Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3 : 534.1

Ю. Д. Каплунов

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ МАЛОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ В ОБОЛОЧКАХ, ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

Методом асимптотического интегрирования получены двумерные уравнения, описывающие в окрестности частот среза (запирания) медленно меняющуюся составляющую напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкой упругой оболочки, погруженной в безграничную сжимаемую жидкость. Установлен характер влияния жидкости на высокочастотные длинноволновые колебания оболочки различных типов. На примере круговой цилиндрической оболочки обсуждены некоторые приложения полученных уравнений к задачам гидроакустики.

Метод асимптотического интегрирования применялся ранее к выводу двумерных уравнений, описывающих высокочастотные НДС малой изменяемости в упругом слое, лежащем на акустическом полупространстве [1, 2] и в «сухой» (без контакта с жидкостью) оболочке [3]. Исследованию высокочастотных НДС малой изменяемости в сухих пластине и оболочке на основе вариационного подхода посвящены статьи [4, 5].

1. Основные соотношения задачи. Рассмотрим замкнутую выпуклую тонкую упругую оболочку, погруженную в безграничную сжимаемую жидкость и совершающую гармонические колебания по закону $e^{-i\omega t}$. Радиус-вектор точек трехмерного пространства представим в виде суммы

$$\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3\mathbf{n} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ — радиус-вектор точек срединной поверхности оболочки, $\mathbf{n}$ — единичный вектор ее нормали, α_3 — расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности. Будем считать, что срединная поверхность отнесена к линиям кривизны, и следовательно, векторное равенство (1.1) определяет триортогональную систему координат.

Выпишем основные соотношения задачи, введя обозначения: σ_{mn}, v_k $(m, n, k = 1, 2, 3)$ — напряжения и перемещения упругой среды, образующей оболочку, φ — потенциал перемещений жидкости, $Q_k^{\pm}$ $(k = 1, 2, 3)$ — приложенные к лицевым поверхностям оболочки нагрузки, $2h$ — толщина оболочки, R_1, R_2, R — соответственно главные и характерный радиусы кривизны ее срединной поверхности, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, c_1, c_2 — скорости распространения волн сдвига и растяжения — сжатия в материале оболочки, c_0 — скорость звука в жидкости, ρ_0, ρ — соответственно плотности жидкости и материала оболочки.

Динамические уравнения теории упругости в области $-h \leqslant \alpha_3 \leqslant h$, занятой оболочкой, запишем в виде

$$H_i^{-1}\sigma_{ii,\,i} + H_j^{-1}\sigma_{ij,\,j} + \sigma_{i3,\,3} + (H_iH_j)^{-1}H_{j,\,i}(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) +$$
$$+ 2(H_iH_j)^{-1}H_{i,\,j}\sigma_{ij} + (2H_i^{-1}H_{i,\,3} + H_j^{-1}H_{j,\,3})\sigma_{i3} + \rho\omega^2 v_i = 0$$
$$H_i^{-1}\sigma_{3i,\,i} + H_j^{-1}\sigma_{3j,\,j} + \sigma_{33,\,3} - H_i^{-1}H_{i,\,3}\sigma_{ii} - H_j^{-1}H_{j,\,3}\sigma_{jj} +$$
$$+ (H_iH_j)^{-1}[(H_iH_j)_{,3}\sigma_{33} + H_{j,\,i}\sigma_{3i} + H_{i,\,j}\sigma_{3j}] + \rho\omega^2 v_3 = 0$$
$$\sigma_{ii} = 2E_*[\beta_1(v_{3,3} + H_j^{-1}v_{j,\,j} + H_i^{-1}H_j^{-1}H_{j,\,i}v_i + H_j^{-1}H_{j,\,3}v_3) +$$
$$+ (1 + \beta_1)H_i^{-1}(v_{i,\,i} + H_{i,\,3}v_3 + H_j^{-1}H_{i,\,j}v_j)]$$

$$\sigma_{33} = 2E_* [\beta_1 (H_i^{-1}v_{i,i} + H_j^{-1}v_{j,j} + H_i^{-1}H_j^{-1}H_{j,i}v_i + H_i^{-1}H_j^{-1}H_{i,j}v_j + $$
$$+ H_i^{-1}H_{i,3}v_3 + H_j^{-1}H_{j,3}v_3) + (1+\beta_1)v_{3,3}]$$
$$\sigma_{i3} = E_* (H_i^{-1}v_{3,i} + v_{i,3} - H_i^{-1}H_{i,3}v_i)$$
$$\sigma_{ij} = E_* [H_j^{-1}v_{i,j} + H_i^{-1}v_{j,i} - (H_iH_j)^{-1}(H_{i,j}v_i + H_{j,i}v_j)] \qquad (1.2)$$
$$H_i = A_i (1 + \alpha_3/R_i), \; i, j = 1, 2; \; i \neq j; \; \beta_1 = \nu/(1-2\nu)$$
$$E_* = {}^1/_2 E/(1+\nu), \; f_{,k} = \partial f/\partial\alpha_k, \; k = 1, 2, 3$$

Здесь A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности.

Колебания жидкости во внешней к оболочке области $\alpha_3 \geqslant h$ описываются уравнением Гельмгольца

$$\Delta_3\varphi + (\omega^2/c_0^2)\varphi = 0 \qquad (1.3)$$

где Δ_3 — трехмерный оператор Лапласа.

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид

$$\sigma_{3i} (\alpha_1, \alpha_2, \pm h) = Q_i^{\pm} \; (i = 1, 2), \quad \sigma_{33} (\alpha_1, \alpha_2, -h) = Q_3^-$$
$$\sigma_{33} (\alpha_1, \alpha_2, h) = Q_3^+ - \rho_0\omega^2\varphi (\alpha_1, \alpha_2, h), \; v_3 (\alpha_1, \alpha_2, h) = \partial\varphi/\partial\alpha_3 |_{\alpha_3=h} \qquad (1.4)$$

На потенциал φ должно быть наложено условие излучения

$$\partial\varphi/\partial |\mathbf{P}| - i (\omega/c_0)\varphi = o (|\mathbf{P}|^{-1}) \text{ при } |\mathbf{P}| \to \infty \qquad (1.5)$$

Будем полагать, что относительные полутолщина оболочки $\eta = h/R$ и импеданс жидкости $\varepsilon = c_0\rho_0/(c_2\rho)$ — малые параметры. Связь между ними установим в виде

$$\varepsilon = \eta^t\varepsilon_0 \; (t > 0, \; \varepsilon_0 \sim \eta^0) \qquad (1.6)$$

Остановимся на изучении частотного диапазона, в котором

$$\omega R/c_2 = \eta^{-1}\mu \; (\mu \sim \eta^0) \qquad (1.7)$$

Произведем в (1.2) растяжение масштабов независимых переменных по формулам

$$\alpha_i = R\eta^q\xi_i, \quad \alpha_3 = R\eta\zeta \qquad (1.8)$$

Здесь q — показатель изменяемости искомого НДС по переменным α_i ($i = 1, 2$); считается, что дифференцирование по переменным ξ_i, ζ не меняет порядка исходных величин.

Рассмотрим НДС оболочки с показателем изменяемости $q < 1$, которые в диапазоне (1.7) и будем называть высокочастотными НДС малой изменяемости (ВЧ НДС МИ). Ниже будет показано, что ВЧ НДС МИ реализуются в узких окрестностях частот среза, и существует два типа таких НДС. НДС первого типа соответствуют квазипоперечные колебания оболочки, при которых $v_3 \gg v_i$ ($i = 1, 2$), а НДС второго типа — квазитангенциальные колебания, при которых, наоборот, $v_i \gg v_3$. В связи с этим можно ожидать, что влияние жидкости на колебания оболочки зависит от типа рассматриваемого НДС.

Прежде чем непосредственно перейти к изучению ВЧ НДС МИ попытаемся, опираясь на предположения (1.6)—(1.8), выразить потенциал φ в силовом граничном условии на поверхности контакта через параметры НДС оболочки.

2. Асимптотическое представление давления жидкости на оболочку. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца (1.3) в области $\alpha_3 \geqslant h$ с граничным условием

$$\varphi (\alpha_1, \alpha_2, h) = \psi (\alpha_1, \alpha_2) \qquad (2.1)$$

и условием излучения (1.5) на бесконечности. В (2.1) $\psi(\alpha_1, \alpha_2)$ — заданная функция, для которой $R\partial\psi/\partial\alpha_i \sim \eta^{-q}\psi$ ($i = 1, 2$; $q < 1$).

Получим асимптотическое представление решения сформулированной задачи в тонком пристеночном слое жидкости шириной $\gamma = \alpha_3/h - 1 \sim \eta^0$. Потенциал перемещений зададим в виде

$$\varphi = \exp(ic\mu\gamma)[\varphi_0(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma\eta\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2) + O(\eta^{2-2q})], \quad c = c_2/c_0 \quad (2.2)$$

Подстановка представления (2.2) в (1.3) и (2.1) дает

$$\varphi_0 = \psi, \quad \varphi_1 = -{}^1/_2 R\psi(1/R_1 + 1/R_2) \quad (2.3)$$

Полученный результат позволяет выразить в третьем граничном условии (1.4) давление жидкости на оболочку через нормальное перемещение лицевой поверхности последней. Действительно, подставляя представление (2.2) при учете сооношений (2.3) в условие непротекания (последнее условие из (1.4)), имеем

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, h) = -\frac{ihv_3(\alpha_1, \alpha_2, h)}{c\mu}\left[1 - \frac{i\eta}{2c\mu}\left(\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2}\right) + O(\eta^{2-2q})\right] \quad (2.4)$$

Слагаемое в квадратных скобках с множителем η отражает влияние кривизны оболочки. Его учет, как выяснится в дальнейшем, в некоторых случаях при $q < {}^1/_2$ может оказаться существенным. Присутствием указанного слагаемого представление (2.4) отличается от часто используемого в гидроакустике приближения, получаемого на основе поршневой теории[1].

3. Двумерные уравнения ВЧ НДС МИ первого типа. ВЧ НДС МИ, реализующиеся в окрестности частот среза $\Lambda = \pi m/(2\beta)$ ($\beta = c_2/c_1 = [(1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)]^{1/2}$, $m \in \mathrm{N}$, $m \sim \eta^0$), будем называть ВЧ НДС МИ первого типа. Частоты Λ являются собственными для колебаний растяжения — сжатия поперечного волокна сухой оболочки. Их окрестности определим асимптотическим соотношением

$$\mu - \Lambda \sim \eta^b \quad (b > 0) \quad (3.1)$$

где b — показатель отклонения.

Изучим свойства обсуждаемых НДС для случая свободных колебаний ($Q_k^\pm = 0$ ($k = 1, 2, 3$)). Зададим их асимптотику в виде

$$v_3 = hu_3, \quad \sigma_{kk} = E_* s_{kk}; \quad v_i = h\eta^{1-q}u_i, \quad \sigma_{i3} = E^*\eta^{1-q}s_{i3}, \quad \sigma_{ij} = E_*\eta^{2-2q}s_{ij} \quad (3.2)$$

Здесь и ниже считается, что безразмерные величины u_k, s_{kk}, s_{i3}, s_{ij} ($i, j = 1, 2$; $i \neq j$; $k = 1, 2, 3$) имеют одинаковый асимптотический порядок. Существование в окрестностях (3.1) частот среза Λ НДС, обладающих асимптотикой (3.2), будет доказано последующими рассуждениями.

Получим приближенные двумерные (не зависящие от поперечной координаты ζ) уравнения, описывающие ВЧ НДС МИ первого типа в оболочке, погруженной в жидкость. Произведем сначала упрощение уравнений (1.2) и граничных условий (1.4) (при учете (2.4)) путем разделения искомого НДС на симметричную и антисимметричную относительно срединной поверхности оболочки составляющие. В соответствии с этим перемещения оболочки можно представить в виде суммы

$$u_k = u_k^0 + \eta^s u_k^1, \quad s = \min(1, t) \quad (3.3)$$

[1] *Гольденвейзер А. Л., Радовинский А. Л.* Асимптотический анализ колебаний и излучение оболочки в жидкости: Препринт № 275. М., АН СССР. Ин-т проблем механики. 1986. 62 с.

Величины с индексом нуль относятся к асимптотически главной симметричной (антисимметричной) составляющей НДС, а величины с индексом единица — к асимптотически второстепенной антисимметричной (симметричной) составляющей. При этом полагается, что u_k^0, u_k^1 имеют одинаковый асимптотический порядок. Возможность представления (3.3) обусловлена структурой соотношений (1.2), (1.4), (1.6), (2.4) и также будет обоснована ниже.

Подставим теперь в (1.2), (1.4) формулы (1.6)—(1.8), (2.4), (3.2), (3.3). Выразим там напряжения через перемещения и отбросим члены, которыми в первом приближении можно пренебречь при построении итоговых двумерных уравнений. Используя четность (нечетность) величин u_k^0, u_k^1 по ζ, после серии преобразований приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\partial^2 \mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta^2 + \mu^2 \mathbf{u}_\tau^0 + (1-2\nu)^{-1} \operatorname{grad} \partial u_3^0/\partial\zeta + O(\eta^r) = 0 \\
\partial^2 u_3^0/\partial\zeta^2 + \mu^2\beta^2 u_3^0 + \eta^{2-2q}\beta^2 [(1-2\nu)^{-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau^0 + \Delta u_3^0] - \\
- \eta^2 \varkappa_2 (u_3^0 + \zeta \partial u_3^0/\partial\zeta) + \eta^{1+s}\varkappa_1 \partial u_3^1/\partial\zeta + O(\eta^{3-2q+s}) = 0 \qquad (3.4) \\
\partial^2 u_3^1/\partial\zeta^2 + \mu^2\beta^2 u_3^1 + \eta^{1-s}\varkappa_1 \partial u_3^0/\partial\zeta + O(\eta^{2-2q}) = 0 \\
r = \min(2-2q,\ 1+t),\quad \mathbf{u}_\tau = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 \\
\varkappa_j = R^j (1/R_1^j + 1/R_2^j), \quad j = 1, 2
\end{gathered}$$

с граничными условиями при $\zeta = 1$

$$\begin{gathered}
\partial \mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta + \operatorname{grad} u_3^0 + O(\eta^{1+s}) = 0 \\
(1+\beta_1)\, \partial u_3^0/\partial\zeta + \beta_1 (\eta^{2-2q} \operatorname{div} \mathbf{u}_\tau^0 - \eta^2\varkappa_2 u_3^0 + \eta^{1+s}\varkappa_1 u_3^1) - \\
- \eta^{1+t} [\varepsilon_0 \varkappa_1/(8c)]\, u_3^0 - {}^1/_4 i\eta^t \varepsilon_0 \mu (u_3^0 + \eta^s u_3^1) + O(\eta^{r+t} + \eta^{3-2q+s}) = 0 \qquad (3.5) \\
(1+\beta_1)\, \partial u_3^1/\partial\zeta - {}^1/_4 i\eta^{t-s} \varepsilon_0 \mu (u_3^0 + \eta^s u_3^1) + \eta^{1-s}\varkappa_1 u_3^0 [\beta_1 - \eta^t \varepsilon_0/(8c)] + \\
+ O(\eta^r) = 0
\end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ — единичные орты ортогональной системы координат, выбранной на срединной поверхности. Все входящие в (3.4), (3.5) дифференциальные операторы действуют на срединной поверхности оболочки.

Остановимся на случае, когда НДС, определяемое u_k^0, антисимметрично по ζ. При этом в (3.1) $m = 2n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда из второго уравнения (3.4) вытекает представление

$$u_3^0 = w(\xi_1, \xi_2) \cos \beta\mu\zeta + \eta^r u_{3r}^0 (\xi_1, \xi_2, \zeta) \qquad (3.6)$$

где $w(\xi_1, \xi_2)$, $u_{3r}^0 (\xi_1, \xi_2, \zeta)$ — неизвестные пока функции. Подставляя выражение (3.6) в (3.4) и в первое и третье граничные условия (3.5), с погрешностью $O(\eta^r + \eta^b)$ получаем

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_\tau^0 = \frac{\operatorname{grad} w}{\Lambda} \left(\frac{\sin \beta\Lambda\zeta}{\beta} - \frac{2\cos\beta\Lambda \sin\Lambda\zeta}{\cos\Lambda} \right) \\
u_3^1 = 2\beta w \left\{ \eta^{1-s}\varkappa_1 \left[\frac{1}{2\Lambda}(1-\beta_1)\sin\beta\Lambda\zeta - \frac{1}{4\beta}\zeta\cos\beta\Lambda\zeta + \right.\right. \\
\left.\left. + \frac{1}{8}\eta^t \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\Lambda c} - i \right) \sin\beta\Lambda\zeta \right] + \frac{1}{4} i\eta^{t-s}\varepsilon_0 \sin\beta\Lambda\zeta \right\} \\
u_{3r}^0 = \eta^{2-2q-r} A_{2-2q-r} + \eta^{1+t-r} A_{1+t-r} \qquad (3.7) \\
A_{2-2q-r} = -\frac{\Delta w}{\Lambda} \left(\frac{\zeta \sin\beta\Lambda\zeta}{2\beta} + \frac{2\cos\beta\Lambda \cos\Lambda\zeta}{\Lambda \cos\Lambda} \right) - \eta^{2q} w \times \\
\times \left\{ \left[\varkappa_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta_1}{1+\beta_1} \right) - \frac{1}{2}\varkappa_2 \right] \frac{\zeta\sin\beta\Lambda\zeta}{\beta\Lambda} - \frac{1}{4}\zeta^2 \left(\frac{1}{2}\varkappa_1^2 + \varkappa_2 \right) \cos\beta\Lambda\zeta \right\} \\
A_{1+t-r} = \frac{1}{4}\varkappa_1 \varepsilon_0 \beta w \zeta \sin\beta\Lambda\zeta \left[i + \frac{1}{2}\varkappa_1 \eta \left(\frac{1}{\Lambda c} - i \right) \right]
\end{gathered}$$

Исходя из формул (3.7), можно убедиться, что все входящие в соотношения (3.2), (3.3) величины имеют одинаковый асимптотический порядок. При $t > 1$ они с дополнительной погрешностью $O(\eta^{t-1})$ переходят в соответствующие формулы для сухой оболочки [3].

Подставим соотношения (3.7) во второе граничное условие (3.5). После приведения подобных слагаемых и отбрасывания асимптотически второстепенных величин получим

$$\eta^{2-2q}T^*\Delta w + [\eta^2 T_R^* + {}^1/_2 i\eta^t\varepsilon_0 + {}^1/_4\eta^{1+t}\varepsilon_0\varkappa_1((\Lambda c)^{-1} - i) + \\ + (\mu - \Lambda)]w + O[\eta^{4-4q} + (\eta^r + \eta^b)(\eta^t + \eta^b)] = 0 \qquad (3.8)$$

$$T^* = \frac{1}{2\Lambda\beta^2} - \frac{4\,\mathrm{tg}\,\Lambda}{\Lambda^2}, \quad T_R^* = -\frac{1}{2\Lambda}\left[\varkappa_2(3 - \beta_1) + \frac{1}{2}\varkappa_1^2(1 + \beta_1)\right]$$

Для обеспечения правомерности преобразований, выполняемых при выводе двумерного уравнения (3.8), должно выполняться условие $T^* \sim \eta^0$. В случае его нарушения требуется дополнительное рассмотрение [2]. Заметим также, что наряду с членом $O(\eta^t)$ в (3.8) сохранен и член $O(\eta^{1+t})$. При этом очевидно, что мнимая часть члена $O(\eta^{1+t})$ в первом приближении всегда может быть отброшена по сравнению с чисто мнимым членом $O(\eta^t)$. Учет же действительной части члена $O(\eta^{1+t})$ в некоторых задачах может оказаться существенным. Иллюстрирующий это пример приводится в разд. 5.

Перейдем в уравнении (3.8) к исходным размерным координатам α_i на срединной поверхности оболочки и введем обозначение $v_3^a(\alpha_1, \alpha_2) = hw(\alpha_1, \alpha_2)$. Опуская O-член, запишем

$$T\Delta v_3^a + \left[T_R + \frac{1}{2}i\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon h\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{\Lambda c} - i\right) + \left(\frac{\omega h}{c_2} - \Lambda\right)\right]v_3^a = 0$$

$$T = h^2T^*, \quad T_R = -\frac{2h^2}{\Lambda}\left[\left(1 - \frac{1}{16\beta^2}\right)\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{1}{8\beta^2R_1R_2}\right] \qquad (3.9)$$

Если $\varepsilon = 0$, то (3.9) переходит в уравнение, описывающее ВЧ НДС МИ в сухой оболочке [3]. Случай, когда перемещения u_k^0 определяют симметричное относительно срединной поверхности оболочки НДС, разбирается полностью аналогично. При этом уравнение (3.9) сохраняет силу с точностью до замены tg на —ctg в выражении для коэффициента T и n на $n - {}^1/_2$ в выражении для Λ. При вынужденных колебаниях в правой части уравнения (3.9) появится член, отражающий воздействие усилий, приложенных к лицевым поверхностям оболочки. Он совпадает с соответствующим членом для сухой оболочки и имеет вид

$$P_3 = \pm\frac{2(-1)^{n+1}h}{\Lambda}\left[F_3 + \frac{h\Phi_3}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{h\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}_\tau}{\Lambda}\begin{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\Lambda \\ -\mathrm{ctg}\,\Lambda\end{Bmatrix}\right] \qquad (3.10)$$

$$F_3 = {}^1/_4(Q_3^+ \mp Q_3^-)/E_*, \quad \Phi_3 = {}^1/_4(Q_3^+ \pm Q_3^-)/E_*$$

$$F_j = {}^1/_2(Q_j^+ \pm Q_j^-)/E_*, \; j = 1, 2, \; \mathbf{F}_\tau = F_1\mathbf{i}_1 + F_2\mathbf{i}_2$$

Верхние (нижние) знаки и верхние (нижние) выражения в фигурных скобках в (3.10) соответствуют случаю, когда асимптотически главная составляющая НДС оболочки антисимметрична (симметрична) относительно срединной поверхности.

4. Двумерные уравнения ВЧ НДС МИ второго типа. ВЧ НДС МИ второго типа реализуются в окрестностях (3.1) частот среза $\Lambda = \pi m/2$ ($m \in \mathbf{N}$, $m \sim \eta^0$), являющихся собственными частотами сдвиговых колебаний поперечного волокна оболочки. Асимптотика этих НДС имеет вид

$$v_i = hu_i, \; v_3 = h\eta^{1-q}u_3$$

$$\sigma_{i3} = E_*s_{i3}; \; \sigma_{kk} = E_*\eta^{1-q}s_{kk}, \; \sigma_{ij} = E_*\eta^{1-q}s_{ij} \qquad (4.1)$$

Разбиение перемещений оболочки на симметричную и антисимметричную относительно срединной поверхности составляющие в этом случае задается соотношениями

$$u_i = u_i^0 + \eta^{s_1} u_i^1, \quad u_3 = u_3^0 + \eta^s u_3^1, \quad s_1 = \min(1, 2 - 2q + t) \qquad (4.2)$$

Подставляя соотношения (1.6)—(1.8), (2.4), (4.1), (4.2) в (1.2), (1.4), после аналогичных выполненным в разд. 3 преобразований получаем систему уравнений вида

$$\begin{gathered}
\partial^2 u_3^0/\partial\zeta^2 + \mu^2\beta^2 u_3^0 + (2-2\nu)^{-1} \operatorname{div} \partial\mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta + O(\eta^{2-2q}) = 0 \\
\partial^2\mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta^2 + \mu^2\mathbf{u}_\tau^0 + \eta^{2-2q}[(1-2\nu)^{-1}\operatorname{grad}(\partial u_3^0/\partial\zeta + \operatorname{div}\mathbf{u}_\tau^0) + \Delta\mathbf{u}_\tau^0] - \\
- \eta^2(\varkappa_1 L_1\mathbf{u}_\tau^0 + \varkappa_2\zeta\partial\mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta) + \eta^{1+s_1}\varkappa_1\partial\mathbf{u}_\tau^1/\partial\zeta + O(\eta^{3-2q+s}) = 0 \qquad (4.3) \\
\partial^2\mathbf{u}_\tau^1/\partial\zeta^2 + \mu^2\mathbf{u}_\tau^1 + \eta^{1-s_1}\varkappa_1\partial\mathbf{u}_\tau^1/\partial\zeta + O(\eta^{2-2q+s-s_1}) = 0 \\
L_j\mathbf{u}_\tau = R^j(R_1^{-j}u_1\mathbf{i}_1 + R_2^{-j}u_2\mathbf{i}_2), \; j = 1, 2
\end{gathered}$$

с граничными условиями при $\zeta = 1$

$$\begin{gathered}
(1+\beta_1)\partial u_3^0/\partial\zeta + \beta_1 \operatorname{div}\mathbf{u}_\tau^0 - {}^1/_4 i\eta^t\varepsilon_0\mu u_3^0 + O(\eta^{2s}) = 0 \\
\partial\mathbf{u}_\tau^0/\partial\zeta + \eta^{2-2q}\operatorname{grad} u_3^0 + \eta^2 L_2\mathbf{u}_\tau^0 - \eta^{1+s_1}L_1\mathbf{u}_\tau^1 + O(\eta^{3-2q+s}) = 0 \qquad (4.4) \\
\partial\mathbf{u}_\tau^1/\partial\zeta - \eta^{1-s_1}L_1\mathbf{u}_\tau^0 + O(\eta^{2-2q+s-s_1}) = 0
\end{gathered}$$

Разберем случай, когда НДС, определяемое u_k^0 $(k = 1, 2, 3)$, антисимметрично по ζ. При этом выражение для частот среза принимает вид: $\Lambda = {}^1/_2\pi\,(n - {}^1/_2)$ $(n \in \mathrm{N},\ n \sim \eta^0)$. Из второго уравнения (4.3) следует, что

$$\mathbf{u}_\tau^0 = \boldsymbol{\psi}(\xi_1, \xi_2)\sin\mu\zeta + \eta^{2-2q}\mathbf{u}_{\tau r}^0(\xi_1, \xi_2, \zeta) \qquad (4.5)$$

где $\boldsymbol{\psi}(\xi_1, \xi_2)$, $\mathbf{u}_{\tau r}^0(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ — пока неизвестные векторы.

Подставляя выражение (4.5) в (4.3) и в первое и третье граничные условия (4.4), получаем

$$\begin{gathered}
u_3^0 = \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}}{\Lambda}\left[\cos\Lambda\zeta - \frac{\beta\cos\beta\Lambda\zeta}{\sin\beta\Lambda}(2\sin\Lambda - i\eta^t\varepsilon_0\beta\operatorname{ctg}\beta\Lambda)\right] + \\
+ O(\eta^{2-2q} + \eta^{2s} + \eta^b) \qquad (4.6) \\
\mathbf{u}_\tau^1 = -\eta^{1-s_1}\boldsymbol{\psi}\,[(L_1 + {}^1/_2\varkappa_1)\Lambda^{-1}\cos\Lambda\zeta + {}^1/_2\varkappa_1\zeta\sin\Lambda\zeta] + \\
+ O(\eta^{2-2q+s-s_1} + \eta^b) \\
\mathbf{u}_{\tau r}^0 = \frac{\Delta\boldsymbol{\psi}\zeta\cos\Lambda\zeta}{2\Lambda} - \frac{\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}\sin\beta\Lambda\zeta}{\Lambda^2\sin\beta\Lambda}(2\sin\Lambda - i\eta^t\varepsilon_0\beta\operatorname{ctg}\beta\Lambda) + \\
+ \frac{1}{4}\boldsymbol{\psi}\zeta\left(\frac{1}{2}\varkappa_1^2 + \varkappa_2\right)\left(\frac{\cos\Lambda\zeta}{\Lambda} + \zeta\sin\Lambda\zeta\right) + O(\eta^{2-2q} + \eta^{2s} + \eta^b)
\end{gathered}$$

Подставляя соотношения (4.6) во второе граничное условие (4.4) и отбрасывая асимптотически второстепенные величины, приходим к двумерной системе уравнений относительно $\boldsymbol{\psi}$

$$\begin{gathered}
\eta^{2-2q}[{}^1/_2\Lambda^{-1}\Delta\boldsymbol{\psi} + (B^* + i\eta^t\varepsilon_0 B_0^*)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi}] + [\eta^2 B_R^* + (\mu - \\
- \Lambda)]\boldsymbol{\psi} + O(\eta^{4-4q} + \eta^{2b} + \eta^{2-2q+2t}) = 0 \qquad (4.7) \\
B^* = \frac{4\beta\operatorname{ctg}\beta\Lambda}{\Lambda^2}, \quad B_0^* = -2\left(\frac{\beta\operatorname{ctg}\beta\Lambda}{\Lambda}\right)^2 \\
B_R^* = -\Lambda^{-1}[{}^1/_4({}^1/_2\varkappa_1^2 + \varkappa_2) + {}^1/_2\varkappa_1 L_1 + L_2]
\end{gathered}$$

Возвратимся в системе уравнений (4.7) к исходным координатам и введем обозначение $\mathbf{v}_\tau^a(\alpha_1, \alpha_2) = h\boldsymbol{\psi}(\alpha_1, \alpha_2)$. Опуская O-член, получим

$$\frac{h^2}{2\Lambda}\Delta\mathbf{v}_\tau^a + (B + i\varepsilon B_0)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}_\tau^a + \left[B_R + \left(\frac{\omega h}{c_2} - \Lambda\right)\right]\mathbf{v}_\tau^a = 0 \qquad (4.8)$$

$$B = h^2 B^*, \quad B_0 = h^2 B_0^*, \quad B_R\mathbf{v}_\tau^a = -\frac{h^2}{\Lambda}\left\{\left[\frac{3}{8}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{1}{4R_1R_2}\right]\mathbf{v}_\tau^a + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{v_1^a}{R_1}\mathbf{i}_1 + \frac{v_2^a}{R_2}\mathbf{i}_2\right) + \frac{v_1^a}{R_1^2}\mathbf{i}_1 + \frac{v_2^a}{R_2^2}\mathbf{i}_2\right\}$$

Все замечания, высказанные относительно уравнения (3.9), относятся и к (4.8). Двумерная система уравнений для случая, когда перемещения $u_k{}^0$ задают симметричное относительно срединной поверхности НДС, получается из (4.8) заменой ctg $\beta\Lambda$ на $-$tg $\beta\Lambda$ в выражениях для B и B_0 и $n - {}^1/_2$ на n в выражении для Λ. При вынужденных колебаниях в правую часть (4.8) должен быть внесен вектор

$$\mathbf{P}_\tau = \pm\frac{(-1)^n h}{\Lambda}\left[\mathbf{F}_\tau + \frac{h\mathbf{\Phi}_\tau}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{4h\beta\,\mathrm{grad}\,F_3}{\Lambda}\left\{\begin{matrix}\mathrm{ctg}\,\beta\Lambda\\ -\mathrm{tg}\,\beta\Lambda\end{matrix}\right\}\right],$$
$$\Phi_j = {}^1/_2(Q_j{}^+ \mp Q_j{}^-)/E_*, \quad j=1,2, \quad \mathbf{\Phi}_\tau = \Phi_1\mathbf{i}_1 + \Phi_2\mathbf{i}_2 \tag{4.9}$$

Смысл остальных величин, входящих в формулы (4.9), правила выбора знаков и выражений в фигурных скобках такие же, как и для (3.10). Выражение для вектора внешних усилий (4.9) совпадает с соответствующим выражением для сухой оболочки.

5. Случай круговой цилиндрической оболочки. Обсудим некоторые качественные особенности ВЧ НДС МИ на примере круговой цилиндрической оболочки, когда $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, а уравнения (3.9), (4.8) имеют постоянные коэффициенты. Остановимся подробней на НДС первого типа. Будем разыскивать частные решения (3.9) в виде

$$v_3{}^a = \exp\left[iR^{-1}(l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2)\right] \tag{5.1}$$

где l_1, l_2 — числа, характеризующие изменяемость НДС вдоль координатных линий срединной поверхности.

Подставляя (5.1) в уравнение (3.9), получим

$$\eta^2 T^*(l_1{}^2 + l_2{}^2) = \frac{2}{\Lambda}\eta^2\left(\frac{1}{16\beta^2} - 1\right) + \frac{1}{2}i\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon\eta\left(\frac{1}{\Lambda c} - i\right) + \left(\frac{\omega h}{c_2} - \Lambda\right) \tag{5.2}$$

Положим $l_i \sim \eta^{-q}$, где q_i ($i = 1, 2$) — соответственно показатели изменяемости в направлении продольной оси цилиндра и по окружности.

Рассмотрим сначала случай, когда требуется определить l_1 по заданным частоте колебаний ω и параметру l_2, характеризующему закон распределения решения по окружности. Такая постановка соответствует, например, задаче о вынужденных колебаниях погруженной в жидкость цилиндрической оболочки под действием сосредоточенной по α_1 кольцевой нагрузки с l_2 волнами по окружности [6]. Учитывая соотношения (1.6), (3.1), на основании (5.2) получаем

$$q_1 = \max(q_2,\ 1 - {}^1/_2 b,\ 1 - {}^1/_2 t) \tag{5.3}$$

Из (5.3) вытекает несколько важных следствий. Во-первых, с погрешностью, не большей, чем $O(\eta)$, можно пренебречь третьим слагаемым в правой части (5.2), т. е. в этом случае правомерно использовать поршневую теорию для учета влияния жидкости. Во-вторых, если выполняется хотя бы одно из трех неравенств $q_2 > 0$, $b < 2$, $t < 2$, то с погрешностью $O(\eta^{2q_1})$ можно пренебречь первым слагаемым в правой части формулы (5.2), определяющим зависимость решения от внешней геометрии цилиндра (главного радиуса кривизны).

Определим теперь положение действительной части l_2-й собственной частоты для плоской задачи ($l_1 = 0$). Такая информация представляет интерес для задач теории рассеяния [7]. Исходя из уравнения (5.2), имеем

$$\left(\frac{\omega h}{c_2}\right)_{l_2} = \Lambda + \eta^2\left[T^* l_2{}^2 + \frac{2}{\Lambda}\left(1 - \frac{1}{16\beta^2}\right)\right] - \frac{\varepsilon\eta}{4\Lambda c} \tag{5.4}$$

Будем для определенности считать, что в (1.8) $t = 1$, т. е. $\varepsilon \sim \eta$. Тогда остаточный член в уравнении (3.8) имеет порядок $O\left[\eta^{2-2q_2}(\eta + \eta^{2-2q_2})\right]$. Асимптотическая формула (5.4) и последняя оценка полностью совпадают с результатами [7]. При $q_2 > 0$ в правой части (5.4) можно пренебречь членами $O(\eta^2)$, так как вносимая ими поправка асимптотически мала по сравнению с расстоянием между соседними резонансами, порядок которого $O(\eta^{2-q_2})$.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для ВЧ НДС МИ второго типа. Не останавливаясь на подробностях, укажем лишь, что в отличие от рассмотренного выше случая, когда мнимый член, соответствующий демпфированию жидкости, не зависел от номера резонанса и имел порядок $O(\varepsilon)$, для НДС второго типа порядок указанного члена — $O(\varepsilon\eta^{2-2q_2})$.

Автор благодарит Д. Г. Васильева и А. Л. Гольденвейзера за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каплунов Ю. Д.* Уравнения высокочастотных длинноволновых колебаний упругого слоя, лежащего на акустическом полупространстве // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1077—1081.
2. *Каплунов Ю. Д., Маркушевич Д. Г.* Излучение упругого слоя в жидкое полупространство (плоская задача) // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 6. С. 1385—1390.
3. *Каплунов Ю. Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменяемости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147—157.
4. *Бердичевский В. Л.* Высокочастотные длинноволновые колебания пластин // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 6. С. 1319—1322.
5. *Бердичевский В. Л., Ле Хань Чау.* Высокочастотные длинноволновые колебания оболочек // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 735—744.
6. *Каплунов Ю. Д.* Асимптотические методы в высокочастотной гидроупругости тонких оболочек // Взаимодействие акустических волн с упругими телами: Докл. Всесоюз. симпоз. Таллинн, 1989. Таллинн: Изд-во Таллин. техн. ун-та, 1989. С. 99—102.
7. *Векслер Н. Д., Каплунов Ю. Д., Корсунский В. М.* Асимптотические формулы для резонансных частот при рассеянии нормально падающей акустической волны цилиндрической оболочкой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 3. С. 399—404.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.1990