_k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \kappa \end{array} \right\} \left( \sum_{v=2}^{2n} S_{kv} D_{vj} \omega_{vj}(z) \right) + \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right\} \left( \sum_{v=2}^{2n} [S_{k+n,v} D_{vj} \omega_{vj}(\bar{z}) + (\alpha_k + i\beta) \bar{S}_{kv} \bar{D}_{vj} (1 - (z - b_j)/\overline{(z - b_j)}) \overline{\omega_{vj}(z)}] \right) + O(\ln r)$$

$$r = |z - b_j|, \quad \omega_{vj}(z) = (z - b_j)^{\alpha_k-1-i\beta}, \quad \alpha_k = (k-1)/(2n), \quad \beta = 0$$

Постоянные  $S_{kj}$  и  $D_{vj}$  даются формулами (2.1), (2.2) и (3.3) соответственно. В смешанной задаче в этих представлениях надо брать все суммы по  $v$  от 1 до  $2n$  и положить  $\alpha_k = (2k-1)/(4n)$ ,  $\beta = (\ln \kappa)/(4\pi n)$ . Чтобы получить представления вблизи точки  $z = a_j$  в пластине  $E_k$ , надо в формулах (3.1)–(3.4) заменить  $b_j$  на  $a_j$  и  $\alpha_k - 1 - i\beta$  на  $i\beta - \alpha_k$ .

При  $n = 1$  из (3.4) получаются известные представления напряжений и производных от смещений вблизи вершин трещин и жестких остроугольных включений [6], если в (3.4) обозначить постоянную  $2\sqrt{2}\rho_1 D_{2j}$  через  $k_1 - ik_2$  ( $k_1, k_2$  — коэффициенты интенсивности напряжений).

В случае первой и второй задач вычислим инвариантный  $\Gamma$ -интеграл первого рода [1] вдоль кривой, составленной из  $n$  одинаковых окружностей  $\Lambda$  малого радиуса  $r$  ( $r \ll 1$ ) с центрами в точке  $z = b_j$ , расположенных в пластинах  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Согласно формуле (2.7), из [7] при учете соотношения (1.4) имеем

$$\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2 = \frac{i(\kappa+1)}{2\mu} \sum_{k=1}^n \left( \int_{\Lambda} \Omega_k(\bar{z}) \overline{\Phi_k(z)} d\bar{z} - \operatorname{Re} \int_{\Lambda} \Phi_k^2(z) dz \right)$$

Так как

$$\Phi_k = \sum_{v=1}^{2n} S_{kv} F_v, \quad \Omega_k = \sum_{v=1}^{2n} S_{k+n,v} F_v$$

то на основании (3.1), (3.2) переходя в интегралах к полярным координатам при помощи равенств  $z - b_j = re^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , находим

$$\Gamma_1 = -\frac{\pi n(\kappa+1)\rho_1}{\mu} \operatorname{Re} \left( \sum_{v=2}^{2n} e^{i\pi(v-1)/n} D_{vj} \bar{D}_{2n+2-v,j} \right) \quad (3.5)$$

где в первой задаче  $\rho_1 = 1$ , во второй задаче  $\rho_1 = -\kappa$ , а  $D_{\nu j}$  определяются формулами (3.3). Компонента  $\Gamma_2$  имеет вид

$$\Gamma_2 = \xi_0 + \xi_1 r^{-1/(2n)} + \xi_2 r^{-2/(2n)} + \dots + \xi_{2n-2} r^{-(2n-2)/(2n)}$$

где  $\xi_k$  — некоторые постоянные, вообще говоря, ненулевые.

При  $n = 1$ , обозначив  $2\sqrt{2\mu\rho_1}D_{2j}$  через  $k_1 - ik_2$ , получим из (3.5) известную формулу [1]:

$$\Gamma_1 = \operatorname{Re} \Gamma = (\kappa + 1)(k_1^2 + k_2^2)/(8\mu\rho_1)$$

где в первой задаче  $\rho_1 = 1$ , а во второй задаче  $\rho_1 = -\kappa$ .

Автор благодарит Д. Д. Ивлева за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 399—412.
2. Сильвестров В. В. Первая и вторая основные задачи теории упругости на двулистной римановой поверхности // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1986. С. 111—119.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: Наука, 1974. 323 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стацук Н. Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
7. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию  
31.X.1990