

УДК 539.3

© 1991 г.

И. А. Дуплякин

## ДВИЖЕНИЕ ЭКИПАЖА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПО БАЛКЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ОСНОВАНИИ С ДВУМЯ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматриваются вертикальные колебания бесконечной балки Бернулли — Эйлера, лежащей на вязком инерционном основании с двумя упругими характеристиками, под действием движущегося безотрывно с постоянной скоростью деформируемого экипажа. Экипаж, представляющий собой систему жестких тел с вязкоупругими связями, контактирует с балкой посредством вязкоупругих рессор в конечном числе точек, что позволяет описать малые вертикальные колебания элементов экипажа системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предлагается методика получения асимптотики решения при больших временах. Приводятся асимптотики решений и их анализ для некоторых типов нагрузок.

В отличие от рассмотренных ранее подобных задач (обзор литературы приводится в [1]) полученные формулы позволяют строить асимптотические решения, описывающие взаимодействие деформируемого экипажа с балкой, и исследовать в частности скорость и характер распространения возмущений в балке, амплитудно-частотные характеристики установившихся режимов колебаний и скорость сходимости к ним нестационарного решения, процесс роста прогиба балки при движении с критическими скоростями и при воздействии на экипаж осциллирующей силы с резонансной частотой.

1. Постановка задачи. Реакция основания описывается дифференциальным уравнением

$$r_*(x_*, t_*) = -m_0 \frac{\partial^2 w_*}{\partial t_*^2} + k_{1*} \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} - \lambda_* \frac{\partial w_*}{\partial t_*} - k w_*$$

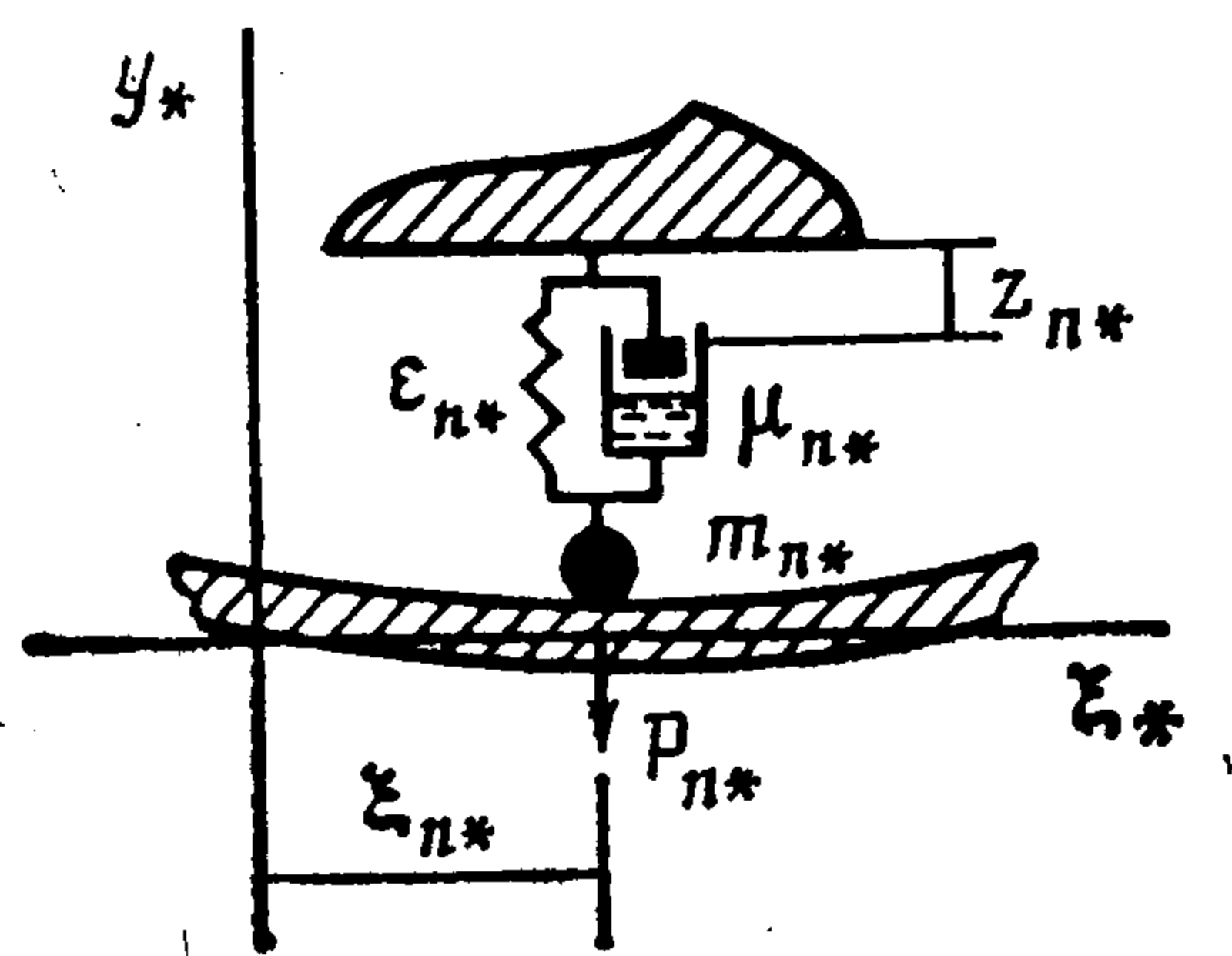
где  $w_* = w_*(x_*, t_*)$  — прогиб основания,  $m_0$ ,  $k_{1*}$ ,  $k$  и  $\lambda_*$  — соответственно присоединенная погонная масса, упругие характеристики и вязкость основания,  $t_*$  — текущее время,  $x_*$  — координата сечения.

Обозначим:  $EJ$  — жесткость балки,  $\rho$  — ее масса погонного метра,  $v_*$  — скорость движения экипажа,  $\xi_* = x_* - v_* t_*$  — координата сечения балки,  $y_* = y_*(\xi_*, t_*)$  — прогиб балки,  $z_{n*}(t_*)$  — перемещение в  $n$ -й рессоре,  $\xi_{n*}$  — ее координата,  $y_{n*} = y_*(\xi_{n*}, t_*)$  — прогиб балки под рессорой,  $m_{n*}$  — сосредоточенные массы в точках  $\xi_{n*}$ ,  $P_{n*}(t_*)$  — приложенные к ним силы,  $\varepsilon_{n*}$  и  $\mu_{n*}$  — коэффициенты упругости и вязкости  $n$ -й рессоры,  $q_{n*}(t_*)$  — давление экипажа на балку в точке  $\xi_{n*}$  (фиг. 1).

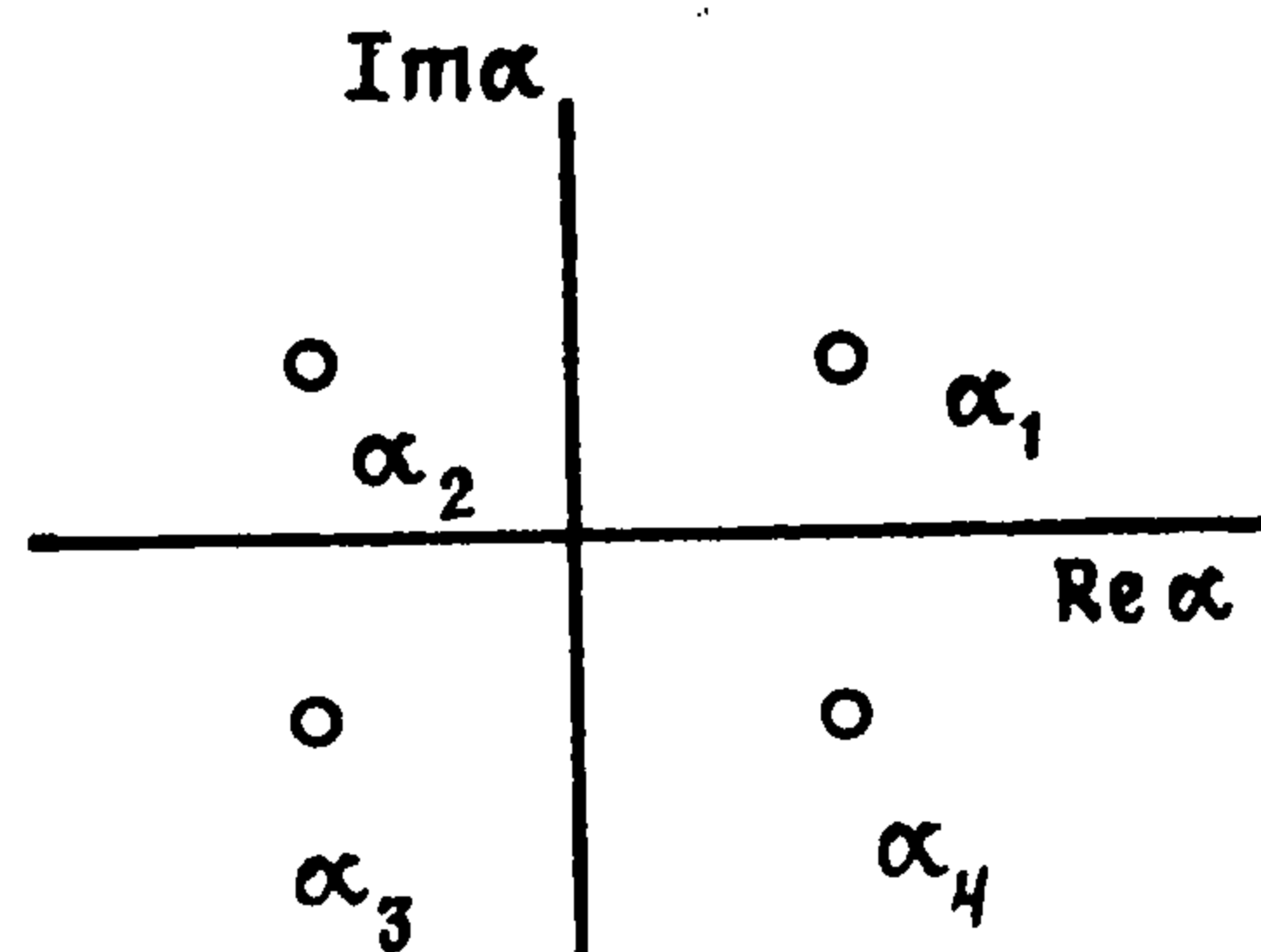
Введем базовые коэффициенты подобия

$$R_1 = \left(\frac{EJ}{k}\right)^{1/4}, \quad R_2 = \left(\frac{2k}{\rho + m_0}\right)^{-1/2}, \quad R_3 = (EJk)^{1/2}$$

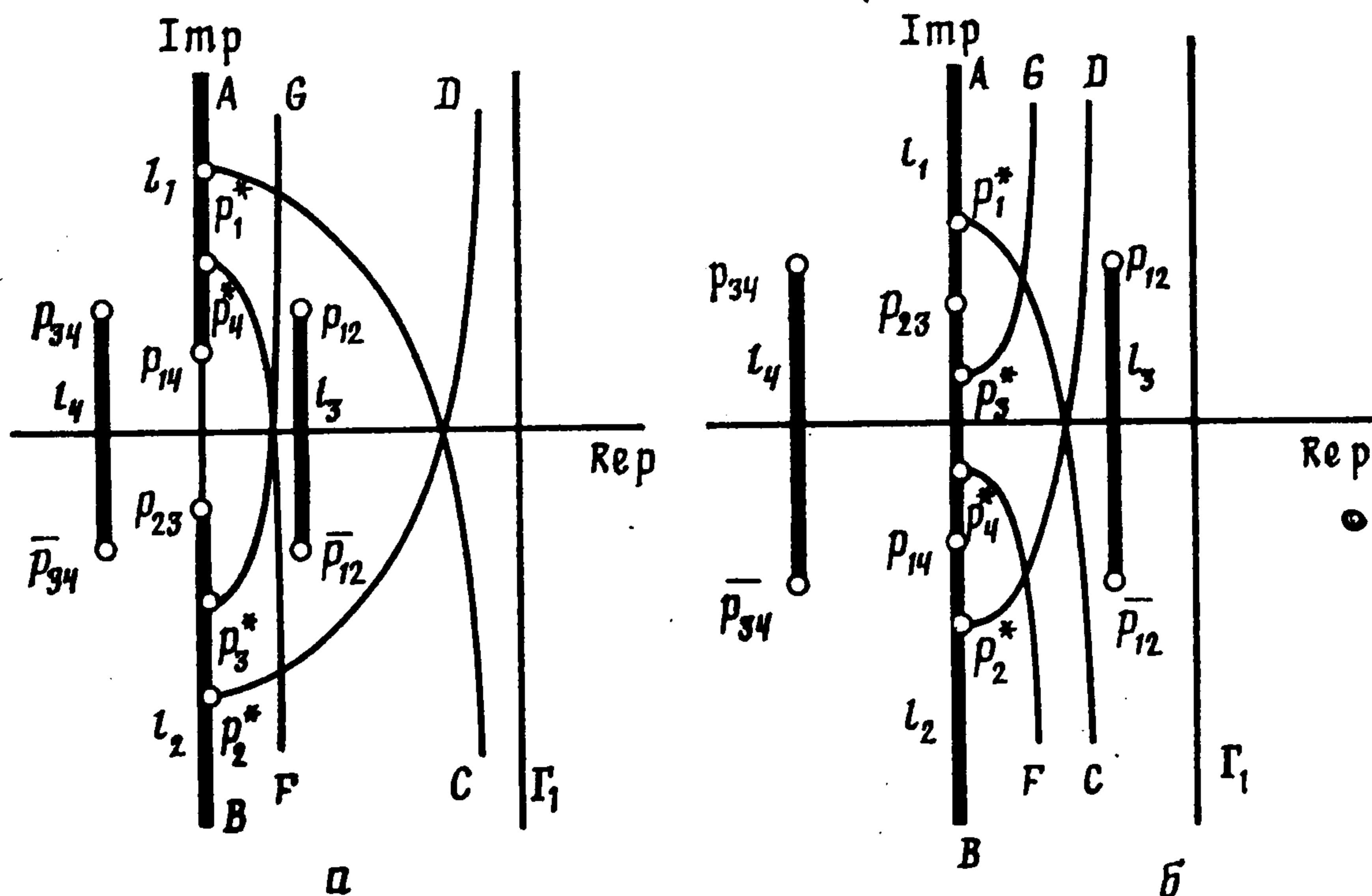
размерностью м, с и Н соответственно и запишем исходные уравнения относительно безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с экипажем. Переход к размерным величинам, отмеченным звездочкой, осуществляется умножением безразмерных переменных на соответствующие их размерности комбинации базовых коэффициентов подобия.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение изгиба балки

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + (2v^2 - k_1) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 4v \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial t} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \lambda v \frac{\partial y}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial y}{\partial t} + y = \sum_{n=1}^N q_n(t) \delta(\xi - \xi_n) \quad (1.1)$$

Условия контакта экипажа с балкой ( $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} + \mu_n \left( \frac{dy_n}{dt} - \frac{dz_n}{dt} \right) + \varepsilon_n (y_n - z_n) = P_n(t) - q_n(t) \quad (1.2)$$

Малые вертикальные колебания элементов экипажа описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, а связи прогибов рессор с перемещениями элементов экипажа — линейными алгебраическими уравнениями. Граничные и начальные условия полагаются нулевыми.

2. Методика построения асимптотического решения при  $t \rightarrow \infty$ . Применим последовательно к уравнению (1.1) преобразование Фурье по  $\xi$  и Лапласа по  $t$ . Тогда

$$y(\xi, t) = \frac{\exp(-1/4 \lambda t)}{4\pi^2 i} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} Y_{LF}(p, \alpha) \exp(pt - i\alpha \xi) d\alpha dp \quad (2.1)$$

$$Y_{LF}(p, \alpha) = \frac{1}{\Phi(\alpha, p)} \sum_{n=1}^N Q_n(p) \exp(i\alpha \xi_n) \quad (2.2)$$

$$\Phi(\alpha, p) = \alpha^4 - (2v^2 - k_1) \alpha^2 + 4ivp\alpha + 2p^2 + \gamma$$

$$\gamma = 1 - 1/8 \lambda^2 \quad (2.3)$$

$$Q_n(p) = \int_0^\infty q_n(t) \exp[(1/4 \lambda - p)t] dt \quad (2.4)$$

$\operatorname{Im} \alpha_1 \geq 0, \operatorname{Im} \alpha_4 \leq 0;$ $\operatorname{Im} \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha_3 = 0, \operatorname{Re} \alpha_3 \leq \operatorname{Re} \alpha_2$	$p \in l_2^+$
$\operatorname{Im} \alpha_2 \geq 0, \operatorname{Im} \alpha_3 \leq 0;$ $\operatorname{Im} \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_4 = 0, \operatorname{Re} \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \alpha_4$	$p \in l_1^+$
$\operatorname{Im} \alpha_1 > 0, \operatorname{Im} \alpha_2 > 0, \operatorname{Im} \alpha_3 < 0, \operatorname{Im} \alpha_4 < 0$	$p \notin l_1 \cup l_2$

Таблица 2.  $v > v_0$ 

$\operatorname{Im} \alpha_1 > 0, \operatorname{Im} \alpha_4 < 0;$ $\operatorname{Im} \alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha_3 = 0, \operatorname{Re} \alpha_3 < \operatorname{Re} \alpha_2$	$p \in l_2^+ \setminus l_1^+$
$\operatorname{Im} \alpha_k = 0, k = 1, 2, 3, 4,$ $\operatorname{Re} \alpha_3 \leq \operatorname{Re} \alpha_2 < \operatorname{Re} \alpha_1 \leq \operatorname{Re} \alpha_4$	$p \in l_1^+ \cap l_2^+$
$\operatorname{Im} \alpha_2 > 0, \operatorname{Im} \alpha_3 < 0;$ $\operatorname{Im} \alpha_1 = \operatorname{Im} \alpha_4 = 0, \operatorname{Re} \alpha_1 < \operatorname{Re} \alpha_4$	$p \in l_1^+ \setminus l_2^+$
$\operatorname{Im} \alpha_1 > 0, \operatorname{Im} \alpha_2 > 0, \operatorname{Im} \alpha_3 < 0, \operatorname{Im} \alpha_4 < 0$	$p \notin l_1 \cup l_2$

где  $\Gamma_1$  — прямая, лежащая правее оси  $\operatorname{Re} p = 1/4\lambda$  в  $p$ -плоскости,  $\Gamma_2$  — действительная ось в  $\alpha$ -плоскости.

Рассмотрим функцию корней полинома (2.3)  $\alpha(p)$ . Ее точки разветвления определяются из уравнения

$$R(\Phi, \Phi_{\alpha}') = 0$$

где  $R(\Phi, \Phi_{\alpha}')$  — результат полиномов  $\Phi$  и  $\Phi_{\alpha}'$  [2]. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & 8p^6 + (12\gamma + v^4 - 10k_1v^2 - 2k_1^2)p^4 + \\ & + [6\gamma^2 - \gamma(k_1 - 2v^2)(2k_1 + 5v^2) + 1/8k_1(k_1 - 2v^2)^3]p^2 + \\ & + \gamma[\gamma - 1/4(k_1 - 2v^2)^2]^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим точки разветвления  $p_{ij}$  согласно осуществляемой в них склейке ветвей функции  $\alpha(p)$ . Уравнение (2.5) указывает на две точки разветвления третьего порядка при  $v = 0, k_1 = 0$  и шесть точек разветвления первого порядка при  $v > 0$  или  $k_1 > 0$ . Рассматривая аналитическое продолжение с действительной оси (расположение корней  $\alpha_k$  полинома (2.3) в  $\alpha$ -плоскости показано для этого случая на фиг. 2), можно построить область однозначности для функции  $\alpha(p)$ , причем разрезы проходят по лучам  $l_1 = [p_{14}, +i\infty)$ ,  $l_2 = [p_{23}, -i\infty)$  и простым кривым  $l_3$  и  $l_4$ , соединяющим точки  $p_{12}, \bar{p}_{12}$  и  $p_{34}, \bar{p}_{34}$  (далее помечаются знаками плюс и минус соответственно правые и левые берега разрезов). Расположение разрезов  $l_k$  в  $p$ -плоскости показано на фиг. 3, а и б соответственно для случаев  $0 < v < v_0$  и  $v > v_0$  (на фиг. 3, б показано предельное положение разрезов  $l_1, l_2$  и область однозначности функции  $\alpha(p)$  следует считать однозначной). В табл. 1 и 2 приведены условия нумерации корней полинома (2.3)  $\alpha_k(p)$ , при этом

$$v_0 = \sqrt{\pm \sqrt{\gamma} + k_1/2} \quad (2.6)$$

что соответствует совпадению точек разветвления  $p_{14}$  и  $p_{23}$  на действительной оси. На практике, однако,  $k_1$  мало, поэтому в равенстве (2.6) будем брать знак плюс.

Заметим, что нестрогие неравенства, приведенные в табл. 1 и 2, могут обращаться в равенства лишь в точках разветвления  $p_{14}$  и  $p_{23}$ . Кроме

того, чтобы получить значения ветвей функции  $\alpha(p)$  на  $l_1^-$  и  $l_2^-$ , нужно учесть очевидную перестановку  $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$  при обходе точки разветвления  $p_{ij}$ .

Найдем теперь по вычетам образ Лапласа функции (2.1)

$$Y_L(p, \xi) = \sum_{n=1}^N Q_n(p) h_n(p, \xi) \quad (2.7)$$

$$h_n(p, \xi) = i \sum_{k=1}^2 \frac{\exp[-i\alpha_k(p)(\xi - \xi_n)]}{\Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)} \quad (\xi \leq \xi_n)$$

$$h_n(p, \xi) = -i \sum_{k=3}^4 \frac{\exp[-i\alpha_k(p)(\xi - \xi_n)]}{\Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)} \quad (\xi \geq \xi_n)$$

Для функций  $h_n(p, \xi)$  особыми являются только точки разветвления  $p_{14}$  и  $p_{23}$ , так как функции  $h_n(p, \xi)$  симметричны относительно перестановок  $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ ,  $\alpha_3 \leftrightarrow \alpha_4$  и имеют конечный предел в точках  $p_{12}$ ,  $\bar{p}_{12}$ ,  $p_{34}$ ,  $\bar{p}_{34}$ . По этой же причине функции  $h_n(p, \xi)$  не терпят разрывов при переходе  $l_3$  и  $l_4$ .

Положим  $\xi = \beta t + \eta$ , где  $\beta$  — групповая скорость пакета волн с волновым числом  $\alpha$ , и запишем функцию (2.1) при учете соотношений (2.7) в виде

$$y(\eta, t) = \sum_{n=1}^N y_n(\eta, t) \quad (2.8)$$

$$y_n(\eta, t) = I_{n1}(\eta, t) + I_{n2}(\eta, t)$$

при  $\beta < 0$  или  $\beta = 0, \eta \leq \xi_n$

$$y_n(\eta, t) = -I_{n3}(\eta, t) - I_{n4}(\eta, t)$$

при  $\beta > 0$  или  $\beta = 0, \eta \geq \xi_n$

$$I_{nk}(\eta, t) = \frac{\exp(-1/4\lambda t)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f_{nk}(p) \exp[tS_k(p, \alpha)] dp$$

$$f_{nk}(p) = \frac{iQ_n(p) \exp[-i\alpha_k(p)(\eta - \xi_n)]}{\Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)}$$

$$S_k(p, \beta) = p - i\alpha_k(p)\beta$$

Найдем асимптотику интегралов  $I_{nk}$  при больших  $t$  методом перевала. Рассмотрим случай, когда особыми точками функций  $Q_n(p)$  являются полюсы и точки разветвления  $p_{14}, p_{23}$ . (Это условие заведомо выполняется, если к элементам экипажа приложены импульсные, постоянные или осциллирующие силы.)

Точки перевала функций  $S_k(\beta \neq 0)$  определяются из уравнения

$$R(\Phi, \Psi) = 0, \quad \Psi(\alpha, p) = \Phi_{\alpha'}(\alpha, p) + i\beta\Phi_p'(\alpha, p)$$

откуда получаем

$$8p^6 + [12\gamma + (\beta^2 - v^2)^2 + 2(\beta^2 - 5v^2)k_1 - 2k_1^2]p^4 +$$

$$+ \{2\gamma[3\gamma + v(v + \beta)(5v^2 - 5\beta v + 2\beta^2)] - (v^2 - \beta^2)[\gamma +$$

$$+ v^2(v^2 - \beta^2)]k_1 - 1/2[4\gamma - v(3v^3 - \beta^2v - 2\beta^3)]k_1^2 -$$

$$- 1/4(3v^2 + \beta^2)k_1^3 + 1/8k_1^4\}p^2 + \quad (2.9)$$

$$+ \gamma\{[\gamma - v^2(v^2 - \beta^2)]^2 + 2v^2(\gamma + \beta^2v^2 - v^4)k_1 -$$

$$- 1/2(\gamma + \beta^2v^2 - 3v^4)k_1^2 - 1/2v^2k_1^3 + 1/16k_1^4\} = 0$$

Так как групповая скорость  $\beta$  зависит от действительного числа  $\alpha$ , то следует рассматривать лишь те корни полинома, которые расположены на  $l_1$  и  $l_2$ . Эти корни определяют точки перевала третьего порядка при  $v = -\beta, k_1 = 0$  и первого порядка при  $v \neq -\beta$  или  $k_1 > 0$ . Обозначим

их  $p_k^*$  для соответствующих функций  $S_k$ . Заметим, что точки  $p_1^*, p_2^*$  определены при  $\beta < 0$ , а  $p_3^*, p_4^*$  — при  $\beta > 0$ , причем  $p_1^* \in l_1^+, p_4^* \in l_1^+, p_2^* \in l_2^+, p_3^* \in l_2^+$ .

Функции  $h_n(p, \xi)$  не терпят разрывов на  $l_3$  и  $l_4$ . Поэтому суммы интегралов  $I_{n1} + I_{n2}, I_{n3} + I_{n4}$  по берегам этих разрезов равны нулю и исходный контур  $\Gamma_1$  может быть деформирован при  $\beta \neq 0$  в контуры  $\Gamma_{1k}$ , удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{Re} S_k(p, \beta) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

На фиг. 3, а и б при некоторых значениях  $\beta$  изображены перевальные контуры  $\Gamma_{11} = Ap_1^*C, \Gamma_{12} = Bp_2^*D, \Gamma_{13} = Bp_3^*G, \Gamma_{14} = Ap_4^*F$  ( $A = +i\infty, B = -i\infty, A \in l_1^+, B \in l_2^+$ ).

Контуры  $\Gamma_{1k}$  обладают следующими свойствами:

а) через любую точку полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  при некотором  $\beta$  и фиксированном  $k$  проходит ровно один контур  $\Gamma_{1k}$ ;

б) контуры  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}$  и  $\Gamma_{14}$  попарно симметричны относительно действительной оси в  $p$ -плоскости, так как

$$\alpha_2(\bar{p}) = -\overline{\alpha_1(p)}, \quad \alpha_3(\bar{p}) = -\overline{\alpha_4(p)} \quad (2.10)$$

При  $\beta = 0$  точки перевала отсутствуют и интегрирование проводится по контуру  $\Gamma_{10} = l_1^+ \cup l_1^- \cup l_2^+ \cup l_2^-$ . (Если функция  $Q_n(p)$  — однозначная, то интегралы  $I_{n1}, I_{n4}$  на  $l_2^+ \cup l_2^-$  и  $I_{n2}, I_{n3}$  на  $l_1^+ \cup l_1^-$  обращаются в нуль, так как соответствующие подынтегральные функции не меняют своих значений при переходе на противоположный берег разреза.) Заметим, что контур  $\Gamma_{10}$  не может быть использован в качестве перевального, так как при  $\beta \neq 0$  ядра интегралов  $I_{nk}$  имеют неинтегрируемую особенность в точках разветвления  $p_{14}$  или  $p_{23}$ .

Таким образом, асимптотика интегралов определяется вкладом точек перевала при  $\beta \neq 0$  (точек разветвления при  $\beta = 0$ ) плюс сумма вкладов полюсов функций  $Q_n(p)$ , которые проходит прямая  $\Gamma_1$  при деформировании в перевальный контур.

3. Асимптотика интегралов  $I_{nk}$ . Для получения асимптотических разложений воспользуемся известными формулами [3].

Главный член асимптотики представим в виде

$$I_{nk} = I_{nk}^0 + I_{nk}^1 \quad (3.1)$$

где  $I_{nk}^0$  — вклад полюсов функций  $Q_n(p)$ ,  $I_{nk}^1$  — вклад точек перевала при  $\beta \neq 0$  или точек разветвления при  $\beta = 0$ .

Формулы для вычисления  $I_{nk}^0$ . Введем в рассмотрение функцию (при учете равенств (2.8) и табл. 1,2)

$$r_{nk}(p, \beta) = \frac{i \exp\{[-1/4\lambda + S_k(p, \beta)]t - i\alpha_k(\eta - \xi_n)\}}{2\Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)} \quad (3.2)$$

и обозначим  $D_k = \{\operatorname{Re} S_k(p, \beta) > 0\} \cup \{\operatorname{Re} p > 0\}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ),  $p_j$  — полюсы функции  $Q_n(p)$ .

Тогда

$$I_{nk}^0 = \sum_j \chi_j r_{nk}(p_j, \beta) \operatorname{res} Q_n(p_j) \quad (3.3)$$

причем для  $\beta = 0$   $\chi_j = 0$  при  $\operatorname{Re} p_j < 0$  (при вычислении асимптотики интегралов  $I_{nk}$  отбрасываются малые члены порядка  $O(e^{-ct})$ ,  $c > 0$ ),  $\chi_j = 2$  при  $\operatorname{Re} p_j \geq 0$ ; для  $\beta \neq 0$   $\chi_j = 0$  при  $p_j \notin D_k \cup \Gamma_{nk}$ ,  $\chi_j = 1$  при  $p_j \in \Gamma_{nk} \setminus p_k^*$ ,  $\chi_j = 2$  при  $p_j \in D_k$ .

Формулы для вычисления  $I_{nk}^1$ . Пусть особыми точками функций  $Q_n(p)$  являются только полюсы (это условие имеет место при отсутствии экипжа). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \theta_{1k} &= 4 \{2\pi |\omega + v\alpha_k| [3\alpha_k^2 - (\beta + v)^2 + 1/2k_1]\}^{1/2} \\ \theta_{2k} &= \exp \{[-1/4\lambda + i(\omega - \beta\alpha_k)]t + 1/4i\kappa_k\pi\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\theta_{3k} = \exp [(-1/4\lambda + i\omega)t + 1/8i\kappa_k\pi], \quad \kappa_k = \begin{cases} 1, & k = 1, 4 \\ -1, & k = 2, 3 \end{cases}$$

где  $\alpha_k = \alpha_k(i\omega)$  — корни полинома (2.3).

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Полюсы функций  $Q_n(p)$  не совпадают с точками перевала и разветвления. Тогда

$$I_{nk}^1 = \theta_{2k} \left\{ i(-1)^{k+1} \frac{Q_n(i\omega)}{\sqrt{\pi} \theta_{1k}} \exp[-i\alpha_k(\eta - \xi_n)] t^{-1/2} + O(t^{-3/2}) \right\} \quad (3.5)$$

где при  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \neq -v$  или  $\beta = -v$  ( $k_1 > 0$ )  $\omega = \text{Im } p_k^*$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ ; при  $\beta = 0$  ( $v > 0$  или  $k_1 > 0$ )  $\omega = \text{Im } p_{14}$  для  $k = 1, 4$  и  $\omega = \text{Im } p_{23}$  для  $k = 2, 3$  и

$$I_{nk}^1 = \theta_{3k} \left[ i(-1)^{k+1} \frac{\Gamma(1/4)}{8\sqrt{2}\pi} |\omega|^{-3/4} Q_n(i\omega) t^{-3/4} + O(t^{-5/4}) \right] \quad (3.6)$$

где при  $\beta = -v$  ( $v > 0$ ,  $k_1 = 0$ )  $\omega = \kappa_k \sqrt{\gamma/2}$  для  $k = 1, 2$ ; при  $\beta = 0$  ( $v = k_1 = 0$ )  $\omega = \kappa_k \sqrt{\gamma/2}$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ .

2°. Полюс функции  $Q_n(p)$  совпадает с точкой перевала ( $\beta \neq 0$ ). Рассмотрим функцию

$$Q_n(p) = D_n(p)/(p - p_0) \quad (p_0 = p_k^*) \quad (3.7)$$

Тогда

$$I_{nk}^1 = \theta_{2k} \left\{ i(-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{\pi} \theta_{1k}} \left[ D_n'(i\omega) - \frac{1}{\beta} \left( \frac{iv}{\omega + v\alpha_k} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + i\psi_{nk} + \eta - \xi_n \right) D_n(i\omega) \right] \exp[-i\alpha_k(\eta - \xi_n)] t^{-1/2} + O(t^{-3/2}) \right\} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_{nk} &= \{9\alpha_k^4 + [3k_1 - (2v + 3\beta)(3v + \beta)]\alpha_k^2 - 2\beta\omega\alpha_k + \\ &+ 1/4k_1^2 - 1/2k_1(v + \beta)(2v + \beta) + v(v + \beta)^2\} \times \\ &\times \{\beta [6\alpha_k^2 + k_1 - 2(v + \beta)^2] (\omega + v\alpha_k)\}^{-1} \end{aligned}$$

где  $\beta \neq -v$  или  $\beta = -v$  ( $k_1 > 0$ ),  $\omega = \text{Im } p_k^*$  для  $k = 1, 2, 3, 4$  и

$$I_{nk}^1 = \theta_{3k} \left\{ i(-1)^{k+1} \frac{\Gamma(1/4)}{8\sqrt{2}\pi} |\omega|^{-3/4} \times \right. \\ \left. \times \left[ D_n'(i\omega) + \left( \frac{19i}{20\omega} + \frac{\eta - \xi_n}{v} \right) D_n(i\omega) \right] t^{-1/4} + O(t^{-3/4}) \right\} \quad (3.9)$$

где при  $\beta = -v$  ( $v > 0$ ,  $k_1 = 0$ )  $\omega = \kappa_k \sqrt{\gamma/2}$  для  $k = 1, 2$ .

3°. Полюс функции  $Q_n(p)$  совпадает с точкой разветвления ( $\beta = 0$ ). Рассмотрим выражение (3.7) при  $p_0 = p_{14}$  или  $p_0 = p_{23}$  и преобразуем исходные интегралы (2.8) следующим образом:

$$I_{nk} = \frac{1}{2\pi i} \exp [(-1/4\lambda + p_0)t] I_{nk}^*$$

$$I_{nk}^* = \int_{\Gamma_1} \frac{iD_n(p) \exp[-i\alpha_k(\xi - \xi_n)]}{(p - p_0) \Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)} \exp[(p - p_0)t] dp$$

откуда

$$\frac{d}{dt} I_{nk}^* = \int_{\Gamma_1} \frac{iD_n(p) \exp[-i\alpha_k(\xi - \xi_n)]}{\Phi_{\alpha'}(\alpha_k, p)} \exp[(p - p_0)t] dp$$

Для получения асимптотики последнего интеграла воспользуемся формулами (3.5), (3.6) при  $\beta = 0$ . Интегрируя затем по времени, получаем

$$I_{nk}^1 = \theta_{2k} \left[ 2i (-1)^{k+1} \frac{D_n(i\omega)}{\sqrt{\pi} \theta_{1k}} \exp[-i\alpha_k(\xi - \xi_n)] t^{1/2} + O(1) \right] \quad (3.10)$$

где при  $v > 0$  или  $k_1 > 0$   $\omega = \text{Im } p_{14}$  для  $k = 1, 4$  и  $\omega = \text{Im } p_{23}$  для  $k = 2, 3$ .

$$I_{nk}^1 = \theta_{3k} \left[ i (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(1/4)}{6\sqrt{2}\pi} |\omega|^{-3/4} D_n(i\omega) t^{3/4} + O(1) \right] \quad (3.11)$$

где  $v = k_1 = 0$ ,  $\omega = \kappa_k \sqrt{\gamma/2}$  для  $k = 1, 2, 3, 4$ .

4°. Функция  $Q_n(p)$  имеет полюс порядка  $m \geq 1$ , совпадающий с точкой перевала или разветвления. Разложим функцию  $Q_n(p)$  в ряд Лорана в окрестности точки перевала (разветвления). Рассуждая далее изложенным выше способом, получаем

$$I_{nk}^1 = O(t^{m-1/2}) \quad (\beta = 0, v > 0 \text{ или } k_1 > 0)$$

$$I_{nk}^1 = O(t^{m-1/4}) \quad (\beta = 0, v = k_1 = 0)$$

$$I_{nk}^1 = \begin{cases} O(t^{1/2 m - 1/2}), & m \text{ — четное} \\ O(t^{1/2 m - 1}), & m \text{ — нечетное} \end{cases} \quad (\beta \neq 0, \beta \neq -v)$$

$$I_{nk}^1 = \begin{cases} O(t^{1/2 m - 1/4}), & m \text{ — четное} \\ O(t^{1/2 m - 3/4}), & m \text{ — нечетное} \end{cases} \quad (\beta = -v, v > 0)$$

При наличии экипажа особыми точками функций  $Q_n(p)$  являются полюсы и точки разветвления  $p_{14}$ ,  $p_{23}$ , в которых функции  $Q_n(p)$  могут принимать нулевое значение. Поэтому при  $\beta \neq 0$  асимптотики, приведенные выше, остаются полностью справедливыми, а при  $\beta = 0$  их можно уточнить в зависимости от конкретной конструкции экипажа.

В заключение отметим, если  $Q_n(\bar{p}) = \overline{Q_n(p)}$ , то при учете (2.10) имеют место равенства

$$I_{n1}^1 = \overline{I_{n2}^1}, \quad I_{n4}^1 = \overline{I_{n3}^1}$$

4. Анализ асимптотических решений для некоторых типов нагрузок. Рассмотрим случай  $N = 1$ ,  $\xi_1 = 0$  (далее индекс единица опускается).

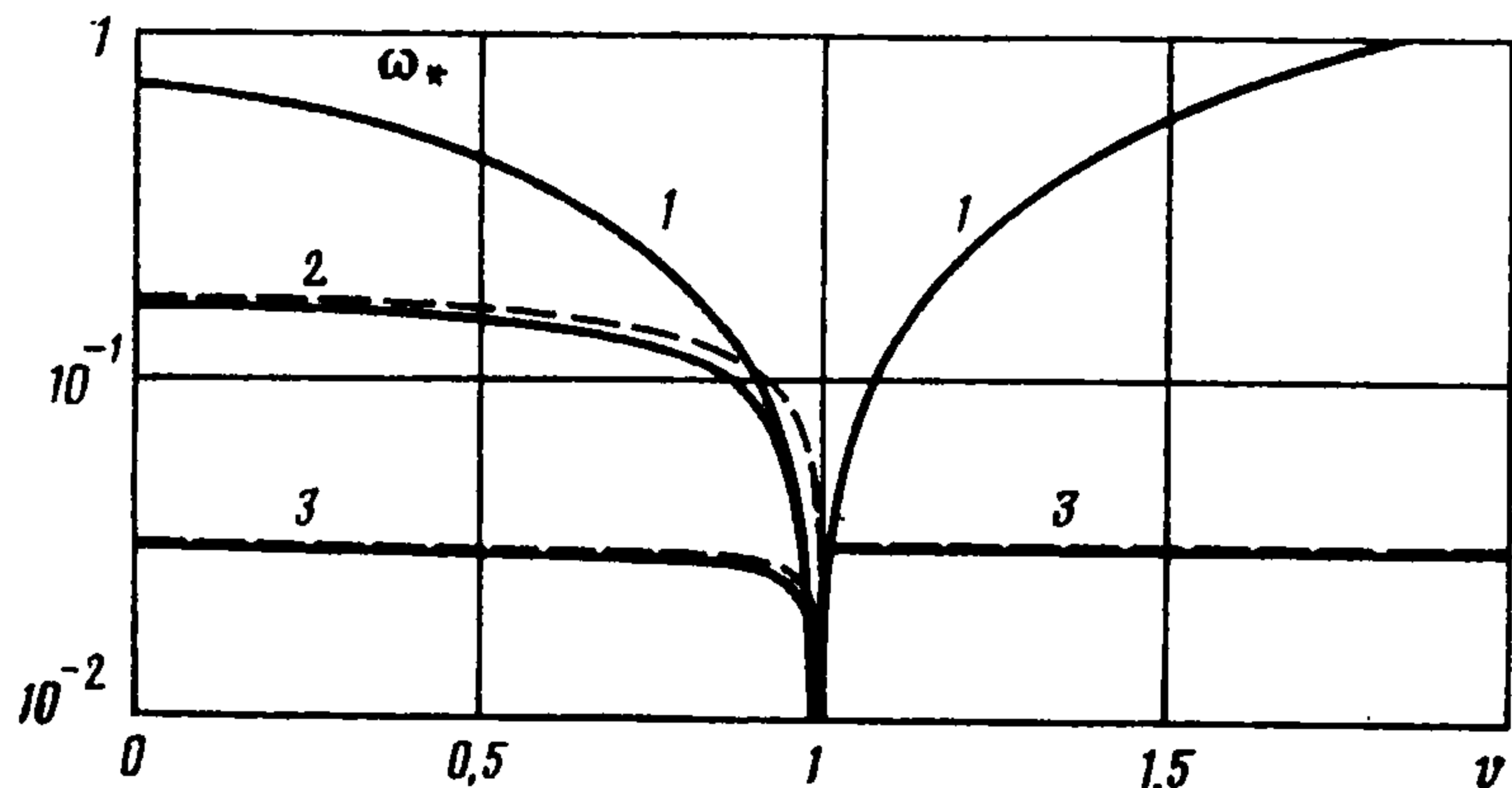
*Действие сосредоточенной силы.* Пусть к балке приложена импульсная сила

$$q(t) = \delta(t), \quad Q(p) \equiv G, \quad I_k^0 \equiv 0$$

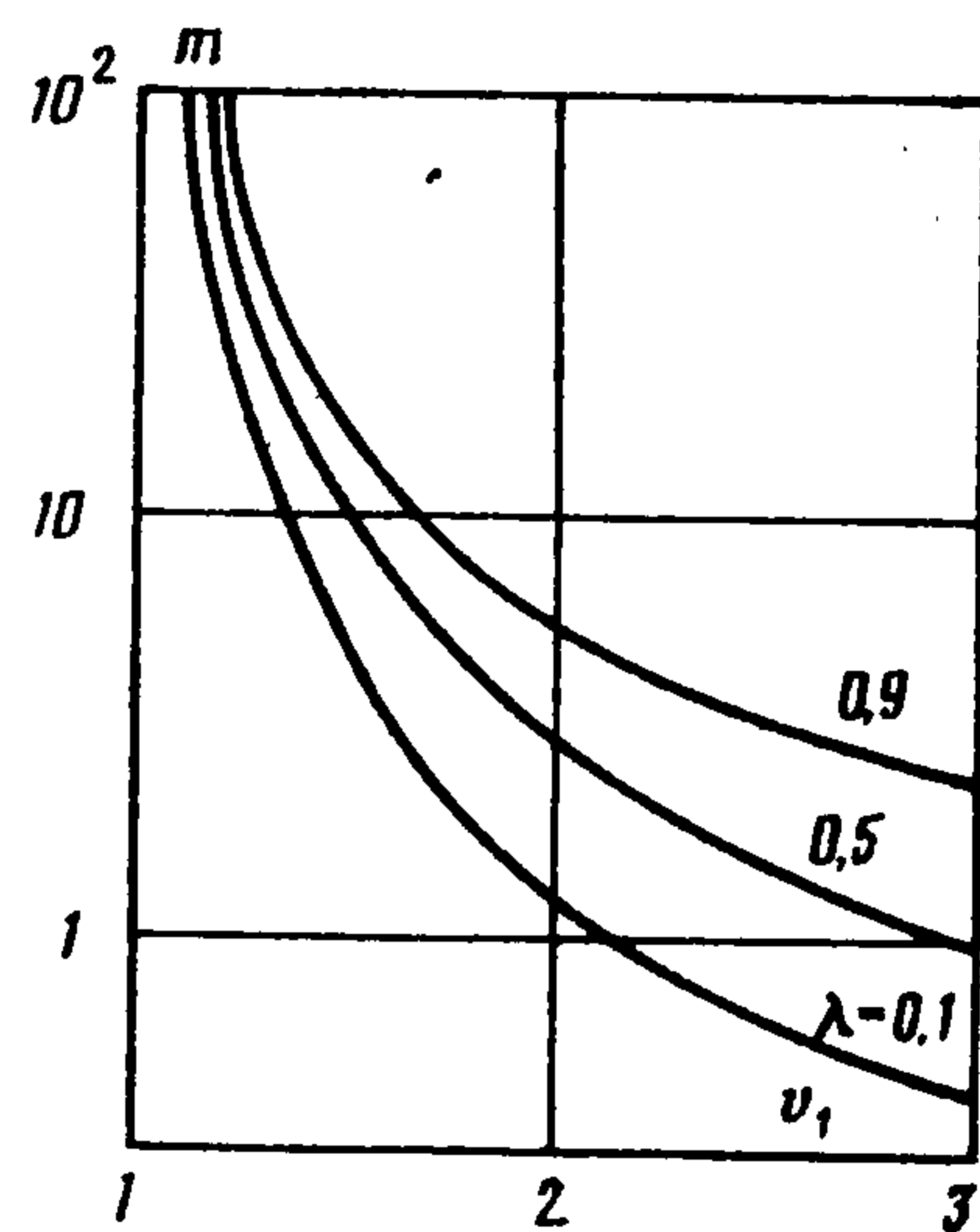
Формулы (3.5), (3.6) показывают, что частота  $\omega_* = |\text{Im } p_{14}|$  (наименьшая в спектре собственных частот балки) является основной, т. е. определяющей форму колебания балки с течением времени в окрестности точки приложения силы. Кривая  $I$  на фиг. 4 иллюстрирует ее изменение с ростом скорости  $v$  согласно уравнению (2.5). Параметр  $\beta$  имеет смысл групповой скорости движения волнового пакета и равен скорости распространения энергии. Отсюда следует, что перенос энергии в балке осуществляется от точки приложения силы на бесконечность. При этом изгибная волна не имеет фронта: в момент приложения силы возмущения охватывают всю балку. Действительно,

$$\beta(\alpha_k) \approx \mp 2^{3/4} \omega^{1/2}, \quad \alpha_k(\kappa_k i \omega) \approx \mp 2^{1/4} \omega^{1/2} \kappa_k \omega \rightarrow +\infty$$

т. е. групповая скорость не ограничена и бесконечно короткие волны мгновенно уходят в бесконечность. Этот дефект — следствие того, что уравнение (1.1) параболического типа.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим действие на балку постоянной силы

$$q(t) = H(t), \quad Q(p) = (p - 1/4\lambda)^{-1}$$

где  $H(t)$  — функция Хевисайда.

В соответствии с формулой (3.3) вклад полюса  $p_1 = 1/4\lambda$  описывает возмущения в балке, квази фронт которого распространяется со скоростями  $\beta^- < 0$  и  $\beta^+ > 0$ , т. е.

$$\chi_1 = \begin{cases} 0, & \beta > \beta^+, & \beta < \beta^- \\ 1, & \beta = \beta^-, & \beta = \beta^+ \\ 2, & \beta^- < \beta < \beta^+ \end{cases} \quad (\lambda > 0 \text{ или } \lambda = 0, v > v_0)$$

$$\chi_1 = \begin{cases} 0, & \beta \neq 0 \\ 2, & \beta = 0 \end{cases} \quad (\lambda = 0, 0 \leq v < v_0)$$

$$\beta^- = -\frac{\lambda}{4 \operatorname{Im} \alpha_1(p_1)}, \quad \beta^+ = -\frac{\lambda}{4 \operatorname{Im} \alpha_4(p_1)} \quad (\lambda > 0)$$

$$\beta^\pm = \begin{cases} 0, & 0 \leq v \leq v_0 \\ \pm v^{-1} [(v^4 - 1) - v^2 k_1 + 1/4 k_1^2]^{1/2}, & v > v_0 \end{cases} \quad (\lambda = 0)$$

где  $v_0$  вычисляется по формуле (2.6).

Таким образом, при  $v < v_0$ ,  $\lambda = 0$  с течением времени устанавливается симметричный, экспоненциально убывающий по  $\xi$  прогиб балки (при  $\lambda > 0$  происходит сдвиг профиля балки в сторону, противоположную движению силы), энергия которого не излучается на бесконечность, так как квази фронт отсутствует ( $\beta^- = \beta^+ = 0$ ); при  $v > v_0$  с течением времени решение представляет собой две разные по частоте и амплитуде синусоиды, распространяющиеся в противоположные стороны с групповыми скоростями  $\beta^+$  и  $\beta^-$ , причем их квази фронт «расплывается» (формулы (3.8), (3.9)). Если сила движется с критической скоростью  $v = v_0$  ( $\lambda = 0$ ), то  $I_k^1$  вычисляются по формулам (3.5), (3.6) при  $\beta \neq 0$  и по формулам (3.10), (3.11) при  $\beta = 0$ . Отсюда видно, что постоянная сила вызывает неограниченный рост прогиба балки в окрестности точки приложения силы.

Особенно наглядно возникновение резонанса при действии осциллирующей силы

$$q(t) = H(t) \exp(i\omega_0 t), \quad Q(p) = (p - i\omega_0)^{-1} \quad (\lambda = 0)$$

Появлению резонанса соответствует совпадение полюса  $p_1 = i\omega_0$  с одной из точек разветвления  $p_{14}$  или  $p_{23}$  (формулы (3.10), (3.11)). Разрешая уравнение (2.5) относительно  $v$ , можно вычислить соответствующие критические скорости движения.

*Действие силы, приложенной к сосредоточенной массе.* Рассмотрим действие импульсной силы  $P(t) = \delta(t)$ . При учете уравнения (1.2) имеем

$$Q(p) = [m(p - \frac{1}{4}\lambda)^2 h(p, 0) + 1]^{-1}$$

Особыми точками функции  $Q(p)$  служат точки разветвления  $p_{14}$ ,  $p_{23}$  и два комплексно сопряженных полюса, которые исчезают при  $v = v_0$ ,  $\lambda = 0$ . Проведенные исследования показывают, что при наличии сосредоточенной массы появляется критическая скорость движения нагрузки  $v_1$ , при превышении которой полюсы выходят в полуплоскость  $\text{Re } p > \frac{1}{4}\lambda$ , что приводит к экспоненциальному возрастанию решения пропорционально времени  $t$ . На фиг. 5 показана зависимость  $m$  от  $v_1$  для некоторых значений вязкости  $\lambda$  ( $k_1 = 0$ ), причем  $v_1 \equiv v_0$  при  $\lambda = 0$ . Аналогичные кривые были найдены ранее иным способом [4].

При  $m \gg 1$ ,  $0 \leq \lambda \ll 1$ ,  $k_1 = 0$  для вычисления полюсов функции  $Q(p)$  можно воспользоваться приближенной формулой, полученной методом возмущений [5]

$$p_{1,2} \approx \frac{1}{4}\lambda \pm i [8(1 - v^2)]^{1/4} m^{-1/2} \quad (0 \leq v < 1) \quad (4.1)$$

Если  $v = v_0$  ( $\lambda = 0$ ), то функция  $Q(p)$  не равна нулю в точках разветвления  $p_{14}$ ,  $p_{23}$  и асимптотики интегралов  $I_k^1$  вычисляются по формулам (3.5), (3.6). При  $v \neq v_0$  ( $\beta = 0$ ) имеют место оценки

$$\begin{aligned} I_k^1 &= O(t^{-3/2}) \quad (v > 0 \text{ или } k_1 > 0) \\ I_k^1 &= O(t^{-1/4}) \quad (v = k_1 = 0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, при  $v < v_0$ ,  $\lambda = 0$  импульсная сила вызывает незатухающие гармонические колебания в окрестности сосредоточенной массы, которые определяются вкладом полюсов  $p_1$  и  $p_2$ , с частотой  $\omega_* = |\text{Im } p_{1,2}|$  (и соответственно затухающие при наличии вязкости), являющейся наименьшей в спектре собственных частот балки.

Кривые 2 на фиг. 4 показывают изменение частоты  $\omega_*$  в зависимости от скорости движения массы  $m = 100$  при  $k_1 = 0$  (сплошная линия — точное решение, штриховая — приближенное решение, полученное по формуле (4.1). Отметим также, что полюсы  $p_1$  и  $p_2$  не вызывают появления квазифронта при  $\lambda = 0$ ,  $0 \leq v < v_0$ .

Рассмотрим действие осциллирующей силы при  $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} P(t) &= H(t) \exp(i\omega_0 t) \\ Q(p) &= (p - i\omega_0)^{-1} [mp^2 h(p, 0) + 1]^{-1} \end{aligned}$$

Если  $v = v_0$ , то асимптотики интегралов  $I_k^1$  ( $\beta = 0$ ) вычисляются по формулам (3.5), (3.6) при  $\omega_0 \neq 0$  и (3.10), (3.11) при  $\omega_0 = 0$ . Если  $0 \leq v < v_0$ , то при  $\omega_0 \neq \text{Im } p_{14}$  и  $\omega_0 \neq \text{Im } p_{23}$  для  $I_k^1$  имеют место оценки (4.2), а при  $\omega_0 = \text{Im } p_{14}$  или  $\omega_0 = \text{Im } p_{23}$

$$\begin{aligned} I_k^1 &= O(t^{-1/2}) \quad (v > 0 \text{ или } k_1 > 0), \\ I_k^1 &= O(t^{-3/4}) \quad (v = k_1 = 0) \end{aligned}$$

Таким образом, резонанс возникает лишь при  $|\omega_0| = \omega_*$  или  $\omega_0 = 0$  ( $v = v_0$ ). В первом случае прогиб балки возрастает пропорционально  $t$  (двукратный полюс у функции  $Q(p)$ ), а во втором — пропорционально  $t^{1/2}$ .

*Действие силы, приложенной к подрессоренной массе.* Уравнение колебания массы имеет вид

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} - \mu \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) - \varepsilon (y - z) = P(t) \quad (\xi = 0)$$

Рассмотрим действие импульсной силы  $P(t) = \delta(t)$ :

$$Q(p) = a(p) b^{-1}(p), \quad Z(p) = [a(p) h(p, 0) + 1] b^{-1}(p)$$

$$b(p) = m(p - 1/4\lambda)^2 a(p) h(p, 0) + \\ + m(p - 1/4\lambda)^2 + a(p), \quad a(p) = \mu(p - 1/4\lambda) + \varepsilon$$

$$z(t) = \frac{\exp(-1/4\lambda t)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} Z(p) e^{pt} dp$$

Особыми точками функций  $Q(p)$  и  $Z(p)$  являются точки разветвления  $p_{14}$ ,  $p_{23}$  и два комплексно сопряженных полюса, расположенные в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \leq 1/4\lambda$ .

При  $m \gg 1$ ,  $0 \leq \lambda \ll 1$ ,  $k_1 = \mu = 0$  для вычисления полюсов функции  $Q(p)$  можно воспользоваться приближенными формулами, полученными методом возмущений

$$p_{1,2} \approx 1/4\lambda \pm i \left\{ \frac{2\varepsilon \sqrt{2(1-v^2)}}{m [2\sqrt{2(1-v^2)} + \varepsilon]} \right\}^{1/2} \quad (0 \leq v < 1) \quad (4.3)$$

$$p_{1,2} = 1/4\lambda \pm i (\varepsilon/m)^{1/2} \quad (v = 1)$$

$$p_{1,2} \approx 1/4\lambda \pm i \left\{ \frac{\varepsilon \sqrt{(v^4-1)^3}}{m [\sqrt{(v^4-1)^3} + 1/4\lambda v \varepsilon]} \right\}^{1/2} \quad (v > 1)$$

Как и в случае движения сосредоточенной массы асимптотики интегралов  $I_k^1$  при  $\beta = 0$  (для любого  $v \geq 0$ ) оцениваются по формулам (4.2). Для функции прогиба рессоры имеют место соотношения

$$z(t) = \sum_{j=1}^2 \exp[(p_j - 1/4\lambda)t] \operatorname{res} Z(p_j) + I_z$$

$$I_z = \exp(-1/4\lambda t) \cos(\omega t + 1/4\pi) \left[ \frac{\theta_{11}}{\sqrt{\pi} m^2 (i\omega - 1/4\lambda)^4} t^{-3/2} + O(t^{-5/2}) \right]$$

$$(\omega = \operatorname{Im} p_{14}, \quad v > 0)$$

$$I_z = \exp(-1/4\lambda t) \cos(\omega t + 3/8\pi) \left[ \frac{28\sqrt{2} \omega^{3/4}}{m^2 (i\omega - 1/4\lambda)^4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) t^{-7/4} + O(t^{-11/4}) \right]$$

$$(\omega = \sqrt{\gamma/2}, \quad v = 0)$$

Таким образом, при  $v < v_0$ ,  $\lambda = 0$  импульсная сила вызывает незатухающие гармонические колебания балки в окрестности точки контакта  $\xi = 0$  и подрессоренной массы с частотой  $\omega_* = |\operatorname{Im} p_{1,2}|$  (соответственно затухающие при наличии вязкости), являющейся наименьшей в спектре собственных частот балки. При  $v > v_0$  полюсы  $p_1$  и  $p_2$  располагаются в полуплоскости  $\operatorname{Re} p < 1/4\lambda$ . Поэтому амплитуда колебаний балки и подрессоренной массы экспоненциально затухает. Как и в случае сосредоточенной массы, эти полюсы не приводят к возникновению квазифронта при  $\lambda = 0$ .

Кривые 3 на фиг. 4 показывают изменение частоты  $\omega_*$  в зависимости от скорости движения массы  $m = 100$  при  $k_1 = 0$  (сплошная линия — точное решение, штриховая — приближенное решение, полученное по формуле (4.3)).

Отметим, что при  $\lambda = \mu = 0$  действие осциллирующей силы  $P(t) = \exp(i\omega_* t)$  приводит к возникновению резонанса при  $v \leq v_0$  и к конечному (хотя и значительному) максимуму амплитуды колебаний при  $v > v_0$ .

Автор благодарит В. М. Александрова за научное руководство и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Якушев Н. З. Динамика деформируемых систем под воздействием движущихся нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казан. ун-та, 1985. Вып. 18. Ч. 1. С. 3—56.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
3. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
4. Денисов Г. Г., Кугушева Е. К., Новиков В. В. К задаче об устойчивости одномерных безграничных упругих систем. // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 691—696.
5. Найфа А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Химки

Поступила в редакцию  
4.V.1990