Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3 : 534.1

А. П. Чугайнова

СТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ ПРОСТЫЕ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБОАНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

При тех же предположениях, что и в работах [1—6], где изучены одномерные нестационарные простые и ударные волны в предварительно деформированной нелинейно-упругой среде, исследуются двумерные стационарные простые и ударные волны в слабоанизотропной нелинейно-упругой среде.

Известный анализ стационарных простых и ударных волн [7—9] в рамках магнитной гидродинамики в газе с вмороженным в него магнитным полем по существу соответствует специальному случаю анизотропной упругой среды. Были приведены [9, 10] численные решения частных плоских автомодельных краевых задач об отражении ударных волн от границы изотропного нелинейно-упругого полупространства.

1. Уравнения, описывающие поведение двумерных стационарных простых волн. Нелинейно-упругая слабоанизотропная среда задается упругим потенциалом [1]

$$\Phi = \rho_0 U(\varepsilon_{ij}, p_l^{(k)} \ldots, \ldots, S), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta_j} + \frac{\partial w_j}{\partial \eta_i} + \frac{\partial w_k}{\partial \eta_i}\frac{\partial w_k}{\partial \eta_j}\right)$$

Здесь U — внутренняя энергия среды, S — энтропия единицы массы, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций Грина, ρ_0 — плотность в ненапряженном состоянии, $p_{l\ldots}^{(k)}$ — тензоры, задающие отличие среды от изотропной, w_i — вектор перемещения, η_i — лагранжевы координаты, в ненапряженном состоянии — декартовы прямоугольные; выше и всюду далее $i, j, k = 1, 2, 3$.

Система трех уравнений движения в лагранжевых декартовых переменных имеет вид [2]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \eta_j}\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial w_i/\partial \eta_j)} \tag{1.1}$$

и является гиперболической.

Введем подвижную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, в которой движение среды будем считать установившимся

$$\xi_1 = \eta_1 - |\mathbf{W}|\, t\sin\alpha, \quad \xi_2 = \eta_2 - |\mathbf{W}|\, t\cos\alpha, \quad \xi_3 = \eta_3$$

где $\mathbf{W}$ — заданный вектор, достаточно большой по модулю. Угол α определяет направление вектора $\mathbf{W}$ относительно осей η_1, η_2, η_3.

Введем обозначения

$$\partial w_i/\partial \xi_1 = l_i, \quad \partial w_i/\partial \xi_2 = m_i, \quad \partial w_i/\partial \xi_3 = a_i$$

Будем считать, что величины l_i, m_i, a_i — функции двух переменных ξ_1 и ξ_2. Следовательно, из равенств

$$\partial a_i/\partial \xi_1 = \partial l_i/\partial \xi_3 = 0, \quad \partial a_i/\partial \xi_2 = \partial m_i/\partial \xi_3 = 0$$

видно, что величины a_i не изменяются ($a_i = \text{const}$) и могут входить в описание анизотропных свойств среды как параметры.

При учете принятых обозначений уравнения стационарных движений в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 запишем в виде

$$\rho_0 W^2\left(\sin^2\alpha\frac{\partial l_i}{\partial\xi_1}+\cos^2\alpha\frac{\partial m_i}{\partial\xi_2}+2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial m_i}{\partial\xi_1}\right)=$$
$$=r_{ik}\frac{\partial l_k}{\partial\xi_1}+d_{ik}\frac{\partial m_k}{\partial\xi_1}+d_{ik}^T\frac{\partial l_k}{\partial\xi_2}+s_{ik}\frac{\partial m_k}{\partial\xi_2} \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial l_k}{\partial\xi_2}=\frac{\partial m_k}{\partial\xi_1},\quad r_{ik}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial l_i\partial l_k},\quad d_{ik}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial l_i\partial m_k},\quad s_{ik}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial m_i\partial m_k}$$

(d_{ik}^T — транспонированная матрица d_{ik}). Величины r_{ik}, d_{ik}, s_{ik}, d_{ik}^T вычисляются по заданному упругому потенциалу Φ. Для слабоанизотропной упругой среды потенциал Φ представим в виде двух слагаемых $\Phi=\Phi_0+\Phi_1$ [1]. Первое слагаемое задает изотропную нелинейно-упругую среду без начальных деформаций. Малый второй член описывает отклонение внутренней энергии материала от изотропной. Этот член должен быть функцией от сверток тензора деформаций с тензорами анизотропии. Разложим Φ_0 и Φ_1 в ряды по l_i и m_i

$$\Phi_0={}^1/_2\lambda I_1^2+\mu I_2+\beta I_1I_2+\gamma I_3+\nu I_1+\xi I_2^2+\ldots$$
$$\ldots+\rho_0T_0(S-S_0)$$
$$I_1=\varepsilon_{ii},\ I_2=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij},\ I_3=\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ki} \tag{1.3}$$
$$\Phi_1=B_1l_1^2+B_2l_2^2+B_3l_3^2+B_4l_1l_2+B_5l_1l_3+B_6l_2l_3+B_7m_1^2+$$
$$+B_8m_2^2+B_9m_3^2+B_{10}m_1m_2+B_{11}m_1m_3+B_{12}m_2m_3$$

Здесь λ, μ, β, γ, ν, ξ — упругие модули среды, B_i — константы, связанные с анизотропией материала. Предполагается, что B_i имеют порядок δ ($\delta\ll 1$ — параметр анизотропии).

Для системы уравнений (1.2) будем разыскивать решение типа двумерной стационарной простой волны, т. е. такое, что $l_i=l_i(\theta(\xi_1,\xi_2))$, $m_i=m_i(\theta(\xi_1,\xi_2))$, $a_i=\mathrm{const}$ (θ — некоторая функция своих аргументов), а энтропия S — постоянна ($\partial S/\partial\xi_i=0$). Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для l_i и m_i (δ_{ik} — символ Кронекера)

$$(C_1^2\delta_{ik}-b_{ik})dl_k/d\theta=0,\ dm_k/d\theta=-\Psi dl_k/d\theta \tag{1.4}$$
$$(\Psi=-(\partial\theta/\partial\xi_2)/(\partial\theta/\partial\xi_1)=-(d\xi_1/d\xi_2)_\theta$$
$$C_1^2=C-2\rho_0W^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Psi+\rho_0W^2\cos^2\alpha\,\Psi^2$$
$$C=\rho_0W^2\sin^2\alpha,\ b_{ik}=r_{ik}-(d_{ik}+d_{ik}^T)\Psi+s_{ik}\Psi^2)$$

Зафиксируем величину α специальным выбором осей η_1, η_2, η_3 таким образом, что в соответствующих осях ξ_1, ξ_2, ξ_3 на первой характеристике выполняется равенство $\Psi=0$. Такой выбор осей возможен, если определитель системы (1.4), рассматриваемый как многочлен относительно Ψ, имеет хотя бы один действительный корень.

Если упругая среда линейна, то коэффициенты системы уравнений (1.4) постоянны и, следовательно, равенство $\Psi=0$ выполняется на всех характеристиках системы уравнений (1.2). Тогда, во-первых, из второго уравнения (1.4) видно, что величины m_i не изменяются в волне. Во-вторых, так как $\partial\theta/\partial\xi_2=0$, то величины l_i зависят только от одной переменной ξ_1, следовательно, известно направление распространения волны (известна нормаль к характеристикам — ось ξ_1). Система шести уравнений (1.4) сводится к системе трех уравнений для l_i

$$(C^2\delta_{ik}-r_{ik})dl_k/d\theta=0$$

Условие равенства нулю определителя этой системы представляет собой кубическое уравнение относительно величины C^2 и при заданном W служит для нахождения угла α.

Заметим, что ограничения на величину α возникли как следствие наложенного ранее требования $\Psi = 0$. Величина C — характеристическая скорость относительно среды в том случае, если нормаль к характеристике направлена вдоль оси ξ_1. Так как $r_{ik} = \text{const}$, то $C = \text{const}$.

Если среда линейна и изотропна, то матрица $\| r_{ik} \|$ имеет вид: $r_{11} = \lambda + 2\mu$, $r_{22} = r_{33} = \mu$, $r_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для поперечных волн $\alpha = \arcsin \sqrt{\mu/\rho_0 W^2}$ для продольных волн $\alpha = \arcsin \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0 W^{2'}}$.

Если упругая среда слабоанизотропна и слабонелинейна, то величина Ψ $(l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3)$ мала, квадрат характеристической скорости относительно среды $C_1{}^2$ изменяется. Волна не имеет единого фиксированного направления распространения (нормаль к характеристике переменна), но вследствие малой нелинейности можно считать, что основное изменение параметров в простой волне происходит в направлении оси ξ_1, т. е. в волне существенно изменяются величины l_i, а величины m_i изменяются мало (ниже это будет показано).

2. Двумерные стационарные простые квазипоперечные волны. Квазипоперечными будем называть такие волны, в которых отношение изменений продольной (l_1) и поперечной (l_2, l_3) компонент — величина малая, порядка начальной деформации сдвига [3].

Пусть деформации l_i, которые возникают в среде при прохождении волн, малы и их порядок не превосходит ε. Тогда $\Psi = O(\varepsilon^2)$, поскольку изменение характеристической скорости относительно среды $\Delta C^2 = C_1{}^2 - C_1$ порядка ε^2 [2, 3], а величина Ψ связана с изменением характеристической скорости. Из второго уравнения (1.4) видно, что порядок изменения величин m_i есть ε^3. Введем параметр малости $\chi = \max\{\varepsilon^2, \delta\}$, где ($\delta \ll 1$ — параметр анизотропии) [4] и в системе уравнений (1.4) будем учитывать члены, порядок которых не превосходит $\varepsilon\chi$. Тогда в системе уравнений (1.4) три уравнения для l_i могут быть решены независимо. Величины m_i наряду с a_i могут описывать анизотропные свойства среды.

Для нахождения переменной величины Ψ получим уравнение

$$| C_1{}^2\delta_{ik} - b_{ik} | = 0 \tag{2.1}$$

Для квазипоперечных волн можно исключить продольную компоненту l_1, выразив ее приближенно через компоненты l_2 и l_3, аналогично тому, как это сделано в [4].

Покажем это, пусть

$$b_{ik} = b_{ik}{}^\circ + g_{ik}$$

$$g_{ik} = \frac{\partial^2 P}{\partial l_i \partial l_k} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial l_i \partial m_k} + \frac{\partial^2 P}{\partial m_i \partial l_k}\right)\Psi + \frac{\partial^2 P}{\partial m_i \partial m_k}\Psi^2$$

$$P = \Phi - {}^1\!/_2 (\lambda + 2\mu)\, l_1{}^2 - {}^1\!/_2 \mu\, (l_2{}^2 + l_3{}^2)$$

где $b_{ik}{}^\circ$ — матрица, соответствующая линейной изотропной среде. Из (1.4) при $i = 1$ получим

$$C_1{}^2 \partial l_1/\partial\theta = b_{1k}\partial l_k/\partial\theta \tag{2.2}$$

Для квазипоперечных волн можно приближенно считать, что $C_1{}^2 = \mu + O(\chi)$ поскольку, во-первых, величина Ψ мала, во-вторых, для поперечных волн $C^2 = \mu$. Тогда из (2.2) имеем

$$\mu \frac{\partial l_1}{\partial \theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial l_1}{\partial \theta} + g_{12} \frac{\partial l_2}{\partial \theta} + g_{13} \frac{\partial l_3}{\partial \theta}$$

$$l_1 = -\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial P}{\partial l_1} + l_1^\circ, \quad l_1^\circ = \text{const}$$

где индекс $^\circ$ относится к состоянию перед волной. Используя полученное равенство, уравнения движения (1.4) можно записать следующим образом:

$$C_1^2 \frac{\partial l_\beta}{\partial \theta} = (\mu \delta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma}) \frac{\partial l_\gamma}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial Q}{\partial l_\beta}, \quad \beta, \gamma = 2, 3 \tag{2.3}$$

$$h_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma} - \frac{1}{\lambda + \mu} \overset{\circ}{g}_{1\beta} \overset{\circ}{g}_{1\gamma} = \frac{\partial F}{\partial l_\beta \partial l_\gamma}$$

$$Q = \frac{\mu (l_2^2 + l_3^2)}{2} + F(l_2, l_3), \quad F = P^\circ - \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \left(\frac{\partial P}{\partial l_1} \right)^\circ$$

Полученная система уравнений содержит два уравнения для l_2 и l_3. Для среды с анизотропией (1.3) двумерный потенциал можно представить в виде [1]

$$F(l_2, l_3) = \tfrac{1}{2}(f + g)\, l_2^2 + \tfrac{1}{2}(f - g)\, l_3^2 - \tfrac{1}{8}\varkappa_1 (l_2^2 + l_3^2)^2 + s_1 l_2 l_3$$

$$\left(f = \mu + B_2 + B_3 - \frac{B_4^2 + B_5^2}{2(\lambda + \mu)}, \quad g = B_2 - B_3 + \frac{B_5^2 - B_4^2}{2(\lambda + \mu)}, \right.$$

$$\left. s_1 = B_6 - \frac{B_5 B_4}{\lambda + \mu} \right)$$

Изменение состояния в волне можно демонстрировать на плоскости $l_2 l_3$, поэтому поворотом осей координат в этой плоскости можно избавиться от члена $s_1 l_2 l_3$ в выражении для упругого потенциала F [1].

Таким образом, потенциал F примет вид

$$F = \tfrac{1}{2}(f + g^*)\, l_2^{*2} + \tfrac{1}{2}(f - g^*)\, l_3^{*2} - \tfrac{1}{8}\varkappa_1 (l_2^{*2} + l_3^{*2})^2$$

где $g^* = (g^2 + s_1^2)^{1/2}, \quad l_2^* = -l_3 \sin\varphi + l_2 \cos\varphi$

$$l_3^* = l_3 \cos\varphi + l_2 \sin\varphi, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = -s_1 g$$

Ниже звездочку будем опускать.

Постоянные f, g, $\varkappa_1$ имеют следующий физический смысл: малая величина g — параметр анизотропии, f — характеристическая скорость при отсутствии нелинейности и анизотропии, $\varkappa_1$ — упругая константа, характеризующая нелинейные свойства среды в квазипоперечных волнах.

Для упрощенной системы уравнений (2.3) условие (2.1) записывается следующим образом:

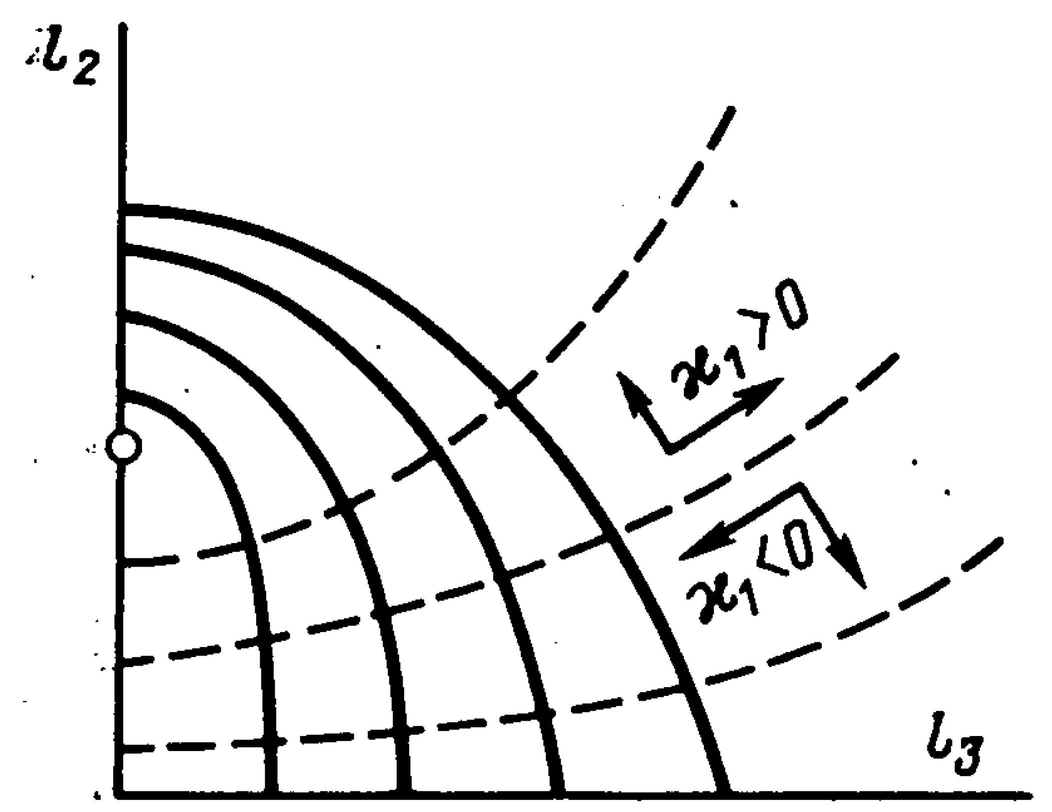
$$\begin{Vmatrix} h_{22} - C_1^2 & h_{23} \\ h_{23} & h_{33} - C_1^2 \end{Vmatrix} = 0; \quad h_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 F}{\partial l_\beta \partial l_\gamma}, \quad \beta, \gamma = 2, 3$$

Решив квадратное уравнение для Ψ, получим

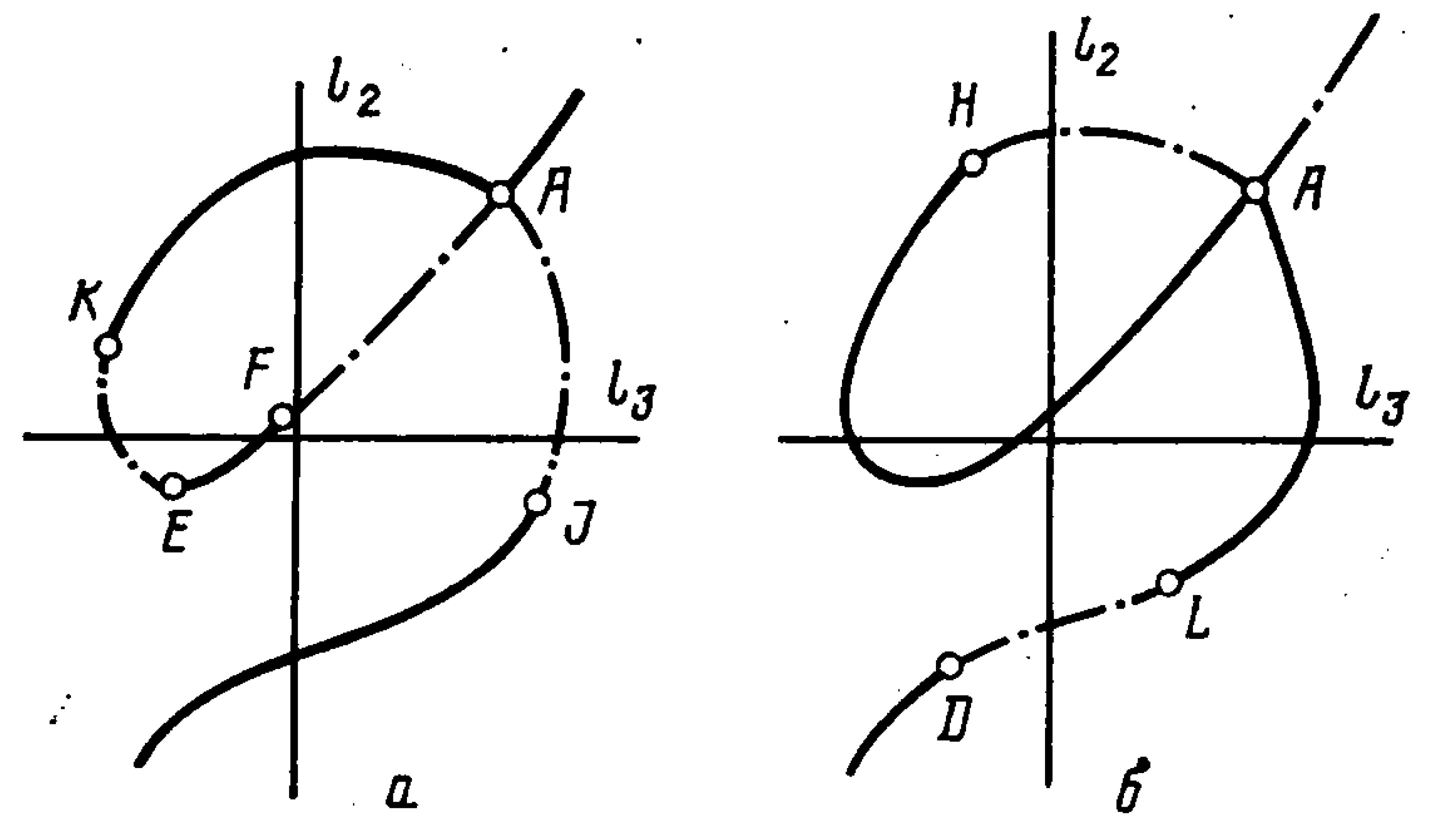
$$\Psi_{1,2} = A^{-2} (C^2 - f + \varkappa_1 (l_2^2 + l_3^2 \pm \tfrac{1}{2} ((l_3^2 - l_2^2 + 2g\varkappa_1^{-1})^2 + \\ + 4 l_2^2 l_3^2)^{1/2})) \tag{2.4}$$

Как видно из выражений (2.4), Ψ_1 и Ψ_2 отличаются между собой на величину порядка χ. Нумерацию Ψ_i примем такую, что $\Psi_1 > \Psi_2$ и соответственно будем различать быстрые квазипоперечные волны (Ψ_1) и медленные квазипоперечные волны (Ψ_2).

Дифференциальные уравнения для нахождения интегральных кривых квазипоперечных стационарных простых волн получаются из системы



Фиг. 1



Фиг. 2

уравнений (2.2) с использованием (2.4)

$$\frac{dl_2}{dl_3} = \frac{l_2^2 - l_3^2 - 2g\varkappa_1^{-1} \mp ((l_2^2 - l_3^2 - 2g\varkappa_1^{-1})^2 + 4l_2^2 l_3^2)^{1/2}}{2l_2 l_3} \tag{2.5}$$

Уравнения (2.5) совпадают с дифференциальными уравнениями квазипоперечных нестационарных одномерных простых волн [3]. Поэтому интегральные кривые квазипоперечных стационарных двумерных простых волн совпадают с интегральными кривыми квазипоперечных нестационарных одномерных простых волн, исследованных в [3]. Уравнения (2.5) представляют на плоскости $l_2 l_3$ два взаимно ортогональных семейства интегральных кривых для быстрой и медленной квазипоперечных волн.

Они изображены на фиг. 1. Кривые имеют две особые точки $l_3 = 0$, $l_2 = \pm\sqrt{2g\varkappa_1^{-1}}$ на оси l_2. Оба семейства симметричны относительно осей координат. Величина g оказывает существенное влияние на форму интегральных кривых. При удалении от начала координат $(l_2^2 + l_3^2 \gg \gg 2g\varkappa_1^{-1})$ интегральные линии одного семейства приближаются к окружностям с центром в начале координат, другого — к лучам. Если $g = 0$, то все линии становятся окружностями и лучами. В соответствии с (2.4) для сред с $\varkappa_1 > 0$ овалы представляют интегральные кривые быстрых волн, линии, концами уходящие в бесконечность,— медленных простых волн. Для материалов с $\varkappa_1 < 0$ — наоборот.

Если начальная деформация порядка ε, то интегральные кривые представляют собой два ортогональных семейства кривых, параллельных осям l_2 и l_3. Такая картина интегральных кривых имеет место в линейном анизотропном случае [1, 3].

Если прямолинейные характеристики волны выходят из одной точки $(\xi_1°, \xi_2°)$, то волна называется центрированной. Центрированные течения автомодельны: в них все параметры среды зависят лишь от отношения ξ_1/ξ_2 при соответствующем выборе начала координат. Критерии существования непрерывного автомодельного решения в виде квазипоперечной стационарной простой волны (существование $\Psi < 0$) совпадают с критериями неопрокидывания одномерных нестационарных простых волн, полученных в [3].

При $\varkappa_1 > 0$ непрерывное автомодельное решение существует в виде быстрых волн, в которых $|l_3|$ убывает, и медленных волн, в которых $|l_3|$ растет фиг. 1. При $\varkappa_1 < 0$ непрерывное решение существует в виде быстрых и медленных волн, в которых $|l_3|$ убывает (фиг. 1).

3. Квазипоперечные ударные волны. Для любой динамической величины a скачок ее на разрыве будем обозначать $[a] = a^+ - a^-$, где a^+ и a^- — значения величины a за и перед разрывом.

Условия на разрыве записываются аналогично [2, 5] и выражают сохранение импульса и энергии

$$\rho_0 W^2 \sin^2\alpha_1 [l_k] = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_k}\right]$$
$$[\Phi] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial l_k}\right][l_k] + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_k}\right)^{+}[l_k] \tag{3.1}$$

Следует отметить, что ранее [2, 5, 6] направление распространения разрыва было известным (известна нормаль к разрыву) и динамические условия записывались в системе координат, связанной с плоскостью разрыва. Изучение разрывов в данной работе осложняется тем, что разрыв не имеет фиксированного направления распространения (нормаль к разрыву неизвестна). Угол α_1 — угол между направлением вектора и плоскостью разрыва можно представить в виде суммы $\alpha_1 = \alpha + \Psi$. Величину α можно определить по линейному приближению. Величина Ψ изменяется и имеет порядок ε^2. Величины l_1°, l_2°, l_3°, m_1°, m_2°, m_3°, определяющие начальное состояние среды и заданные в системе координат, связанной с углом α, при переходе в систему координат, связанную с углом α_1, изменяются на величины, порядок которых ε^2.

Условия на разрыве можно записать в явном виде. Для этого разложим функцию Φ по степеням $[l_k]$ и $[S]$ так, что

$$\Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_k}\right)[l_k] + \rho_0 T_0 [S] + \Phi_1([l_k])$$

Функция Φ_1 представляет собой разложение Φ по степеням $[l_k]$, начиная со второй и выше, с коэффициентами, зависящими от состояния перед скачком. Функция Φ_1 выбрана таким образом, что $[\partial\Phi/\partial l_k] = \partial\Phi_1/\partial\,[l_k]$. Тогда условия на разрыве (3.1) записываются через функцию Φ_1 следующим образом [5, 6]:

$$(\rho_0 W^2 \sin^2\alpha - 2\rho_0 W^2 \sin\alpha\cos\alpha\Psi)[l_k] = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\,[l_k]} \tag{3.2}$$

$$\rho_0 T_0 [S] = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\,[l_k]}[l_k] - \Phi_1 \tag{3.3}$$

Функция Φ_1 не содержит энтропию, следовательно, уравнения (3.2) связывают между собой величины $[l_1]$, $[l_2]$, $[l_3]$, Ψ. Если исключить Ψ, получим уравнение ударной поляры. В пространстве градиентов перемещения l_1, l_2, l_3 ударная поляра представляет собой множество состояний l_1, l_2, l_3, в которые можно попасть скачком из начального состояния L_1, L_2, L_3, соблюдая законы сохранения.

Условие (3.3) служит для вычисления энтропии в скачке, и, следовательно, на его правую часть накладывается требование быть неотрицательной.

Квазипоперечными называем такие волны, в которых $[l_1] \ll \max([l_2], [l_3])$. Из условий на скачках (3.2) и (3.3) (для квазипоперечных волн они связывают между собой величины $[l_2]$, $[l_3]$, Ψ) находим

$$\Psi = A^{-2}\Big(C^2 - f + {}^1/{}_2\varkappa_1\Big\{l_2^2 + l_3^2 - R^2 + L_2 l_2 + L_3 l_3 +$$
$$+ 2\,\frac{g\varkappa_1^{-1}(l_3 - L_3)^2 - g\varkappa_1^{-1}(l_2 - L_2)^2 + 2\,[(l_2 - L_2)L_2 + (l_3 - L_3)L_3]^2}{(l_2 - L_2)^2 + (l_3 - L_3)^2}\Big\}\Big)$$
$$R^2 = L_2^2 + L_3^2$$

и уравнение ударной поляры

$$(l_2^2 + l_3^2 - R^2)(L_3 l_2 - L_2 l_3) + 2g\varkappa_1^{-1}(l_2 - L_2)(l_3 - L_3) = 0$$

совпадающее с уравнением ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн [5, 6]. Условия эволюционности и неубывания энтропии аналогичны соответствующим условиям, полученным в [5, 6].

Ударная поляра изображена на фиг. 2, где участки ударной поляры, удовлетворяющие условиям неубывания энтропии и эволюционности, отмечены на фиг. 2, *а* для сред с $\varkappa_1 > 0$, на фиг. 2, *б* — для сред с $\varkappa_1 < 0$ штрихпунктирными линиями.

Автор благодарит А. Г. Куликовского, Е. И. Свешникову и А. А. Бармина за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110—115.
2. *Бленд Д. Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
3. *Свешникова Е. И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642—646.
4. *Куликовский А. Г.* Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597—604.
5. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 523—534.
6. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831—840.
7. *Пушкарь Е. А.* О косых магнитогидродинамических ударных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 106—116.
8. *Пушкарь Е. А.* Обобщение поляры плоскополяризованных стационарных автомодельных течений в магнтной гидродинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. Вып. 3. С. 111—119.
9. *Бармин А. А., Пушкарь Е. А.* Стационарное магнитогидродинамическое обтекание непроводящего клина // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 2. С. 88—97.
10. *Буренин А. А., Лапыгин В. В., Чернышов А. Д.* К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости // Нелинейные волны деформации. Материалы симпоз. Таллинн; Ин-т Кибернетики АН ЭССР, 1978. Т. 2. С. 25—28.

Москва

Поступила в редакцию
14.V.1990