УДК 539.3

Б. И. Сметанин

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОГО ТЕЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ВКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (СИУ), возникающего в пространственных задачах теории упругости со смешанными условиями одностороннего отслаивания включений при осесимметричном кручении. Сингулярность учитывается при помощи точного решения уравнения, определяющего условия аналогичного отслаивания в плоской задаче для плоскости. Доказывается, что при определенных геометрических ограничениях решение исходного уравнения может быть получено методом последовательных приближений. В качестве примера рассматривается задача осесимметричного кручения слоя при помощи жесткого круглого диска, вложенного в этот слой и скрепленного с ним одной своей поверхностью. Возможность практической реализации этой задачи состоит в том, что через диск может передаваться на слой крутящий момент, приложенный к стержню, который приварен к центру диска перпендикулярно и протыкает часть слоя.

Решение одного типа СИУ [1], возникающего в задачах об отслоившихся включениях в упругих телах, имеет на концах промежутка интегрирования интегрируемую особенность. В приложениях, например в осесимметричных задачах об отслоившихся включениях в упругих телах [2, 3], возникает необходимость построения решения указанного интегрального уравнения, ограниченного на одном из концов промежутка интегрирования. Такое решение ниже строится методом «больших λ» [4].

1. Рассмотрим СИУ относительно функции $q(x)$

$$\pi q(x)+\int_{-1}^{1}\frac{q(\xi)\,d\xi}{\xi-x}+\frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1}q(\xi)\,k\Big(\frac{\xi-x}{\lambda}\Big)d\xi=\pi f(x)$$

$$(|x|\leqslant 1,\quad \lambda\in(0,\infty))\tag{1.1}$$

$$k(t)=\int_{0}^{\infty}[\Lambda_1(u)\sin ut+\Lambda_2(u)\cos ut]\,du\tag{1.2}$$

Функции $\Lambda_n(z)$ $(n=1,2)$ в плоскости комплексного переменного $z=u+iv$ мероморфны и действительны при $v=0$, на действительной оси они не имеют полюсов и при $|u|\to\infty$ удовлетворяют условию

$$\Lambda_n(u)=O(e^{-\varkappa_n|u|})\ (\varkappa_n>0;\ n=1,\ 2)\tag{1.3}$$

Свойства функций $\Lambda_n(u)$ позволяют сделать вывод о том, что функция $k(w)$ как функция комплексного переменного $w=t+i\tau$ регулярна в полосе $|t|<\infty$, $|\tau|<\varkappa_*=\min(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и при $|t|<\varkappa_*$ представима абсолютно сходящимся рядом [1]

$$k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nt^n\tag{1.4}$$

$$b_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_{0}^{\infty}\Lambda_2(u)\,u^{2n}\,du$$

$$b_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{0}^{\infty}\Lambda_1(u)\,u^{2n+1}\,du\quad(n=0,1,\ldots)$$

Из условий $\max |t| = 2/\lambda$ и $|t| < \varkappa_*$ следует, что решение интегрального уравнения (1.1), найденное при помощи представления (1.4), может быть использовано по крайней мере при $\lambda > \lambda_1 = 2/\varkappa_*$.

С целью получения решения СИУ (1.1), ограниченного при $x = -1$, рассмотрим СИУ

$$\pi q(x) + \int_{-1}^{1} \frac{q(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \pi\chi(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.5}$$

Оно имеет решение [5]

$$q(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{2}\,X(x)} + \frac{1}{2}\chi(x) - \frac{1}{2\pi}J(x) \tag{1.6}$$

$$Q = \int_{-1}^{1} q(\xi)\,d\xi, \qquad J(x) = \int_{-1}^{1} \frac{X(\xi)\chi(\xi)\,d\xi}{X(x)(\xi - x)}$$

$$X(x) = (1 + x)^{3/4}(1 - x)^{1/4}$$

При выполнении условия

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{\chi(\xi)}{Y(\xi)}\,d\xi, \qquad Y(x) = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{1/4} \tag{1.7}$$

из (1.6) может быть найдено ограниченное при $x = -1$ решение уравнения (1.5). С этой целью необходимо преобразовать интеграл, входящий в (1.6), следующим образом:

$$J(x) = Y(x) \int_{-1}^{1} \frac{\chi(\xi)\,d\xi}{Y(\xi)(\xi - x)} + \frac{1}{X(x)} \int_{-1}^{1} \frac{\chi(\xi)}{Y(\xi)}\,d\xi$$

В результате будем иметь

$$q(x) = \frac{1}{2}\chi(x) - \frac{1}{2\pi}Y(x) \int_{-1}^{1} \frac{\chi(\xi)\,d\xi}{Y(\xi)(\xi - x)} \tag{1.8}$$

Полагая в (1.7), (1.8);

$$\chi(x) = f(x) - \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^{1} q(\xi)\,k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi$$

получим

$$q(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2\pi}Y(x) \int_{-1}^{1} \frac{f(\xi)\,d\xi}{Y(\xi)(\xi - x)} + \frac{Y(x)}{2\pi^2\lambda} \int_{-1}^{1} q(\xi)F(\xi, x)\,d\xi \tag{1.9}$$

$$F(\xi, x) = -\frac{\pi}{Y(x)}k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) + \int_{-1}^{1} k\left(\frac{\xi - \eta}{\lambda}\right)\frac{d\eta}{Y(\eta)(\eta - x)}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{f(\xi)}{Y(\xi)}\,d\xi - \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\lambda} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{Y(\xi)} \int_{-1}^{1} q(\eta)k\left(\frac{\eta - \xi}{\lambda}\right)d\eta \tag{1.10}$$

Теорема 1. Если

$$f(x) \in H_n^{\alpha}(-1, 1), \; n \geqslant 0, \; 1/4 < \alpha \leqslant 1 \tag{1.11}$$

а решение СИУ (1.1) существует в $L_p(-1, 1)$, $p > 1$, и выполнено условие (1.10), то решение этого уравнения при всех $\lambda \in (0, \infty)$ имеет вид [1]

$$q(x) = \Psi(x)Y(x), \quad \Psi(x) \in C_n(-1, 1) \tag{1.12}$$

Лемма 1. При выполнении условий (1.10), (1.11) любое решение СИУ из класса $L_p(-1, 1)$, $p > 1$ является также решением СИУ (1.9) и наоборот.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2 [1].

Уравнение (1.9) преобразуем к СИУ относительно функции $\Psi(x)$:

$$\Psi = \Psi_0 + A(\Psi) \tag{1.13}$$

$$\Psi_0(x) = \frac{f(x)}{2Y(x)} - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)\,d\xi}{Y(\xi)(\xi - x)}$$

$$A(\Psi) \equiv \frac{1}{2\pi^2\lambda}\int_{-1}^{1}\Psi(\xi)\,Y(\xi)\,F(\xi, x)\,d\xi \tag{1.14}$$

Лемма 2. Оператор A, определяемый второй формулой (1.14), действует в пространстве $C(-1, 1)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 25.2 [4]. При этом функцию $F(\xi, x)$ с использованием значения интеграла (1.21) [1] следует преобразовать к виду

$$F(\xi, x) = -\pi\sqrt{2}\,k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) + I(\xi, x)$$

$$I(\xi, x) = \int_{-1}^{1}\left[k\left(\frac{\xi-\eta}{\lambda}\right) - k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)\right]\frac{d\eta}{Y(\eta)(\eta - x)}$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x) \in H^{\alpha}(-1, 1)$, $1/4 < \alpha \leqslant 1$, и справедливо неравенство

$$\lambda > \lambda_2 = 1/4\,(D_0 + \sqrt{D_0^2 + 4D_1}) \tag{1.15}$$

$$D_n = \max|k^{(n)}(t)|, \quad t \in [0, \infty]$$

В этом случае решение СИУ (1.13) в классе $C(-1, 1)$ существует, единственно и может быть найдено методом последовательных приближений.

Для доказательства теоремы получим оценку

$$|F(\xi, x)| \leqslant \pi\sqrt{2}\,D_0 + |I(\xi, x)| < \pi\sqrt{2}\,D_0 + \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2}}\,D_1$$

что позволяет определить

$$\|A(\Psi)\|_C = \frac{1}{2\pi^2\lambda}\max_{|x|\leqslant 1}\left|\int_{-1}^{1}\Psi(\xi)\,Y(\xi)\,F(\xi, x)\,d\xi\right| < \|\Psi\|_C\,\frac{1}{2\lambda}\left(D_0 + \frac{1}{2\lambda}D_1\right) \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, что при выполнении условия (1.15) оператор A будет сжимающим в $C(-1, 1)$.

Функцию $\Psi(x)$ удобно определять в виде ряда

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x)\,\lambda^{-n} \tag{1.17}$$

Для нахождения функций $\Psi_n(x)$ нужно внести в (1.13) разложения (1.17), (1.4) и приравнять затем выражения при одинаковых степенях λ в левой и правой частях полученного равенства. В результате будем иметь

$$\Psi_1(x) = -\frac{\sqrt{2}\,b_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\Psi_0(\xi)\,Y(\xi)\,d\xi$$

$$\Psi_2(x) = \frac{\sqrt{2}\,b_1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\Psi_0(\xi)\,Y(\xi)\left(x - \xi - \frac{1}{2}\right)d\xi - \frac{\sqrt{2}\,b_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\Psi_1(\xi)\,Y(\xi)\,d\xi \tag{1.18}$$

и т. д. функция $\Psi_0(x)$ дается первой формулой (1.14). В результате определения функций $\Psi_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ приближенное решение исходного СИУ (1.1) будет даваться формулой

$$q(x) = Y(x) \sum_{n=0}^{N} \Psi_n(x) \lambda^{-n} + O(\lambda^{-N-1}) \tag{1.19}$$

Соотношение (1.19) может быть использовано при $\lambda_* < \lambda < \infty$, где $\lambda_* = \max(\lambda_1, \lambda_2)$.

2. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о равновесии упругого слоя толщиной $2h$, в срединной плоскости которого расположена тонкая жесткая пластинка радиуса a. Верхняя грань пластинки, при $z = +0$, $0 \leqslant r \leqslant a$ (r, φ, z — цилиндрические координаты) скреплена с упругой средой, нижняя грань при $z = -0$, $0 \leqslant r \leqslant a$ отслоилась. Верхняя грань слоя при $z = h$, $0 \leqslant r < \infty$ свободна от нагрузки, нижняя грань при $z = -h$, $0 \leqslant r < \infty$ скреплена с жестким основанием. К пластинке приложен крутящий момент M, вызвавший ее поворот вокруг оси z на угол α.

Эта задача сводится к решению уравнения Ламе относительно компоненты вектора перемещения u_φ при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant r \leqslant a, u_\varphi = -\alpha r \quad (z = +0) \\ \partial u_\varphi / \partial z = 0 \quad (z = -0) \\ 0 \leqslant r < \infty, \ \partial u_\varphi / \partial z = 0 \quad (z = h) \\ u_\varphi = 0 \quad (z = -h) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Методом интегральных преобразований задача с граничными условиями (2.1) приводится к решению СИУ (1.1). При этом

$$\begin{gathered} f(x) = 4\alpha a(x + C), \ \Lambda_1(u) = \operatorname{sch} 2u \\ \Lambda_2(u) = \operatorname{th} 2u - 1, \ \lambda = h/a \end{gathered}$$

Здесь C — постоянная, подлежащая определению. Напряжения $\tau_{\varphi z}$ в области контакта пластинки с упругой средой выражаются через функцию $q(x)$ формулой

$$\tau_{\varphi z}(r, +0) = \frac{\mu}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^\alpha \left[q\left(-\frac{\xi}{a}\right) - q\left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \quad (0 \leqslant r \leqslant a) \tag{2.2}$$

(μ — модуль сдвига). Можно показать, что структура решения СИУ (1.1), определяемая формулой (1.12), обеспечивает интегрируемую особенность у функции $\tau_{\varphi z}$ в форме (2.2): $\tau_{\varphi z} \sim O((a - r)^{-3/4})$ при $r \to a - 0$.

С функцией $q(x)$ связан также скачок перемещений точек разреза упругой среды при переходе от одного берега разреза к другому

$$u_\varphi(r, +0) - u_\varphi(r, -0) = -\frac{1}{\pi r} \int_r^\alpha \left[q\left(\frac{\xi}{a}\right) + q\left(-\frac{\xi}{a}\right) \right] \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что интегральная характеристика решения Q должна равняться нулю. Постоянная C определяется из условия (1.10). Связь между параметрами M и α может быть получена из формулы

$$M = 2\pi \int_0^a r^2 \tau_{\varphi z}(r, +0)\, dr = 4\mu a^2 \int_{-1}^{1} \xi q(\xi)\, d\xi \tag{2.4}$$

(при выводе последнего равенства учтено соотношение (2.2)).

Для рассматриваемой задачи $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_2 = 4$, $\varkappa_* = 2$, $\lambda_1 = 1$, $D_0 = 0{,}347$, $D_1 = 0{,}460$, $\lambda_2 = 0{,}437$, $\lambda_* = 1$, $b_0 = -{}^1/_2 \ln 2$, $b_1 = {}^1/_2 G$ (G — постоянная Каталана):

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{4n+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \zeta(2n + 1)$$

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m - 1)^{2n+2}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\zeta(n)$ — дзета-функция Римана.

Проведя вычисления по формулам (1.14), (1.18) для рассматриваемого случая и исключая затем постоянную C, получим

$$q(x) = 2\sqrt{2}\alpha a Y(x)\left[x - \frac{1}{4} + \frac{5}{16}b_2\left(x - \frac{1}{4}\right)\lambda^{-3} - \frac{15}{32}b_3\left(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}\right)\lambda^{-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{32}b_4\left(4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{19}{5}x - \frac{13}{40}\right)\lambda^{-5} + O(\lambda^{-6})\right] \qquad (2.5)$$

$$b_2 = 0{,}02817, \quad b_3 = -0{,}1236, \quad b_4 = -0{,}001899$$

Внося $q(x)$ в форме (2.5) в (2.4), найдем связь между моментом M и углом поворота пластинки α:

$$M = \frac{5}{2}\pi\mu\alpha a^3\left[1 + \frac{5}{16}b_2\lambda^{-3} + \frac{15}{64}b_3\lambda^{-4} + \frac{219}{256}b_4\lambda^{-5} + O(\lambda^{-6})\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сметанин Б. И.* Об одном интегральном уравнении и его приложении к задачам о тонких отслоившихся включениях в упругих телах // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 784—790.
2. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
3. *Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Отслоившееся включение в упругом полупространстве // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 71—78.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
6.VII.1990