

УДК (539.3 + 532.5) : 534.1

© 1991 г.

С. Н. Бешенков, С. Ф. Горбань

ОДНОМЕРНЫЕ ГИДРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Предлагается метод расчета одномерных (по формам цилиндрического изгиба) и осесимметричных вынужденных колебаний трехслойных пластин, закрепленных в бесконечном жестком экране на границе раздела жидких сред. Изложение ведется применительно к осесимметричным колебаниям, а в соответствующих местах указываются изменения, которые необходимо внести при решении плоской задачи. Исследуются зависимости резонансных частот и амплитуд колебаний от геометрических и физических параметров слоев, несимметрии строения пластины и демпфирующих свойств заполнителя. Отмечаются особенности гидроупругих колебаний трехслойных пластин по сравнению с колебаниями однородных. Последние рассматривались в ряде работ [1, 2]¹.

Рассмотрим вынужденные осесимметричные колебания круглой трехслойной пластины, закрепленной в бесконечном жестком экране на границе раздела жидких полупространств. Опуская временной множитель $e^{-i\omega t}$, изгиб пластины будем описывать уравнениями, построенными с привлечением широко используемых [3] гипотез о несжимаемости заполнителя в поперечном направлении и линейном распределении тангенциальных перемещений по его толщине

$$\begin{aligned} & b_1 \frac{d}{dr} \nabla^2 w - b_2 \omega^2 \frac{dw}{dr} + b_3 \frac{dw}{dr} + b_4 D^2 \varphi - b_5 \omega^2 \varphi - \\ & - b_3 \varphi = ht, \quad c_1 \nabla^2 \nabla^2 w - c_2 \omega^2 \nabla^2 w - b_3 \nabla^2 w - c_3 \omega^2 w + b_3 D \varphi + \\ & \quad + b_1 \nabla^2 D \varphi - b_2 \omega^2 D \varphi = -(q + p) + \delta Dt \end{aligned} \quad (1)$$

$$D = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}, \quad D^2 = \frac{d}{dr} D, \quad \nabla^2 = D \frac{d}{dr}, \quad q = q_1 - q_2,$$

$$p = p_1 - p_2, \quad t = t_1 + t_2$$

$$b_1 = -E_1 h \delta^2, \quad b_2 = \rho_1 h \delta^2, \quad b_3 = -2Gh, \quad b_4 = -\frac{2}{3} E h^3 - 2E_1 h^2 \delta$$

$$b_5 = \frac{2}{3} \rho h^3 + 2\rho_1 h^2 \delta, \quad c_1 = -\frac{2}{3} E_1 \delta^3, \quad c_2 = \frac{2}{3} \rho_1 \delta^3, \quad c_3 = -2(\rho h + \rho_1 \delta)$$

$$E_1 = E_1' / (1 - \nu_1^2), \quad E = E' / (1 - \nu^2)$$

Здесь w — прогиб пластины, φ — функция поворота сечений заполнителя, q_1, q_2, t_1, t_2 — нормальные и касательные нагрузки, действующие на верхнюю и нижнюю обшивки, p — разность звуковых давлений по обе стороны пластины, E_1', ν_1, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала обшивок толщиной δ , E', ν, ρ, G — те же характеристики и модуль сдвига материала заполнителя толщиной $2h$.

Заметим, что при замене в (1) дифференциальных операторов соответствующими производными по координате x , а также при равенстве нулю касательных нагрузок t_1 и t_2 получаем уравнения изгиба трехслойной пластины-полосы [4].

¹ См. также: Голованов В. А., Музыченко В. В., Пекер Ф. Н., Попов А. Л. Рассеяние и излучение звука упругими оболочками в жидкости: Препринт № 261. М.; Ин-т проблем механики АН СССР. 1985. 70 с. и библиографию к этой работе.

Решение уравнений (1), удовлетворяющее условию равенства нулю прогиба на контуре пластины, будем искать в виде рядов по функциям Бесселя

$$w = \sum_k w_k J_0(x_k r/a), \quad \varphi = \sum_k \varphi_k J_1(x_k r/a) \quad (2)$$

где x_k — корни уравнения $J_0(x) = 0$, a — радиус пластины, \sum_k означает суммирование по k от 1 до ∞ .

В случае плоской задачи выражения (2) заменяются на

$$w = \sum_k w_k \sin \alpha_k x, \quad \varphi = \sum_k \varphi_k \cos \alpha_k x, \quad \alpha_k = k\pi/l$$

где l — ширина пластины-полосы.

Для удовлетворения остальным краевым условиям приложим к контуру дополнительно изгибающий момент M и касательную нагрузку T . Суммарная нагрузка на пластину, таким образом, будет состоять из возбуждающей нагрузки $q(r)$, звукового давления $p(r)$, нагрузки интенсивностью q' , приложенной по площади кольца шириной ε_1 , отстоящего от края пластины на расстоянии ε , а также касательной нагрузки t , действующей по кольцу шириной ε на краю пластины.

Для перехода к изгибающему контурному моменту и контурной нагрузке принимаем, что

$$q'\varepsilon_1 \rightarrow p', \quad p'\varepsilon \rightarrow M, \quad \varepsilon t \rightarrow T \quad \text{при } \varepsilon_1, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3)$$

Разложим перечисленные составляющие нагрузки на пластину в ряды по функциям Бесселя. При этом неизвестную функцию $p(r)$ аппроксимируем на отрезке $[0, a]$ кусочно-линейной функцией. Используя условие ортогональности бесселевых функций, при учете формул (3) и принятой аппроксимации для $p(r)$ находим коэффициенты разложений указанных нагрузок

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{2}{a^2 J_1^2(x_k)} \int_0^a q(r) J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr \\ q_k' &= -\frac{2Mx_k}{a^2 J_1(x_k)}, \quad t_k = \frac{2T}{a J_1(x_k)}, \quad p_k = \sum_j p_j z_{kj} \\ z_{kj} &= \frac{2}{a^2 J_1^2(x_k)} \left[\int_{(j-1)\Delta r}^{j\Delta r} \frac{j\Delta r - r}{\Delta r} J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr - \right. \\ &\left. - \int_{(j-2)\Delta r}^{(j-1)\Delta r} \frac{(j-2)\Delta r - r}{\Delta r} J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) r dr \right]; \quad j = 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь N — число участков, на которые разбита пластина, p_j — звуковые давления на границах этих участков, \sum_j означает суммирование по j от 1 до $N + 1$. Выражения для z_{kj} при $j = 1$ и $j = N + 1$ получаются из общей формулы после отбрасывания соответственно второго и первого интегралов. При решении плоской задачи составляющие нагрузки представляются тригонометрическими рядами.

Подстановка разложений (2), (4) в уравнения (1) позволяет найти коэффициенты

$$w_k = \frac{2x_k}{a^2 J_1(x_k)} \frac{B_k}{\Delta_k} (M + \delta T) - \frac{2hA_k}{a J_1(x_k) \Delta_k} T - \frac{B_k (q_k + p_k)}{\Delta_k} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_k &= b_1 \frac{x_k^3}{a^3} + b_2 \omega^2 \frac{x_k}{a} - b_3 \frac{x_k}{a}, \quad B_k = b_4 \frac{x_k^2}{a^2} + b_5 \omega^2 + b_3 \\ C_k &= c_1 \frac{x_k^4}{a^4} + c_2 \omega^2 \frac{x_k^2}{a^2} + b_3 \frac{x_k^2}{a^2} - c_3 \omega^2, \quad \Delta_k = B_k C_k - A_k^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения для φ_k получаются из (5) заменой B_k на A_k и A_k на C_k . Изгибающий момент M и касательную силу T на контуре пластины определим, удовлетворяя оставшимся двум краевым условиям. Рассматривая для определенности случай заземления контура $dw/dr = \varphi = 0$ при $r = a$, получаем

$$M = \frac{a}{2h} \frac{\delta(S_2S_4 - S_1S_5 + \sum_j Q_{1j}p_j) + ha(S_2S_5 - S_3S_4 + \sum_j Q_{2j}p_j)}{S_2^2 - S_1S_3}$$

$$T = \frac{a}{2h} \frac{S_1S_5 - S_2S_4 + \sum_j Q_{3j}p_j}{S_2^2 - S_1S_3} \quad (7)$$

Здесь

$$S_1 = \sum_k \frac{x_k^2 B_k}{\Delta_k}, \quad S_2 = \sum_k \frac{x_k A_k}{\Delta_k}, \quad S_3 = \sum_k \frac{C_k}{\Delta_k}$$

$$S_4 = \sum_k \frac{B_k q_k x_k J_1(x_k)}{\Delta_k}, \quad S_5 = \sum_k \frac{A_k q_k J_1(x_k)}{\Delta_k} \quad (8)$$

$$Q_{1j} = S_2S_{4j} - S_1S_{5j}, \quad Q_{2j} = S_2S_{5j} - S_3S_{4j}, \quad Q_{3j} = S_1S_{5j} - S_2S_{4j}$$

Суммы S_{4j} и S_{5j} в (8) получаются из S_4 и S_5 заменой q_k на z_{kj} .

Подставляя выражения (7) в (5) и далее в (2), получим выражение для прогиба пластины, которое может быть записано в виде

$$w = \sum_k (w_k' + \sum_j w_{kj}' p_j) J_0(x_k r/a) \quad (9)$$

Разность звуковых давлений, действующих в точке $r = (m-1)\Delta r$ по обе стороны пластины, выражается через ее прогиб при помощи интеграла Гюйгенса [5] и определяется формулой [2]

$$p_m = \frac{\omega^2 \rho_0 n}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} w(\rho) \frac{\exp(ik_0 R_m)}{R_m} \rho d\theta d\rho \quad (10)$$

$$R_m^2 = (m-1)^2 \Delta r^2 + \rho^2 - 2(m-1)\Delta r \rho \cos \theta$$

В случае пластины-полосы выражение для реакции среды в точке $x = (m-1)\Delta l$ имеет вид

$$p_m = \frac{i\omega^2 \rho_0 n}{2} \int_0^l w(x_1) H_0^{(1)}(k_0(m-1)\Delta l - x_1) dx_1 \quad (11)$$

В формулах (10) и (11) $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число, ρ_0, c_0 — параметры жидкости, $H_0^{(1)}$ — функция Ганкеля. Коэффициент n равен 1 или 2 при наличии жидкости с одной или двух сторон пластины.

Полагая в формулах (10) $m = 1, 2, \dots, N+1$, приходим к системе алгебраических уравнений для отыскания узловых значений звукового давления на поверхности пластины (δ_{mj} — символ Кронекера)

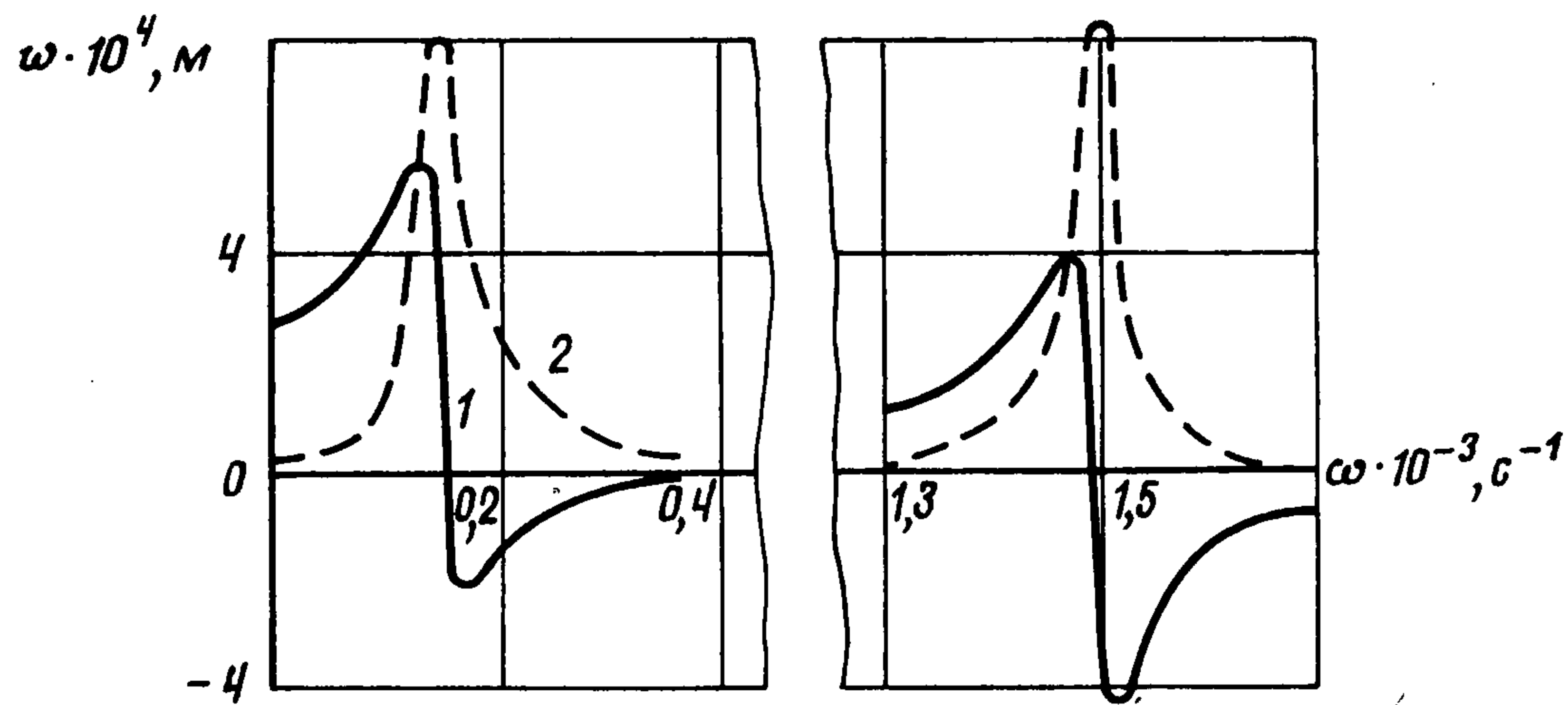
$$\sum_j a_{mj} p_j = b_m; \quad m = 1, 2, \dots, N+1 \quad (12)$$

$$a_{mj} = \sum_k w'_{kj} I_{km} - \frac{2\pi}{\omega^2 \rho_0 n} \delta_{mj}, \quad b_m = -\sum_k w_k' I_{km} \quad (13)$$

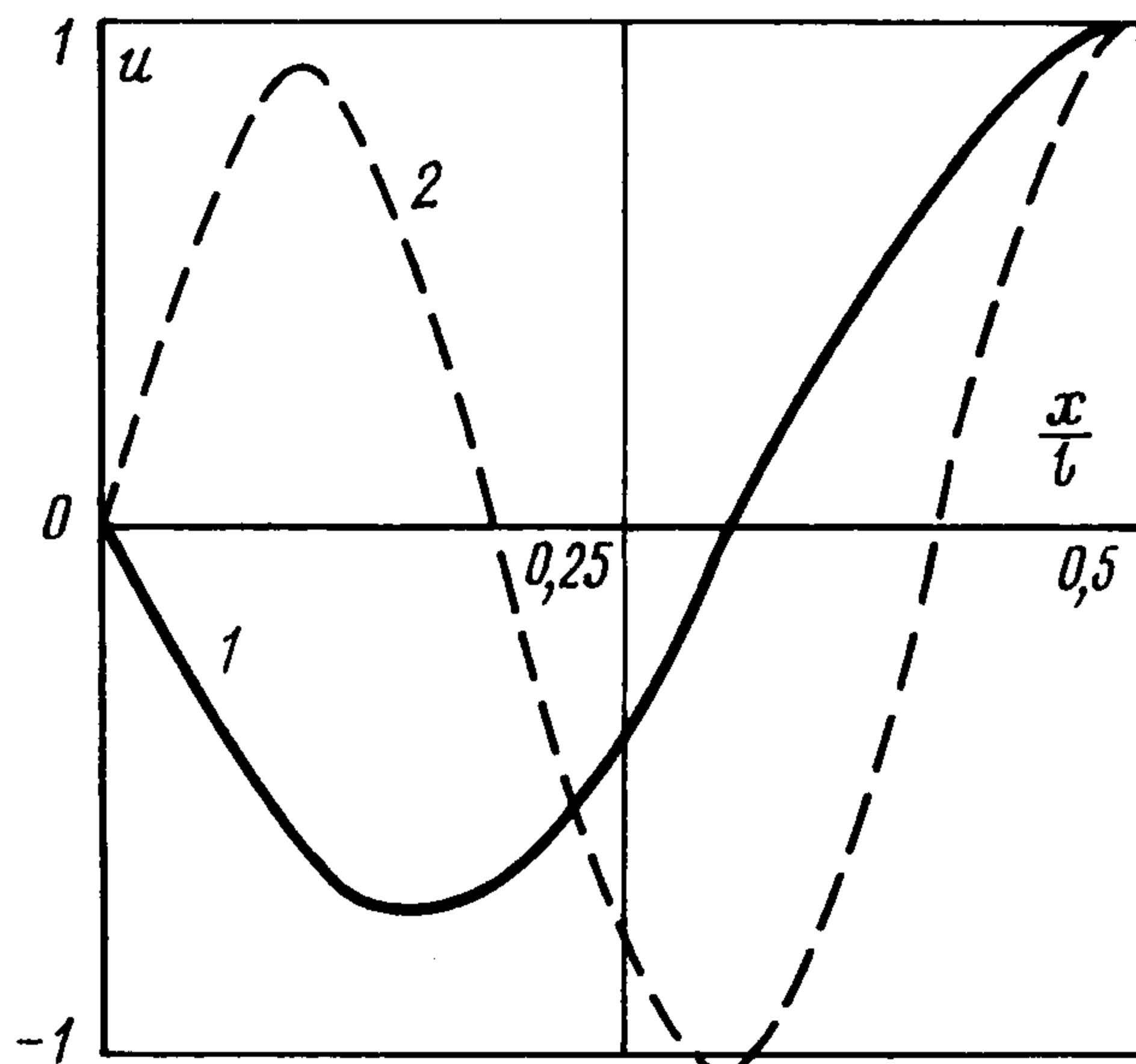
$$I_{km} = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_0\left(x_k \frac{r}{a}\right) \frac{\exp(ik_0 R_m)}{R_m} \rho d\theta d\rho$$

Отделяя в равенствах (12) действительные и мнимые части и решая получающуюся при этом систему $2(N+1)$ уравнений, находим действительные и мнимые составляющие звукового давления в узлах. Далее по формулам (9) вычисляем прогиб пластины.

Приведем результаты расчетов одномерных гидроупругих колебаний трехслойных пластин, возбуждаемых сосредоточенными нагрузками. Интегралы I_{km} в (13) представ-



Фиг. 1



Фиг. 2

лялись суммой интегралов по отдельным участкам пластины, на каждом из которых они вычислялись по квадратурным формулам Гаусса. Точность полученных результатов контролировалась путем изменения числа участков разбиения и членов, удерживаемых в рядах. Их значения, как показал численный анализ, следует выбирать по формулам $N = 6n$, $k = n + 2$, где n — номер ближайшей резонансной частоты. Дальнейшее увеличение указанных параметров в рассмотренных примерах практически не сказывалось на результатах.

На фиг. 1 приведены частотные зависимости действительной и мнимой (кривые 1, 2) составляющих прогиба в центре свободно опертой по краям трехслойной пластины-полосы шириной $l = 0,5$ м, состоящей из алюминиевых обшивок толщиной $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ м и заполнителя ПВХ ($E' = 5 \cdot 10^7$ Нм $^{-2}$; $\nu = 0,4$; $\rho = 0,3 \cdot 10^3$ кгм $^{-3}$) толщиной $2h = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Пластина возбуждается сосредоточенной силой $F = 10^3 \delta (x - l/2)$ Нм $^{-1}$ контакт с водой односторонний. Четные резонансы в силу симметрии нагрузки относительно центра пластины отсутствуют, а выходящий за пределы фигуры пятый резонанс наблюдается на частоте $\omega = 3702$ с $^{-1}$, модуль прогиба в центре достигает при этом значения $|w|_5 = 2,758 \cdot 10^{-4}$ м.

Отличие третьей и пятой форм резонансных колебаний от собственных форм колебаний в вакууме иллюстрируют графики 1, 2 на фиг. 2, показывающие изменение преобладающей на резонансе мнимой части безразмерного прогиба $u = \text{Im } w(x) / |w(l/2)|$ по поверхности пластины. Соответствующие резонансные частоты колебаний в вакууме (собственные частоты пластины): $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{854; 3065; 6021\}$ с $^{-1}$.

Из представленных результатов видно, что при гидроупругих колебаниях трехслойных пластин сохраняются те же закономерности, что и отмеченные в работах [2, 3] для однородных пластин. Вместе с тем имеется ряд отличий. Это прежде всего значительно более медленное, чем у однородных пластин, убывание амплитуды резонансных колебаний с ростом номера резонанса.

Для сравнения укажем, что у однородной алюминиевой пластины такого же погонного веса и ширины прогибы в центре на резонансных частотах $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{84; 2230; 7670\}$ с $^{-1}$ достигают значений $\{|w|_1, |w|_3, |w|_5\} = \{26,32; 2,884; 0,4016\} \cdot 10^{-4}$ м. Наиболее ярко указанный эффект проявляется при уменьшении ширины (радиуса)

№	Значение изменяемого параметра	$\omega_1, \text{с}^{-1}$	$ w _1 \cdot 10^8, \text{м}$	$\omega_2, \text{с}^{-1}$	$ w _2 \cdot 10^8, \text{м}$	$\omega_3, \text{с}^{-1}$	$ w _3 \cdot 10^8, \text{м}$
1	—	(288)	2226	1160	1353	2312	960
2	$a = 0,3 \text{ м}$	(798) 894	1096	(2058) 3158	1030	(3420) 5874	799
3	$\delta = 0,15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	(1878) 240	4196	(4534) 1038	1818	(7418) 2148	1149
4	$2h = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	(704) 198	7145	(1942) 892	3063	(3308) 1902	1817
5	$E' = 1,25 \cdot 10^8 \text{ Нм}^{-2}$	(672) 224	4393	(1870) 870	3426	(3224) 1704	2462
6	$\rho = 0,75 \cdot 10^3 \text{ кгм}^{-3}$	(622) 294	2052	(1536) 1238	1212	(3534) 2540	837
7	$E_1' = 0,36 \cdot 10^{11} \text{ Нм}^{-2}$	(1004) 250	3672	(2590) 1070	1617	(4300) 2198	1031
8	$\rho_1 = 1,35 \cdot 10^3 \text{ кгм}^{-3}$	(690) 290	2167	(1906) 1186	1303	(3254) 2388	917
		(858)		(2210)		(3670)	

пластины, увеличении толщины и уменьшении жесткости ее заполнителя, т. е. при таком изменении параметров, которое сопровождается увеличением влияния сдвиговых деформаций на поперечные колебания.

Это можно видеть, анализируя приведенные в таблице амплитуды резонансных гидроупругих колебаний круглых трехслойных пластин при возбуждении их сосредоточенной силой $F = 10 \text{ Н}$ в центре. Конструкция 1 составлена из алюминиевых слоев толщиной $\delta = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, | заполнителя ЭК ($E' = 25 \cdot 10^7 \text{ Нм}^{-2}$; $\nu = 0,4$; $\rho = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кгм}^{-3}$) толщиной $2h = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ и имеет радиус $a = 0,6 \text{ м}$. По контуру пластина закреплена, контакт с водой односторонний. Последующие конструкции отличаются каким-нибудь одним параметром. Значение измененного параметра (индекс 1 относится к обшивкам) приводится во второй колонке, а значения трех первых резонансных частот и прогибов в центре в последующих. Числа в скобках представляют собой резонансные частоты колебаний пластины в вакууме.

Можно отметить, что наиболее заметно изменение параметров пластины сказывается на ее первом резонансе. Его смещение в низкочастотную область вследствие уменьшения толщины и жесткости обшивок или заполнителя сопровождается увеличением амплитуды резонансных колебаний. Обратный эффект вызывает уменьшение радиуса пластины и плотности материалов заполнителя и обшивок.

Влияние демпфирующих свойств заполнителя на резонансные колебания рассмотренной выше трехслойной пластины-полосы исследовалось путем введения комплексных упругих констант $\bar{E} = E(1 - i\eta)$, $\bar{G} = G(1 - i\eta)$.

Сравнивая между собой представленные ниже амплитуды резонансных колебаний при разных значениях коэффициента потерь η

η	0	0,01	0,1	0,5
$ w _1 \cdot 10^4, \text{ м}$	8,06	7,87	6,44	3,59
$ w _2 \cdot 10^4, \text{ м}$	7,98	6,52	2,47	0,69
$ w _3 \cdot 10^4, \text{ м}$	2,76	1,8	0,662	0,181

можно отметить, что существенное их уменьшение достигается при больших ($10^{-2} \dots 10^{-1}$) значениях η , когда демпфирование колебаний за счет рассеяния энергии сравнимо с их демпфированием жидкостью.

Для оценки влияния на резонансные колебания несимметрии строения пластины при постоянной суммарной толщине ее обшивок решение рассматриваемой задачи было получено с использованием приведенных в [4] уравнений колебаний несимметричной трехслойной пластины-полосы. В результате расчетов установлено, что первая резонансная частота пластин несимметричного строения лежит несколько ниже, чем у пластин с одинаковой толщиной обшивок, и амплитуда их колебаний здесь больше, особенно в случае тяжелого заполнителя. Значения же последующих резонансных частот оказываются меньше, а амплитуды колебаний больше у пластин симметричного строения, причем наиболее ярко этот эффект выражен у пластин с легким низкопрочным заполнителем.

В частности, при изменении толщины обшивок рассматривавшейся выше пластины-полосы до значений $\delta_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_2 = 10^{-3}$ м были получены следующие значения резонансных частот и прогибов в центре $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = \{144; 1708; 4626\} \text{ с}^{-1}$, $\{|w|_1, |w|_3, |w|_5\} = \{8,705; 5,841; 1,516\} \cdot 10^{-4}$ м.

В заключение отметим, что выполненные исследования (некоторые из результатов приведены выше в тексте) показали, что резонансные частоты трехслойных пластин лежат ниже соответствующих резонансных частот однородных пластин равного с ними погонного веса, и амплитуды колебаний на них в несколько раз больше. Исключение составляет смещенный в область более высоких частот первый резонанс пластин с легкими заполнителями типа ПХВ, амплитуда колебаний на котором меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н. О колебаниях ограниченной пластины в жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 436—442.
2. Бешенков С. Н. Вынужденные колебания и излучение звука круглой пластиной, взаимодействующей с жидкостью // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 761—765
3. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
4. Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П. Нестационарные колебания деформируемых систем. Киев: Наук. думка, 1977. 339 с.
5. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 348 с.

Запорожье

Поступила в редакцию
13.IV.1990