Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3

А. Ю. Беляев

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТОВ

Рассматривается задача об оптимизации электропроводящих свойств двухфазного композита. Ищется наилучшая геометрия расположения фаз, из которых составлен композит. В некоторых случаях наилучшая структура композита представляет собой предел мелкомасштабных структур, у которых области, занимаемые фазами, дробятся на куски со стремящимися к нулю размерами. Авторам работы [1] принадлежит идея использовать в такой ситуации для построения оптимизирующих последовательностей структур теорию усреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами. Ниже теория усреднения используется для решения плоской задачи об электрическом токе в кольце, заполненном двухфазным композитом с фиксированной концентрацией фаз. Найдена мелкомасштабная геометрия расположения фаз композита, при которой электрическое сопротивление кольца минимально.

1. Постановка задачи. Рассматривается двухфазный композит, занимающий область V на плоскости. Эта область разбита на две части V_+ и V_-, которые заполнены электропроводящими материалами с электропроводностями σ_+ и σ_- (фиг. 1). На двух кусках границы области Σ_1 и Σ_2 заданы значения электрического потенциала φ_1 и φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$). Оставшаяся часть границы электроизолирована. Величина тока J через область V зависит от геометрии расположения областей V_+ и V_- в V, т. е. от структуры композита. Требуется найти структуру, для которой ток максимален или минимален. При этом считаются заданными площади областей V_+ и V_- или, другими словами, концентрации фаз композита.

Если структура композита задана, то ток J и электрический потенциал $\varphi(x)$ можно определить при помощи вариационного принципа

$$
\begin{gathered}
(\varphi_2-\varphi_1)J=\inf\langle\sigma(x)(\nabla\varphi(x))^2\rangle \\
\sigma(x)=\Gamma(x)\sigma_+ + (1-\Gamma(x))\sigma_- = F(\Gamma(x))
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

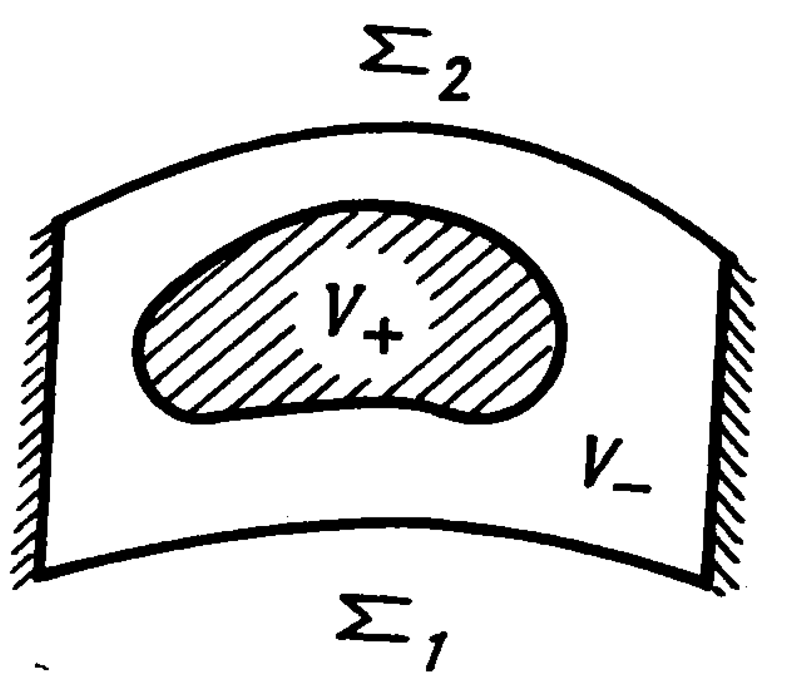
Здесь $\Gamma(x)$ — характеристическая функция области V_+, равная единице на V_+ и нулю на V_-, она задает структуру композита. Местная электропроводность $\sigma(x)$ принимает соответственно значения σ_+ и σ_-. Угловыми скобками обозначен интеграл по области V от заключенной в них функции. Нижняя грань функционала в правой части равенства (1.1) берется по всем пробным функциям $\varphi(x)$, принимающим значения φ_1 и φ_2 на Σ_1 и Σ_2. Электрический потенциал доставляет минимум этому функционалу и удовлетворяет уравнениям

$$
\operatorname{div}\mathbf{j}(x)=0,\quad \mathbf{j}(x)=-\sigma(x)\nabla\varphi(x)
$$

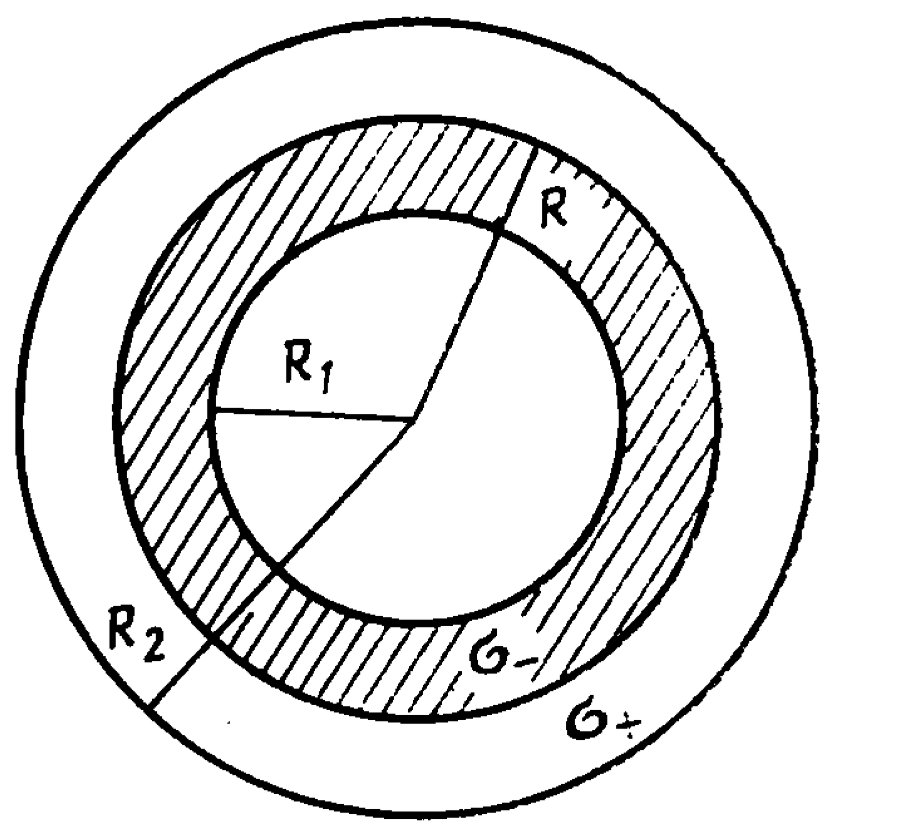
а также условию непрерывности нормальной составляющей плотности тока $\mathbf{j}(x)$ на границах раздела фаз.

Ток J является функционалом от характеристической функции $\Gamma(x)$, заданным неявно выражением (1.1). Задача состоит в максимизации (или минимизации) этого функционала по всем характеристическим функциям с заданным средним значением.

Поскольку величина тока пропорциональна разности потенциалов, при решении конкретных задач удобно вместо тока J исследовать удельную



Фиг. 1



Фиг. 2

проводимость $\bar{\sigma}$, связанную с током формулой

$$J = A\bar{\sigma}\,(\varphi_2 - \varphi_1)$$

где зависящая только от области V постоянная A выбирается так, чтобы при $\sigma_+ = \sigma_- = \sigma$ получилось $\bar{\sigma} = \sigma$. Для нахождения A необходимо решить задачу о токе через область V, заполненную однородным материалом.

Пример 1. Наиболее прост для исследования случай, когда область V — прямоугольник, у которого Σ_1 и Σ_2 — противоположные стороны. В задаче о максимизации удельной проводимости $\bar{\sigma}$ оптимальной структурой будет такая, в которой материалы расположены слоями, параллельными изолированным стенкам прямоугольника, а в задаче о минимизации $\bar{\sigma}$ — слоями, перпендикулярными к этим стенкам. Максимальное и минимальное значения удельной проводимости определяются формулами Фойгхта и Рейсса

$$\bar{\sigma}_{\max} = F(c) = c\sigma_+ + (1 - c)\,\sigma_-, \quad \bar{\sigma}_{\min} = (c\sigma_+^{-1} + (1 - c)\,\sigma_-^{-1})^{-1}$$

где c и $1 - c$ — доли площади, занимаемой материалами с электропроводностями σ_+ и σ_- соответственно. Отметим неединственность решения этих задач: оптимальна любая слоистая структура независимо от толщины и количества слоев.

Пример 2. В задаче о минимизации удельной проводимости кольца, задаваемого в полярных координатах соотношением $R_1 < r < R_2$, оптимальная структура единственна (фиг. 2). Внутренняя часть кольца $R_1 < r < R$ должна быть заполнена плохопроводящей фазой, а внешняя $R < r < R_2$ — материалом с бóльшей проводимостью. Примем без ограничения общности, что $\sigma_+ > \sigma_-$. Тогда радиус R, определяющий границу раздела фаз, и минимальная удельная проводимость $\bar{\sigma}_{\min}$ вычисляются по формулам

$$R^2 = cR_1^2 + (1 - c)\,R_2^2$$
$$\bar{\sigma}_{\min} = (\sigma_-^{-1}\ln R/R_1 + \sigma_+^{-1}\ln R_2/R)^{-1}\ln R_2/R_1 \tag{1.2}$$

Доказательство. Для структуры, изображенной на фиг. 2, задача электростатики осесимметрична и легко решается. Удельная проводимость этой структуры вычисляется по формулам (1.2). При вычислениях требуется значение нормировочного множителя $A = 2\pi\,(\ln R_2/R_1)^{-1}$, которое тоже явно находится ввиду осесимметричности однородной задачи. Требуется доказать, что для остальных структур удельная проводимость больше найденной.

Радиальная составляющая E_r вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ удовлетворяет соотношению

$$\langle E_r(x)\,r^{-1}\rangle = -2\pi\,(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.3}$$

в чем можно убедиться интегрированием по частям. Справедливо неравенство

$$(\varphi_2 - \varphi_1)\,J \geqslant \inf\,\langle\sigma(x)\,E^2(x)\rangle \tag{1.4}$$

где нижняя грань берется на множестве всех необязательно потенциальных векторных полей $\mathbf{E}(x)$, удовлетворяющих равенству (1.3), т. е. на более широком классе функций, чем в вариационном принципе (1.1). Вычисление этой нижней грани после учета ограничения (1.3) с помощью множителя Лагранжа представляет собой алгебраическую задачу, решение которой имеет вид

$$\inf\,\langle\sigma(x)\,E^2(x)\rangle = 4\pi^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2\,\langle\sigma^{-1}(x)\,r^{-2}\rangle^{-1}$$

Усилим неравенство (1.4), минимизировав его правую часть по всем структурам $\Gamma(x)$. Для этого минимизирующую структуру необходимо выбрать так, чтобы величина $\sigma(x)$ была больше в тех точках, где больше r, т. е. во внешней части кольца. Получится структура, изображенная на фиг. 2, где граница раздела фаз определяется заданной концентрацией материалов. Значение правой части неравенства (1.4) для этой структуры равно $A\bar{\sigma}_{\min}(\varphi_2-\varphi_1)^2$, а для всех остальных структур оно больше. Таким образом, получена оценка снизу для тока и, следовательно, для удельной проводимости

$$(\varphi_2-\varphi_1)J = A\bar{\sigma}(\varphi_2-\varphi_1)^2 \geqslant A\bar{\sigma}_{\min}(\varphi_2-\varphi_1)^2$$

которая завершает доказательство.

Исследование поставленной задачи в общем случае затруднено следующими обстоятельствами. Во-первых, множество характеристических функций не обладает линейной структурой, т. е. их нельзя складывать и умножать на число. Это делает невозможным применение большинства методов вариационного исчисления. Во-вторых, для рассматриваемого класса задач оптимального управления отсутствуют теоремы существования. Следовательно, верхняя или нижняя грань функционала J может не достигаться ни на какой структуре $\Gamma(x)$, а только на некоторых последовательностях структур $\Gamma_n(x)$. При больших n структуры могут носить нерегулярный, «дробленый» характер: чтобы улучшать свойства композита, необходимо все более усложнять его структуру.

Такая ситуация впервые обнаружена в работе [1] и, по-видимому, типична в задачах оптимизации свойств композитов [2, 3]. Для нахождения оптимизирующих последовательностей структур полезно переформулировать задачу, обобщив понятие структуры композита и расширив область определения функционала J. Обобщенные структуры удается описать средствами, более удобными для применения анализа, чем последовательности характеристических функций.

2. Обобщенная постановка задачи. Следуя идее авторов работы [1], будем искать оптимизирующие последовательности структур в виде $\Gamma_n(x)=\Gamma(x,\ nx)$, где функция $\Gamma(x, y)$ периодически зависит от y и принимает значения 0 и 1. Второй аргумент функции $\Gamma(x, nx)$ при больших значениях n заставляет характеристическую функцию быстро осциллировать. Поэтому структура $\Gamma_n(x)$ в окрестности каждой точки x представляет собой периодически неоднородный композит, геометрия ячеек периодичности которого медленно меняется от ячейки к ячейке вместе с первым аргументом функции $\Gamma(x, y)$. Описанные последовательности будем называть локально-периодическими обобщенными структурами.

В окрестности каждой точки x локально-периодическая структура характеризуется, в частности, локальными концентрациями $c(x)$ и $1-c(x)$ материалов с электропроводностями σ_+ и σ_- соответственно и эффективным тензором электропроводности $\sigma_{ij}(x)$. Функция $c(x)$ является слабым пределом последовательности характеристических функций $\Gamma_n(x)$, а $\sigma_{ij}(x)$ — G-пределом местных электропроводностей.

В силу теорем усреднения [4] справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\inf_\varphi\langle F(\Gamma_n(x))(\nabla\varphi(X))^2\rangle = \inf_\varphi\langle\sigma_{ij}(x)\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi\rangle$$

позволяющее распространить функционал J, заданный на множестве обычных структур, на локально-периодические обобщенные структуры:

$$(\varphi_2-\varphi_1)J = \inf_\varphi\langle\sigma_{ij}(x)\nabla_i\varphi(x)\nabla_j\varphi(x)\rangle \tag{2.1}$$

При фиксированном значении локальной концентрации $c(x)$ в точке x эффективный тензор электропроводностей $\sigma_{ij}(x)$ может принимать различные значения в зависимости от локального поведения функции $\Gamma(x, y)$. Множество $G(c(x))$ таких значений называется множеством достижимости. Для рассматриваемого класса задач множество достижимости описано в работе [1]. По функциям $c(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$ можно восстановить (не единственным образом) последовательности структур $\Gamma_n(x)$. Такие последовательности были предъявлены в [1].

При $c(x) = 0$ и $c(x) = 1$ множество $G(c(x))$ сжимается в точку $\sigma_-\delta_{ij}$ или $\sigma_+\delta_{ij}$ соответственно. При прочих значениях $c(x)$ множество достижимости занимает целую область в пространстве квадратных симметричных матриц и эффективный тензор электропроводностей обретает некоторую независимость. Отметим, что обычные структуры можно рассматривать как обобщенные с характеристической функцией $\Gamma_n(x)$, не зависящей от n. Локальная концентрация и эффективный тензор электропроводностей для обычных структур совпадают с характеристической функцией $\Gamma(x)$ и шаровым тензором местных электропроводностей $\sigma(x)\,\delta_{ij}$, а вариационный принцип (1.1) — с вариационным принципом (2.1).

Обобщенный ток J зависит от эффективного тензора электропроводностей $\sigma_{ij}(x)$, входящего в правую часть определения (2.1), и от локальной концентрации $c(x)$, фиксирующей множество достижимости. Обобщенная формулировка задачи оптимизации состоит в максимизации (или минимизации) тока J по всем функциям $c(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, таким, что

$$\langle c(x)\rangle = cV,\ 0 \leqslant c(x) \leqslant 1,\ \sigma_{ij}(x) \in G(c(x)) \qquad (2.2)$$

Первое условие означает, что доля площади, занятой каждым из материалов, фиксирована и равна c для материала с электропроводностью σ_+.

Обобщенная формулировка отличается от первоначальной только тем, что локальной концентрации $c(x)$ разрешается принимать значения, отличные от 0 и 1. При этом появляется дополнительный оптимизационный параметр — эффективный тензор электропроводностей $\sigma_{ij}(x)$, который первоначально был жестко связан с $c(x)$. Такое расширение области определения позволяет доказать теорему существования обобщенного решения задачи о максимизации (и минимизации) тока J в классе ограниченных измеримых функций $c(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, по которым восстанавливается искомая оптимизирующая последовательность $\Gamma_n(x)$. Обобщенное решение может быть неединственным.

Для решения конкретных задач полезно учесть, что J — вогнутый функционал от $c(x)$, $\sigma_{ij}(x)$, а функционал J^{-1} — вогнутый по переменным $c(x)$, $\sigma_{ij}^{-1}(x)$. В первоначальной формулировке этих свойств не было, так как функционал был задан не на линейном множестве.

Приведенные выше примеры показывают, что среди решений могут оказаться такие, у которых локальная концентрация $c(x)$ принимает значения 0 и 1 и будет характеристической функцией некоторой области V_+. Эти решения не являются обобщенными. Возможна также ситуация, когда необобщенных решений нет.

3. Задача о кольце с наименьшим электрическим сопротивлением. Рассмотрим задачу о максимизации удельной проводимости кольца (фиг. 2), заполненного материалами с электропроводностями σ_+, σ_- $(\sigma_+ > \sigma_-)$. Будем искать обобщенную оптимальную структуру с локальной концентрацией $c(x)$ и эффективной электропроводностью $\sigma_{ij}(x)$. Из осесимметричности задачи и вогнутости функционала J следует, что среди оптимальных обобщенных структур имеется хотя бы одно осесимметричное решение. Под осесимметричностью обобщенного решения понимается осевая симметрия функций $c(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$. Структуры $\Gamma_n(x)$, составляющие оптимизирующую последовательность, могут этой симметрией не обладать. Для осесимметричного тензора $\sigma_{ij}(x)$ электрический потенциал $\varphi(x)$, доставляющий минимум правой части соотношения (2.1), зависит только от полярного радиуса r и удовлетворяет уравнению $r\sigma_r(r)\,\varphi'(r))' = 0$, где $\sigma_r(r)$ — радиальная составляющая тензора $\sigma_{ij}(x)$. Решив это уравнение с граничными условиями φ_1 и φ_2 на внутренней и внешней части кольца, можно привести соотношение (2.1) к виду

$$(\varphi_2-\varphi_1)J=\frac{2\pi(\varphi_2-\varphi_1)^2}{H(\sigma)},\quad H(\sigma)=\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r\sigma_r(r)}$$

Поскольку для кольца ток и удельная проводимость $\bar{\sigma}$ связаны соотношением $J = 2\pi(\ln R_2/R_1)^{-1}\bar{\sigma}(\varphi_2-\varphi_1)$, то:

$$\bar{\sigma}=H^{-1}(\sigma)\ln R_2/R_1 \tag{3.1}$$

Чтобы максимизировать удельную проводимость $\bar{\sigma}$ в классе осесимметричных обобщенных структур, необходимо минимизировать функционал $H(\sigma)$ по всевозможным локальным концентрациям $c(r)$ и эффективным радиальным электропроводностям $\sigma_r(r)$. Зафиксируем функцию $c(r)$ и минимизируем функционал J по функциям $\sigma_r(r)$. Эффективный тензор электропроводностей надо выбрать так, чтобы его радиальная компонента $\sigma_r(r)$ при каждом значении полярного радиуса r была как можно больше. Тогда функционал $H(\sigma)$ примет наименьшее значение. Множество достижимости $G(c(r))$ устроено так, что наибольшее возможное значение компоненты эффективного тензора в каком-либо направлении вычисляется по формуле Фойгхта и достигается на слоистой структуре со слоями, параллельными этому направлению [1]. Поэтому в функционале $H(\sigma)$ следует положить $\sigma_r(r)=F(c(r))$. В точках, где $0<c(r)<1$, оптимальная обобщенная структура имеет вид последовательности слоистых структур со слоями, идущими в радиальном направлении. В точках, где $c(r)=0$ или $c(r)=1$, располагаются чистые фазы.

Теперь необходимо минимизировать функционал $H(\sigma)$ по локальным концентрациям $c(r)$, удовлетворяющим условию (2.2). Без этого условия задача сводилась бы к минимизации подынтегрального выражения функционала $H(\sigma)$ и приводила бы к тривиальному ответу: для увеличения удельной проводимости кольца его надо целиком заполнить хорошо проводящим материалом, если количество этого материала не лимитировано.

Вместо локальной концентрации $c(r)$ будем использовать функцию $F(c(r)) = \sigma_r(r)$. Ограничение (2.2) в терминах этой новой переменной при учете осевой симметрии примет вид

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} r\sigma_r(r)\,dr=F(c)\frac{R_2^2-R_1^2}{2},\quad \sigma_-\leqslant\sigma_r(r)\leqslant\sigma_+ \tag{3.2}$$

При минимизации функционала $H(\sigma)$ учтем ограничение (3.2) с помощью множителя Лагранжа ω. Тогда задача сведется к минимизации при каждом значении r выражения $h=(r\sigma_r(r))^{-1}+\omega r\sigma_r(r)$. Функция $\sigma_r(r)$, доставляющая минимум этому выражению, зависит от неизвестного множителя Лагранжа ω. После ее подстановки в формулу (3.2) получится уравнение для нахождения ω. Выразив из этого уравнения ω через исходные данные задачи R_1, R_2, σ_+, σ_-, c, окончательно найдем эффективную электропроводность $\sigma_r(r)$ и, следовательно, искомую обобщенную оптимальную струкуру. Максимальная удельная проводимость кольца $\bar{\sigma}_{\max}$ при известной функции $\sigma_r(r)$ вычисляется по формуле (3.1).

Минимум выражения h при фиксированном r может достигаться либо внутри интервала $\sigma_-<\sigma_r(r)<\sigma_+$, либо на его концах в зависимости от значения параметров r и ω. Заметим, что множитель Лагранжа ω должен быть положительным, так как в противном случае h будет монотонно зависеть от $\sigma_r(r)$ и для минимизации h придется при всех значениях r положить $\sigma_r(r)=\sigma_+$, а это невозможно в силу ограничения (3.2).

Можно убедиться, что при $\omega>0$ минимум выражению h доставляет функция $\sigma_r(r)$, определенная равенством

$$\sigma_r(r)=\begin{cases}\sigma_+, & r<R_+\\ r^{-1}\omega^{-1/2}, & R_+<r<R_-\\ \sigma_-, & r>R_-\end{cases} \tag{3.3}$$

$$R_\pm=\sigma_\pm^{-1}\omega^{-1/2}$$

В промежутке $R_+<r<R_-$ величина $\sigma_r(r)$ монотонно убывает от σ_+ до σ_-. Локальная концентрация при этом убывает от 1 до 0. Числа R_+ и R_- задают в кольце границы раздела между чистыми фазами и обобщенной слоистой структурой.

Отметим, что величины R_+ и R_- могут вылезать за пределы отрезка (R_1, R_2). Поэтому возможны случаи, когда у оптимальной структуры отсутствует одна из чистых фаз или обе сразу.

Предположим сначала, что у оптимальной структуры есть все три фазы, т. е. выполняются неравенства

$$R_1 < R_+ < R_- < R_2 \tag{3.4}$$

Для нахождения множителя Лагранжа ω подставим функцию, определенную формулой (3.3), в соотношение (3.2). Получим

$$\omega^{-1} = \sigma_+\sigma_- \left(cR_2^2 + (1-c)\,R_1^2\right)$$

Проверка неравенств (3.4) определит область исходных данных задачи, при которых рассматриваемый трехфазный случай реализуется. Эти неравенства можно привести к виду

$$\begin{gathered} c\sigma_- \left(R_2^2 - R_1^2\right) > (\sigma_+ - \sigma_-)\,R_1^2 \\ (1-c)\,\sigma_+ \left(R_2^2 - R_1^2\right) > (\sigma_+ - \sigma_-)\,R_2^2 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Максимальная удельная проводимость $\bar{\sigma}_{\max}$ при таких ограничениях на исходные данные вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_{\max}^{-1} \ln R_2/R_1 = \sigma_-^{-1} - \sigma_+^{-1} + (\ln R_2/R_-)\,\sigma_-^{-1} + (\ln R_+/R_1)\,\sigma_+^{-1}$$

Кроме рассмотренного возможны еще три варианта взаимного расположения интервалов (R_1, R_2) и (R_+, R_-).

В случае, когда выполняются неравенства

$$R_1 < R_+ < R_2 < R_-$$

оптимальная структура состоит из двух слоев. Внутренняя часть кольца $R_1 < r < R_+$ заполняется материалом с электропроводностью σ_+, а оставшаяся часть — композитом из мелко нарезанных в радиальном направлении волокон. Радиальная компонента эффективного тензора электропроводностей $\sigma_r(r)$ и величина R_+ вычисляются попрежнему по формулам (3.3), в которых множитель Лагранжа ω, вычисленный из уравнения (3.2), имеет вид

$$\omega^{-1} = \sigma_+^2 \left\{R_2 - \left[\sigma_+^{-1}(\sigma_+ - \sigma_-)(1-c)\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2$$

Область исходных данных, при которых этот случай реализуется, определяется неравенствами

$$\begin{gathered} (1-c)(\sigma_+ - \sigma_-)(R_2 + R_1) < \sigma_+ (R_2 - R_1) \\ (1-c)\,\sigma_+ \left(R_2^2 - R_1^2\right) < (\sigma_+ - \sigma_-)\,R_2^2 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Максимальная удельная проводимость $\bar{\sigma}_{\max}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\sigma}_{\max}^{-1} \ln R_2/R_1 = \sigma_+^{-1}R_+^{-1}(R_2 - R_+) + \sigma_+^{-1} \ln R_+/R_1$$

В случае, когда выполняются неравенства

$$R_+ < R_1 < R_- < R_2$$

оптимальная структура тоже состоит из двух слоев, однако внутренняя часть кольца $R_1 < r < R_-$ заполняется слоистым композитом, а внешняя — плохопроводящим материалом с электропроводностью σ_-. Соотношения, характеризующие этот случай, имеют вид

$$\begin{gathered} \omega^{-1} = \sigma_-^2 \left\{R_1 + \left[\sigma_-^{-1}(\sigma_+ - \sigma_-)\,c\left(R_2^2 - R_1^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2 \\ c\,(\sigma_+ - \sigma_-)(R_2 + R_1) < \sigma_- (R_2 - R_1) \\ c\sigma_- \left(R_2^2 - R_1^2\right) < (\sigma_+ - \sigma_-)\,R_1^2 \\ \bar{\sigma}_{\max}^{-1} \ln R_2/R_1 = \sigma_-^{-1}R_-^{-1}(R_- - R_1) + \sigma_-^{-1} \ln R_2/R_- \end{gathered} \tag{3.7}$$

И, наконец, в случае

$$R_+ < R_1 < R_2 < R_-$$

однослойная обобщенная оптимальная структура характеризуется соотношениями

$$\begin{gathered} \omega^{-1/2} = {}^1/_2 F(c)\,(R_2 + R_1) \\ c\,(\sigma_+ - \sigma_-)(R_2 + R_1) > \sigma_- (R_2 - R_1) \\ (1-c)(\sigma_+ - \sigma_-)(R_2 + R_1) > \sigma_+ (R_2 - R_1) \\ \bar{\sigma}_{\max} = {}^1/_2 F(c)\,(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)^{-1} \ln R_2/R_1 \end{gathered} \tag{3.8}$$

Области исходных данных задачи, задаваемые неравенствами (3.5)—(3.8), не пересекаются и исчерпывают все возможные варианты.

Таким образом, оптимизирующие последовательности структур построены для любых значений R_1, R_2, σ_+, σ_-, c. Отметим, что найденные обобщенные оптимальные структуры не являются единственными. Можно предъявить не обладающие осевой симметрией функции $c(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$, приводящие к такой же максимальной удельной проводимости кольца. Можно также доказать, что необобщенных оптимальных структур в рассмотренной задаче нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* Точные оценки проводимости смесей, образованных двумя материалами, взятыми в заданной пропорции (плоская задача) // Докл. АН СССР. 1982, Т. 264. № 5. С. 1128—1130
2. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* Метод построения точных оценок эффективных констант композитов // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллин: Валгус, 1985. С. 63—72
3. *Беляев А. Ю.* Связь между эффективной теплопроводностью и электропроводностью композитов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 3. С. 575—577
4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34. Вып. 5. С. 65—133.

Москва

Поступила в редакцию
9.I.1990