Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3

А. Г. Колпаков

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СТРОЕНИЯ

Выполняется переход от трехмерной задачи теории упругости в тонком стержне к задаче теории балок. Ее отличие от рассмотренных в [1, 2] (см. также библиографию в [3]) задач о пластинах состоит в понижении размерности при предельном переходе на две единицы — с трех (размерность исходной задачи теории упругости) до одного (размерность предельной задачи теории балок). В [1, 2] размерность меняется с трех до двух. Это приводит к отличиям в виде асимптотического разложения, технике его исследования и возникновению новых типов ячеечных задач.

1. Постановка задачи. Рассмотрим область Ω_ε периодического строения, диаметр поперечного сечения и размер ячейки периодичности (ЯП) P_ε которой имеют порядок $\varepsilon \ll 1$ (фиг. 1). При $\varepsilon \to 0$ эта область стягивается к отрезку $[-1, 1]$. Пусть область занята упругим материалом, тензор упругих постоянных которого обозначим $a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и будем считать его периодической функцией с ЯП P_ε. Для описанного тела уравнения равновесия имеют вид

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij} v_{i,j}\, dv + \varepsilon^a \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{g}\mathbf{v}\, ds = \varepsilon^b \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{f}\mathbf{v}\, dv \tag{1.1}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V(\Omega_\varepsilon) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_\varepsilon)\colon\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \text{ при } x_1 = \pm 1\}$$

(функциональный класс H^1 определен в [4]). Здесь σ_{ij} — локальные напряжения, связанные с локальными перемещениями $\mathbf{u} \in V(\Omega_\varepsilon)$ законом Гука

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-4} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)\, u_{k,l} \tag{1.2}$$

Замечание 1. Присутствие множителя ε^{-4} в законе Гука связано с известной оценкой порядка моментов инерции (жесткостей бруса) в зависимости от диаметра его сечения [5]. В случае пластинок в аналогичной ситуации порядок учитывался в [1] введением множителя ε^{-3}.

Замечание 2. Показатели степени a, b в (1.1) учитывают порядки массовых и поверхностных сил. Их значения будут выбраны позже.

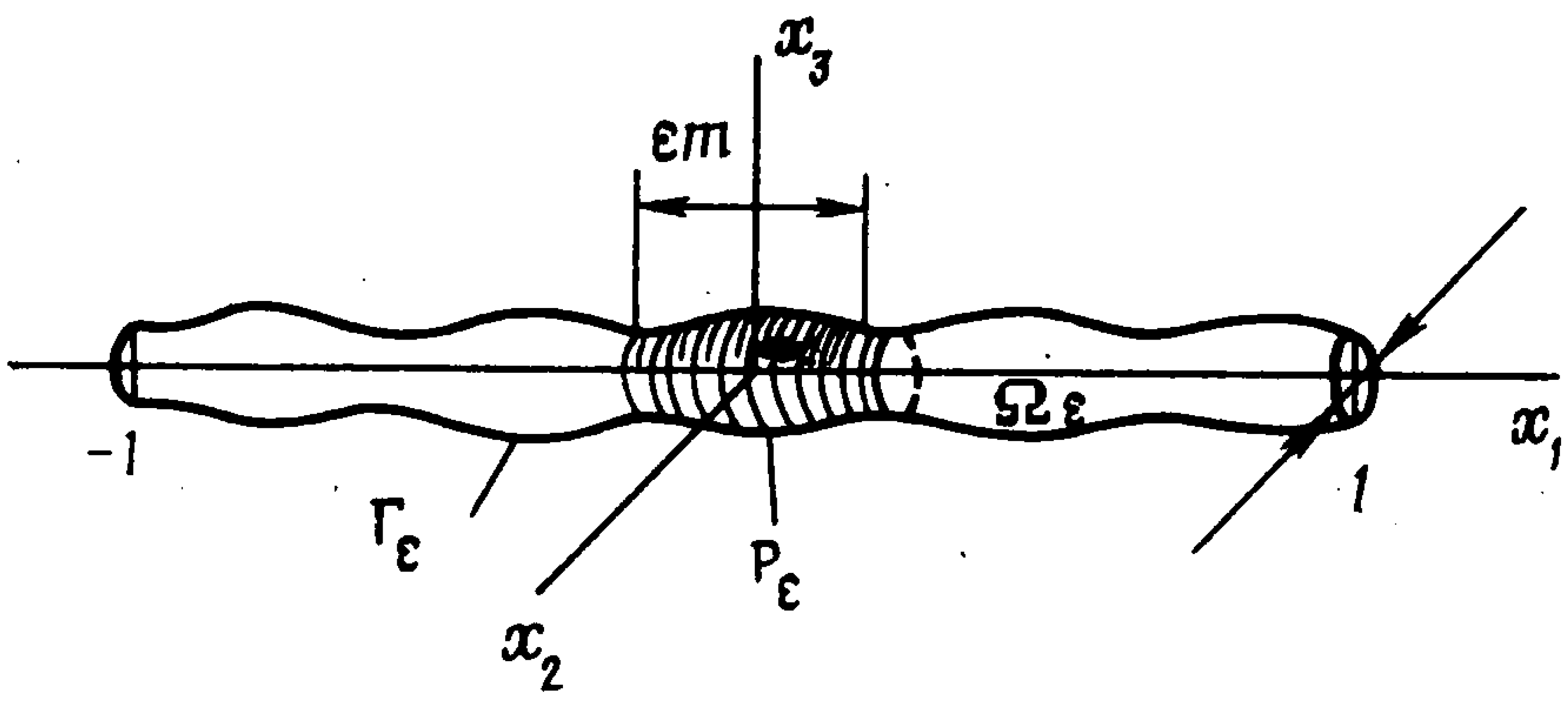
2. Асимптотическое разложение. Будем искать формальное асимптотическое разложение в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{u}^{(k)}$$

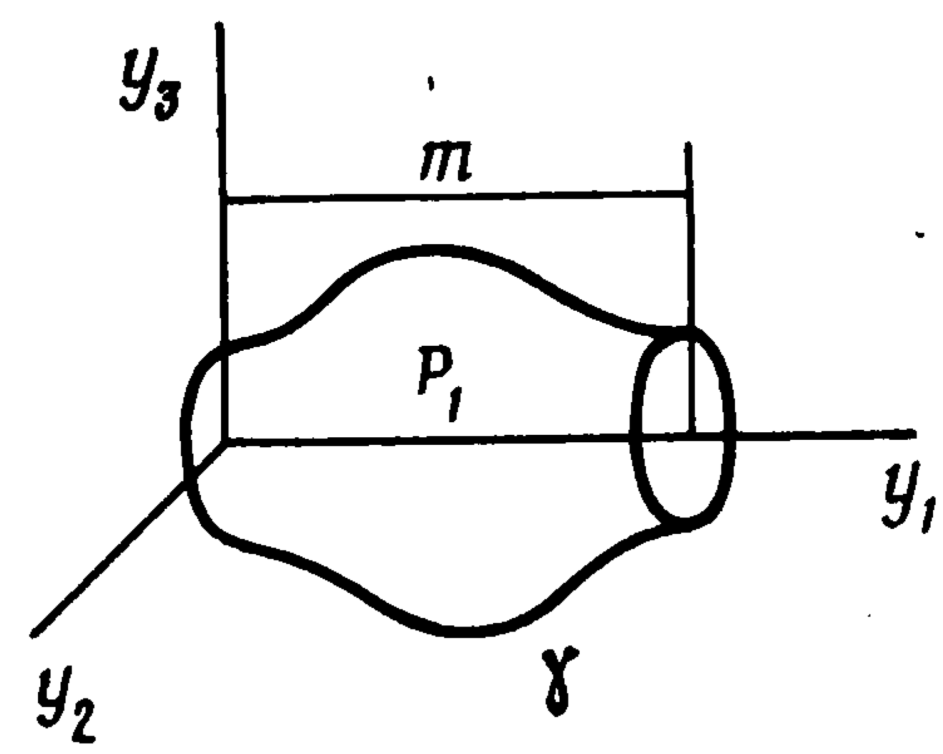
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{v}^{(k)} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-4}\sigma_{ij}^{(-4)}(x_1, \mathbf{y}) + \varepsilon^{-3}\sigma_{ij}^{(-3)}(x_1, \mathbf{y}) + \ldots = \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)}$$

где $x_1 \in [-1, 1]$ — медленная, а $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — быстрая переменные [6]. Функции в разложении (2.1) предполагаются периодическими по y_1 с ЯП $P_1 = \varepsilon^{-1} P_\varepsilon$. Операторы дифференцирования для функций аргументо в



Фиг. 1



Фиг. 2

x_1, y имеют вид [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \to \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \to \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 2, 3) \tag{2.2}$$

Далее будем использовать для обозначения индексов, принимающих значения 2, 3, греческие буквы; для принимающих значения 1, 2, 3 — латинские.

Перейдем от задачи (1.1) в переменной (зависящей от ε) области Ω_ε к задаче в фиксированной области. Для этого сделаем замену переменных

$$x_1 \to x_1, \; x_\alpha \to y_\alpha = \varepsilon^{-1}x_\alpha \quad (\alpha = 2, 3) \tag{2.3}$$

переводящую область Ω_ε в область фиксированного размера Ω_1. То же относится к боковой поверхности Ω_ε — поверхности Γ_ε. Уравнение (1.1) при замене переменных (2.3) и при записи производных для функций аргументов x_1, $\mathbf{y}$ в виде (2.2) переходит в следующее:

$$\varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_1} \left(\sigma_{ij}\varepsilon^{-1}\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \sigma_{i1}\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\right) dv + \varepsilon^{2+a} \int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{g}\mathbf{v}\, ds = \varepsilon^{2+b} \int\limits_{\Omega_1} \mathbf{f}\mathbf{v}\, dv \tag{2.4}$$

$\forall \mathbf{v} \in V(\Omega_1)$, где функциональный класс $V(\Omega_1)$ определен аналогично $V(\Omega_\varepsilon)$.

В уравнениях (1.1), (2.4) dv, ds — меры на соответствующих множествах и в соответствующих переменных.

В переменных $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ ЯП P_ε переходит $P_1 = \varepsilon^{-1}P_\varepsilon = \{\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon : \mathbf{x} \in P_\varepsilon\}$. Далее используется среднее по ЯП $\langle\cdot\rangle = m^{-1}\int\limits_{P_1} \cdot\, d\mathbf{y}$ и известная связь интегралов от периодических по $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ функций с интегралом от их среднего (см. например, [1])

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_1} f(x_1, \mathbf{x}/\varepsilon)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{-1}^{1} \langle f\rangle (x_1)\, dx_1$$

Подставим в равенство (2.4) разложение (2.1). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^2 \int\limits_{\Omega_1} (\varepsilon^{m+k+1}\sigma_{ij}^{(m)}v_{i,\,jy}^{(k)} + \varepsilon^{m+k}\sigma_{i1}^{(m)}v_{i,\,1x}^{(k)})\, dv + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2+a}\int\limits_{\Gamma_1} \varepsilon^k \mathbf{g}\mathbf{v}^{(k)}\, ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2+b} \int\limits_{\Omega_1} \varepsilon^k \mathbf{f}\mathbf{v}^{(k)}\, dv \tag{2.5}$$

Здесь и далее, jy означает $\partial/\partial y_j$, а, $1x$ — $\partial/\partial x_1$. Подстановка разложения (2.1) в закон Гука (1.2) после приравнивания выражений при одинаковых степенях ε дает соотношение

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijkl}(\mathbf{y})\, u_{k,\,ly}^{(m+5)} + a_{ijk1}(\mathbf{y})\, u_{k,\,1x}^{(m+4)} \tag{2.6}$$

Здесь и далее $m = -4, -3, \ldots$; $k = 0, 1, \ldots$.

3. Получение системы уравнений теории балок. Проведем рассмотрение задачи (2.5) при разных значениях m, k и подходящих выборах пробной функции $\mathbf{v}$.

1°. Положим $k = 0$, соответственно, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(x_1)$ и $v_{i,jy} = 0$. В результате для этого случая из (2.5) получаем равенство

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^2 \int_{\Omega_1} \varepsilon^m \sigma_{i1}^{(m)} v_{i,1x}^{(0)}\, dv + \varepsilon^{2+a} \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}\mathbf{v}^{(0)}\, ds = \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^{2+b} \int_{\Omega_1} \mathbf{f}\mathbf{v}^{(0)}\, dv$$

Приравнивая в нем выражения при одинаковых неположительных степенях ε, получаем с учетом замечания о средних

$$\begin{aligned} &\langle \sigma_{i1}^{(-4)} \rangle_{,1x} = 0 \quad (m = -4) \\ &\langle \sigma_{i1}^{(-3)} \rangle_{,1x} = 0 \quad (m = -3) \\ &\langle \sigma_{i1}^{(-2)} \rangle_{,1x} = \langle g_i \rangle_\gamma + \langle f_i \rangle \quad (m = -2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь взято $a = b = -2$. Через $\langle \cdot \rangle_\gamma = m^{-1} \int_\gamma \cdot\, ds$ обозначено среднее по боковой поверхности γ ЯП P_1 (фиг. 2).

При $m > -2$ степени в приведенном выше равенстве положительные.

2°. Положим в (2.5) $k = 1$, а пробную функцию возьмем в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) = y_2 \mathbf{v}_2(x_1) + y_3 \mathbf{v}_3(x_1) \tag{3.2}$$

При таком выборе k и $\mathbf{v}$ равенство (2.5) принимает вид

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^2 \int_{\Omega_1} [\varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} (v_{2i}\delta_{2j} + v_{3i}\delta_{3j}) + \varepsilon^{m+1} \sigma_{i1}^{(m)} (y_2 v_{2i,1x} + y_3 v_{3i,1x})]\, dv +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}(y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3)\, d\gamma = \sum_{m=-4}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mathbf{f}(y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3)\, dv \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение величины $M_{\alpha i}^{(m)} = \langle y_\alpha \sigma_{i1}^{(m)} \rangle$, имеющие механический смысл моментов [1]. С учетом замечания о средних имеем, приравняв члены при одинаковых неположительных степенях:

$$\langle \sigma_{i\alpha}^{(-4)} \rangle = 0 \ (\alpha = 2, 3) \ (m = -4)$$

$$-M_{\alpha i, 1x}^{(-4)} + \langle \sigma_{i\alpha}^{(-3)} \rangle = 0 \quad (\alpha = 2, 3) \ (m = -3) \tag{3.4}$$

$$-M_{\alpha i, 1x}^{(-3)} + \langle \sigma_{i\alpha}^{(-2)} \rangle = \langle g_i y_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_i y_\alpha \rangle \quad (m = -2) \quad (\alpha = 2, 3) \tag{3.5}$$

При $m > -2$ степени ε в (3.3) положительные.

3°. Положим $k = 1$, $m = -4$ и возьмем пробную функцию в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{y})$ — периодическая по y_1 с ЯП P_1. Соответственно $v_{i,1x}^{(1)} = 0$. При таком выборе из (2.5) следует

$$\sigma_{ij,jy}^{(-4)} = 0 \text{ и } \sigma_{ij}^{(-4)} n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \tag{3.6}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ — нормаль к боковой поверхности Γ_1 области Ω_1. Воспользуемся соотношением (2.6) при $m = -4$. Подстановка $\sigma_{ij}^{(-4)}$ согласно указанному соотношению в (3.6) дает

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijp1}(\mathbf{y}) u_{p,1x}^{(0)}(x_1))_{,jy} = 0 \tag{3.7}$$

с краевым условием

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijp1}(\mathbf{y}) u_{p,1x}^{(0)}(x_1)) n_j(\mathbf{y}) = 0 \tag{3.8}$$

и условием: $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y})$ периодична по y_1 с ЯП P_1.

Обратим внимание на сделанную здесь замену (для большей ясности дальнейших записей) индекса суммирования (индекс p).

Уравнения (3.7), (3.8) приводят к ячеечной задаче (ЯЗ). Как известно [1, 2, 6, 7], ЯЗ играет основную роль при определении механических характеристик материалов и конструкций периодического строения. Введем функции $\mathbf{X}^{1p}(\mathbf{y})$ как решение «первой ЯЗ теории балок»:

$$
\begin{aligned}
&(a_{ijkl}(\mathbf{y})\, X^{1p}_{k,\,ly} + a_{ijp1}(\mathbf{y}))_{,jy} = 0 \quad \text{в} \quad P_1 \\
&(a_{ijkl}(\mathbf{y})\, X^{1p}_{k,\,ly} + a_{ijp1}(\mathbf{y}))\, n_j = 0 \quad \text{на} \quad \gamma
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

$\mathbf{X}^{1p}(\mathbf{y})$ периодична по y_1 с ЯП P_1 (фиг. 2).

Сравнение задачи (3.7), (3.8) с ЯЗ (3.9) приводит к соотношению (сравни с [1])

$$
\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{X}^{1p}(\mathbf{x}/\varepsilon)\, u^{(0)}_{p,\,1x}(x_1) + \mathbf{V}(x_1) \tag{3.10}
$$

Замечание 3. Часть функций $\mathbf{X}^{1p}$ вычисляется явно, именно:

$$
X_k^{1\alpha}(\mathbf{y}) = -\delta_{1k} y_\alpha \qquad (\alpha = 2,\ 3) \tag{3.11}
$$

Проверка: $a_{ijkl} X^{1\alpha}_{k,\,ly} = -a_{ij1\alpha} + a_{ij\alpha 1} = 0$ (последнее — с учетом симметрии тензора упругих постоянных [5]).

Функции $\mathbf{X}^{1p}(\mathbf{y})$ ($p = 1, 2, 3$) — частные решения ЯЗ (3.9) при различных значениях индекса p. Соответствующая (3.9) однородная задача (она получается, если положить в (3.9) $a_{ijp1}(\mathbf{y}) = 0$) имеет решение $\mathbf{X} = (0,\ y_3,\ -y_2)\,\varphi(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ — произвольная (пока что) функция аргумента x_1. Отметим, что в задачах по переменным $\mathbf{y}$ функции аргумента x_1 играют роль постоянных.

Проверка: $a_{ijkl} X_{k,\,ly} = \varphi(x_1)(a_{ij23} - a_{ij32})$ (последнее — в силу $a_{ijkl} = a_{ijlk}$ [5]).

Из (3.10), (3.11) получаем (записав их в координатной форме):

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= X_1^{11}(\mathbf{y})\, u^{(0)}_{1,\,1x}(x_1) - y_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\,1x}(x_1) + V_1(x_1) \\
u_\beta^{(1)} &= X_\beta^{11}(\mathbf{y})\, u^{(0)}_{1,\,1x} + V_\beta(x_1) + y_{\bar\beta} s_\beta \varphi(x_1)
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
(\alpha, \beta = 2, 3), \quad \bar\beta = \begin{cases} 3 & \text{при} \quad \beta = 2,\ s_1 = 0,\ s_2 = 1,\ s_3 = -1 \\ 2 & \text{при} \quad \beta = 3, \end{cases}
$$

Подставив соотношения (3.12), (2.6), при $m = -4$, получаем равенство

$$
\sigma_{ij}^{(-4)} = a_{ij11}(\mathbf{y})\, u^{(0)}_{1,\,1x}(x_1) + a_{ijkl}(\mathbf{y})\, X^{11}_{k,\,ly}(\mathbf{y})\, u^{(0)}_{1,\,1x}(x_1) + a_{ij\beta\bar\beta}(\mathbf{y})\, s_\beta \varphi(x_1) \tag{3.13}
$$

Проинтегрировав его по ЯП P_1 (при учете независимости $\mathbf{u}^{(0)}$, φ от y), имеем

$$
\langle \sigma_{ij}^{(-4)} \rangle = \langle a_{ij11}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})\, X^{11}_{k,\,ly}(\mathbf{y}) \rangle\, u^{(0)}_{1,\,1x} + \langle a_{ij\beta\bar\beta} \rangle\, s_\beta \varphi \tag{3.14}
$$

Положим в (3.14) $j = 1$. Так как материал балки изотропный, то $a_{i1\beta\bar\beta} = 0$ при $\beta\bar\beta = 23{,}32$, в результате чего коэффициент при φ в (3.14) равен нулю (т. е. φ в (3.14) фактически отсутствует). Тогда уравнение (3.1) при $m = -1$ дает

$$
(\langle a_{i111} + a_{i1kl}\, X^{11}_{k,\,ly} \rangle\, u^{(0)}_{1,\,1x}(x_1))_{,1x} = 0 \tag{3.15}
$$

Из граничного условия $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$ при $x_1 = \pm 1$ и асимптотического разложения (2.1) следует, что $u_1^{(0)}(\pm 1) = 0$. Уравнение (3.15) с приведенным выше краевым условием имеет решение $u_1^{(0)}(x_1) \equiv 0$. Тогда равенство (3.12) принимает вид

$$
\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= -y_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\,1x}(x_1) + V_1(x_1) \\
u_\beta^{(1)} &= V_\beta(x_1) + s_\beta y_{\bar\beta} \varphi(x_1) \quad (\alpha,\ \beta = 2,\ 3)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

4°. Возьмем теперь $k = 1$, $m = -3$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{y})$. Имеем для этого случая (аналогично 3°)

$$\sigma_{ij,jy}^{(-3)} = 0 \text{ и } \sigma_{ij}^{(-3)} n_j = 0 \text{ на } \Gamma_1 \tag{3.17}$$

При $m = -3$ равенство (2.6) дает

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(1)} \tag{3.18}$$

Подставив в (3.18) выражение $\mathbf{u}^{(1)}$ (3.16), получаем с учетом (3.17)

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(\mathbf{y}) V_{k,1x}(x_1) - a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ + a_{ij\beta1}(\mathbf{y}) s_\beta y_{\bar\beta} \varphi_{,1x}(x_1))_{,jy} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1 \tag{3.19}$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(\mathbf{y}) V_{k,1x}(x_1) - a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ + a_{ij\beta1}(\mathbf{y}) s_\beta y_{\bar\beta} \varphi_{,1x}(x_1)) n_j = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \tag{3.20}$$

и условием: функция $\mathbf{u}^{(2)}(x_1, y)$ периодична по y_1 с ЯП P_1.

С целью получения решения задачи (3.19), (3.20) введем функции $\mathbf{X}^{2\alpha}(\mathbf{y})$ — решение следующей «второй ЯЗ теории балок, первого типа»

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{2\alpha} - a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha)_{,jy} = 0 \quad \text{в} \quad P_1$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{2\alpha} - a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha) n_j = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{3.21}$$

$\mathbf{X}^{2\alpha}(y)$ периодична по y_1 с ЯП P_1 и функции $\mathbf{X}^3(\mathbf{y})$ — решение «второй ЯЗ теории балок, второго типа»

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{3} + a_{ij\beta1}(\mathbf{y}) s_\beta y_{\bar\beta})_{,jy} = 0 \quad \text{в} \quad P_1$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,yl}^{3} + a_{ij\beta1}(\mathbf{y}) s_\beta y_{\bar\beta}) n_j = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{3.22}$$

$\mathbf{X}^3(y)$ периодична по y_1 с ЯП P_1.

Замечание 4. Задача второго типа не имеет аналога в теории пластинок [1, 8]. Она связана с кручением стержня (балки).

Принимая во внимание равенства (3.9) и (3.21), получаем

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{X}^{1k}(\mathbf{y}) V_{k,1x}(x_1) + \mathbf{X}^{2\alpha}(\mathbf{y}) u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \mathbf{X}^3(\mathbf{y}) \varphi(x_1) \tag{3.23}$$

Учитывая замечание 3, можно переписать соотношение (3.23) в следующей координатной форме:

$$u_1^{(2)} = X_1^{11}(\mathbf{y}) V_{1,1x}(x_1) - y_\alpha V_{\alpha,1x}(x_1) + X_1^{2\alpha}(\mathbf{y}) u_{\alpha,1x1x}^{(0)})(x_1) + \\ + X_1^3(\mathbf{y}) \varphi_{,1x}(x_1) \tag{3.24}$$

$$u_\beta^{(2)} = X_\beta^{11}(\mathbf{y}) V_{1,1x}(x_1) + X_\beta^{2\alpha}(\mathbf{y}) u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + X_\beta^3(\mathbf{y}) \varphi_{,x}(x_1) \qquad (\alpha, \beta = 2, 3)$$

Подставив выражение (3.24) в (2.6) при $m = -3$ и сгруппировав члены, имеем

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = (a_{ij11}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{11}(\mathbf{y})) V_{1,1x}(x_1) + \\ + (-a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha + a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y})) u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{3}(\mathbf{y}) \varphi_{,1x}(x_1) \tag{3.25}$$

Проинтегрируем уравнение (3.25) по ЯП P_1. Учитывая независимость функций $\mathbf{V}$, $\mathbf{u}^{(0)}$ от $\mathbf{y}$, см. (2.1), (3.10), получаем

$$\langle \sigma_{ij}^{(-3)} \rangle = \langle a_{ij11} + a_{ijkl} X_{k,ly}^{11} \rangle u_{1,1x} + \\ + \langle -a_{ij11} y_\alpha + a_{ijkl} X_{k,ly}^{2\alpha} \rangle u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + \langle a_{ijkl} X_{k,ly}^{3} \rangle \varphi_{,1x} \tag{3.26}$$

Умножив обе части равенства (3.25) на y_β и затем проинтегрировав по ЯП P_1 при $j = 1$, получаем

$$M_{\beta i}^{(-3)} = \langle y_\beta (a_{i111} + a_{i1kl} X_{k,ly}^{11}) \rangle V_{1,1x} + \langle y_\beta (-a_{i111} y_\alpha + a_{i1kl} X_{k,ly}^{2\alpha}) \rangle u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + \\ + \langle y_\beta a_{i1kl} X_{k,ly}^{3} \rangle \varphi_{,1x} \tag{3.27}$$

Из (3.5) при $m = -3$, $i = 1$ получаем

$$M^{(-3)}_{\alpha 1,\,1x} + \langle \sigma^{(-2)}_{1\alpha} \rangle = \langle g_1 y_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_1 y_\alpha \rangle \qquad (3.28)$$

Из (3.1) при $m = -2$, $i = \alpha$ имеем

$$\langle \sigma^{(-2)}_{\alpha 1} \rangle_{,1x} = \langle g_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_\alpha \rangle \quad (\alpha = 2, 3) \qquad (3.29)$$

Обозначим

$$\begin{gathered} A_i{}^\circ = \langle a_{i111} + a_{i1kl} X^{11}_{k,\,ly} \rangle \\ A^1_{i\alpha} = \langle -a_{i111} y_\alpha + a_{i1kl} X^{2\alpha}_{k,\,ly} \rangle \\ {}^1A_{i\beta} = \langle y_\beta (a_{i111} + a_{i1kl} X^{11}_{k,\,ly}) \rangle \\ A^2_{\alpha\beta i} = -\langle y_\beta (-a_{i111} y_\alpha + a_{i1kl} X^{2\alpha}_{k,\,ly}) \rangle \\ B_{ij}{}^\circ = \langle a_{ijkl} X^3_{k,\,ly} \rangle, \quad B^1_{\beta i} = \langle y_\beta a_{i1kl} X^3_{k;\,ly} \rangle \quad (\alpha, \beta = 2, 3) \end{gathered} \qquad (3.30)$$

Как будет видно, величины (3.30) являются упругими характеристиками балки.

Рассмотрим уравнение (3.5) при $m = -3$, $i = \beta$ ($\beta = 2, 3$). Имеем для этого случая $M^{(-3)}_{\alpha\beta,\,1x} + \langle \sigma^{(-2)}_{\beta\alpha} \rangle = \langle g_\beta y_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_\beta y_\alpha \rangle$. По определению $M^{(-3)}_{\alpha\beta} = \langle y_\alpha \sigma^{(-3)}_{\beta 1} \rangle$. Как правило, в механике рассматриваются не $M^{(-3)}_{\alpha\beta}$, а величина $M = \langle \sigma^{(-3)}_{\beta 1} \rangle s_\beta y_{\bar\beta} \rangle$ — момент при кручении. Поскольку $\langle \sigma^{(-3)}_{\beta 1} s_\beta y_{\bar\beta} \rangle = M^{(-3)}_{32} - M^{(-3)}_{23}$, получаем уравнение

$$M_{,\,1x} = \langle g_2 y_3 \rangle_\gamma - \langle g_3 y_2 \rangle_\gamma + \langle f_2 y_3 \rangle - \langle f_3 y_2 \rangle \qquad (3.31)$$

Здесь использовано равенство $\langle \sigma^{(-2)}_{23} \rangle = \langle \sigma^{(-2)}_{32} \rangle$, следующее из того, что $\sigma^{(-2)}_{ij} = \sigma^{(-2)}_{ji}$ [5].

4. Предельная задача. Соберем полученные выше соотношения (слева указано, откуда следует соответствующее равенство)

$$(3.26), \quad i = j = 1: \quad \langle \sigma^{(-3)}_{11} \rangle = A_1{}^\circ V_{1,\,1x} - A^1_{1\alpha} u^{(0)}_{\alpha,\,1x1x} + B_{11}{}^\circ \varphi_{,1x} \qquad (4.1)$$

$$(3.1), \quad i = j = 1, m = -3: \quad \langle \sigma^{(-3)}_{11} \rangle_{,1x} = 0 \qquad (4.2)$$

$$(3.27), \quad i = 1: \quad M^{(-3)}_{\beta 1} = {}^1A_{1\beta} V_{1,\,1x} - \overset{\circ}{A}_{\alpha\beta 1} u^{(0)}_{\alpha,\,1x1x} + B^1_{\beta 1} \varphi_{,1x} \qquad (4.3)$$

$$(3.28), \quad -M^{(-3)}_{\alpha 1,\,1x} + \langle \sigma^{-2}_{1\alpha} \rangle = \langle g_1 y_\alpha \rangle_\gamma + \langle f_1 y_\alpha \rangle \qquad (4.4)$$

$$(3.29), \quad \langle \sigma^{(-2)}_{\beta 1} \rangle_{,1x} = \langle g_\beta \rangle_\gamma + \langle f_\beta \rangle \qquad (4.5)$$

$$(3.27), \quad \beta i = 23, 32, m = -3: \quad M = ({}^1A_{23} - {}^1A_{32}) V_{1,\,1x} - \\ - (A^2_{\alpha 32} - A^2_{\alpha 23}) u^{(0)}_{\alpha,\,1x1x} + (B_{32}{}^1 - B_{23}{}^1) \varphi_{,1x} \qquad (4.6)$$

$$(3.31), \quad M_{,1x} = \langle g_2 y_3 \rangle_\gamma - \langle g_3 y_2 \rangle_\gamma + \langle f_2 y_3 \rangle - \langle f_3 y_2 \rangle \qquad (4.7)$$

(α, $\beta = 2$, 3)

Возникшая предельная система представляет собой задачу теории балок. Здесь $V_{1,\,1x}$ — осевая деформация, $u^{(0)}_{\alpha,\,1x1x}$ — кривизны, φ — угол кручения. Соотношения (4.2), (4.4) (4.5), (4.7) — уравнения равновесия, а (4.1), (4.3), (4.6) — определяющие соотношения балки. Коэффициенты последних определяются на основе решения ЯЗ (3.9), (3.21), (3.22), представляющих собой трехмерные задачи теории упругости с краевыми условиями специального вида.

Рассмотрим граничные условия. Из асимптотического разложения (2.1) и граничного условия $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$ при $x_1 = \pm 1$ имеем

$$\mathbf{u}^{(0)} (\pm 1) = 0, \quad \mathbf{u}^{(1)} (\pm 1, \mathbf{y}) = 0 \qquad (4.8)$$

Подставив выражения (3.16) в (4.8), получаем

$$-y_\alpha u^{(0)}_{\alpha,\,1x} (\pm 1) + V_1 (\pm 1) = 0, \quad V_\beta (\pm 1) + s_\beta y_{\bar\beta} \varphi (\pm 1) = 0$$

для всех y_2, y_3 ($\beta = 2$, 3).

Отсюда следует, что

$$V_1(\pm 1) = 0,\ u_\alpha^{(0)}(\pm 1) = 0,\ u_{\alpha,1x}^{(0)}(\pm 1) = 0,\ \varphi(\pm 1) = 0$$
$$(\alpha = 2,\ 3) \tag{4.9}$$

Полученные равенства (4.9) — накрывающий набор граничных условий для задачи (4.1)—(4.7).

5. Пример. Цилиндрический стержень. *Первая ЯЗ*. Пусть область Ω_ε — цилиндр $[-1, 1] \times S_\varepsilon$ и упругие постоянные материала $a_{ijkl}(\mathbf{y})$ зависят только от переменных y_2, y_3 (но не от y_1). В этом случае первая локальная задача имеет решение вида

$$X_1^{11}(\mathbf{y}) = 0,\ X_\beta^{11}(\mathbf{y}) = X_\beta^{11}(y_2,\ y_3),\quad (\beta = 2,\ 3) \tag{5.1}$$

Очевидно, что функции (5.1) периодичны по y_1 на ЯП P_1. Подставив (5.1) в (3.9), получим двумерную задачу относительно функций

$$(a_{\alpha\beta\gamma\delta}X_{\gamma,\delta}^{11} + a_{\alpha\beta 11})_{,\beta} = 0 \text{ в } S_1$$
$$(a_{\alpha\beta\gamma\delta}X_{\gamma,\delta}^{11} + a_{\alpha\beta 11})\, n_\beta^1 = 0 \text{ на } \partial S_1 \tag{5.2}$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 2,\ 3),\ S_1 = \varepsilon^{-1}S_\varepsilon$$

($\mathbf{n}^1$ — внешняя нормаль к ∂S_1). Кроме того, если материал балки однородный, то решение задачи (5.2) может быть найдено в явном виде: $X_\beta^{11} = W_\beta y_\beta$ (по β не суммировать). Постоянные $\{W_\beta\}$ определяются подстановкой вышеприведенного выражения в (5.2). В терминах постоянных Ламе λ, μ [5] они таковы: $W_2 = W_3 = \lambda/2\,(\lambda + 2\mu)$.

Соответственно жесткость стержня на растяжение в рассматриваемом случае равна

$$A_1^\circ = \frac{(3\lambda + 2\mu)\,\mu}{\lambda + 2\mu}\operatorname{mes} S_\varepsilon$$

где $\operatorname{mes} S_\varepsilon$ — площадь S_ε (площадь поперечного сечения стержня).

Вторая ЯЗ первого типа. Будем искать решение задачи (3.21) в виде

$$X_1^{2\alpha}(\mathbf{y}) = 0,\quad X_\beta^{2\alpha}(\mathbf{y}) = X_\beta^{2\alpha}(y_2, y_3)\quad (\alpha, \beta = 2, 3)$$

Очевидно, функция периодична по y_1. Для этой функции первое (при $i = 1$) уравнение из (3.21) принимает вид

$$(a_{1jkl}X_{k,ly}^{2\alpha} - a_{1j11}y_\alpha)_{,jy} = (a_{1\beta\gamma\delta}X_{\gamma,\delta}^{2\alpha} - a_{1\beta 11}y_\alpha)_{,\beta} = 0$$

Последнее равенство выполнено в силу $a_{1\alpha\gamma\delta} = 0$, $a_{1\beta 11} = 0$ при β, γ, $\delta = 2{,}3$ для изотропных материалов [5]. Первое равенство из граничных условий (3.21) также выполнено (следует учесть, что первая координата нормали к γ в рассматриваемом случае равна нулю). В результате получаем двумерную задачу

$$(a_{\varkappa\beta\gamma\delta}X_{\gamma,\delta}^{2\alpha} - a_{\varkappa\beta 11}y_\alpha)_{,\beta} = 0 \text{ в } S_1$$
$$(a_{\varkappa\beta\gamma\delta}X_{\gamma,\delta}^{2\alpha} - a_{\varkappa\beta 11}y_\alpha)\, n_\beta^1 = 0 \text{ на } \partial S_1 \tag{5.3}$$

Жесткость балки на изгиб дается выражением

$$A_{\varkappa\beta 1}^2 = \langle y_\beta(\alpha_{1111}y_\varkappa - \alpha_{11\gamma\gamma}X_{\gamma,\gamma}^{2\varkappa})\rangle\quad (\varkappa, \beta, \gamma = 2, 3)$$

В частности, жесткость на изгиб в плоскости Ox_1x_2

$$A_{221}^2 = \langle a_{1111}y_2^2\rangle - \langle y_2 a_{11\gamma\gamma}X_{\gamma,\gamma}^{21}\rangle\quad (\gamma = 2,\ 3) \tag{5.4}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (5.4) есть изгибная жесткость балки, вычисленная в соответствии с технической теорией [5]. Как видно, второе слагаемое в правой части (5.4) в общем случае не равно нулю (так как $\mathbf{X}^{21}(y_2, y_3) = 0$ в общем случае не является решением задачи (5.3)).

Вторая ЯЗ второго типа. Будем искать решение задачи (3.22) в виде

$$X^3(\mathbf{y}) = X_1^3(y_2, y_3),\quad X_\beta^3(\mathbf{y}) = 0\quad (\beta = 2, 3) \tag{5.5}$$

Очевидна периодичность функции (5.5) по y_1. Подстановка соотношений (5.5) в (3.22) дает

$$(a_{i\delta 1\gamma}X_{1,\gamma}^3 + a_{i\delta\beta 1}{}'s_\beta y_{\bar\beta})_{,\delta} \tag{5.6}$$

Так как $a_{i\delta 1\gamma} = 0$, $a_{i\delta\beta 1} = 0$ при i, δ, β, $\gamma = 2,3$ для изотропных материалов, то от (5.6) остается только одно нетривиальное равенство (при $i = 1$) относительно $X_1^3(y_2, y_3)$:

$$(a_{1\delta 1\gamma} X^3_{1,\gamma} + a_{1\delta\beta 1} s_\beta y_{\bar\beta})_{,\delta} = 0 \text{ в } S_1$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае $n_1 = 0$, получаем соответствующее граничное условие

$$(a_{1\delta 1\gamma} X^3_{1,\gamma} + a_{1\delta\beta 1} s_\beta y_{\bar\beta}) n_\delta{}^1 = 0 \quad \text{на } \partial S_1$$

Замечание 5. Для ферм и аналогичных высокопористых конструкций для решения ЯЗ может быть применен метод из [9—13].

6. К обоснованию асимптотик. Применение техники построения асимптотик, аналогичной использовавшейся в [1], позволяет получить аналогичные [1] обоснования результатов. Введем в области Ω_1 функцию (нормированное поле перемещений)

$$U_i^\varepsilon(\mathbf{z}) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} u_1(\mathbf{z}) & \text{при } i = 1, \\ u_i(\mathbf{z}) & \text{при } i = 2, 3, \quad \mathbf{z} = (x_1, y_2, y_3) \in \Omega_1 \end{cases}$$

где (u_1, u_2, u_3) — решение задачи (1.1), (1.2) в переменных $\mathbf{z}$, и рассмотрим асимптотику поля перемещений (2.1) с точностью до членов порядка ε:

$$u_i(\mathbf{z}) = \begin{cases} 0 + \varepsilon (V_1 - y_\alpha u^{(0)}_{\alpha,1x}) + \ldots & \text{при } i = 1 \\ u_i^{(0)} + \varepsilon(\ldots) + \ldots & \text{при } i = 2, 3 \end{cases} \tag{6.1}$$

Введем соответствующее (6.1) нормированное поле перемещений

$$U_i(\mathbf{z}) = \begin{cases} \varepsilon^{-1} u_1 = V_1 - y_\alpha u^{(0)}_{\alpha,1x} & \text{при } i = 1 \\ u_i^{(0)} & \text{при } i = 2, 3 \end{cases}$$

Предложение. $\mathbf{U}^\varepsilon \to \mathbf{U}$ слабо в $V(\Omega_1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство получается воспроизведением (с техническими поправками на изменение размерности задачи с трех до единицы, а не с трех до двух, как в [1]) хода рассуждений разделов 3 (априорные оценки) и 6.3 (доказательства сходимости) работы [1].

Замечание 6. Предложение дает утверждение о сходимости без учета кручения (члены, соответствующие кручению стержня, имеют порядок более высокий, чем соответствующие нормальным прогибам). Обоснование асимптотик при учете кручения (например, при $u_\alpha^{(0)} = 0$) уже не аналогично проведенному в [1] (так как в рассматриваемых в [1] пластинках аналогов кручения нет).

Замечание 7. Для цилиндрического стержня коаксиального строения подробное исследование задачи выполнено в [14]. Предложенные выше асимптотики для этих стержней совпадают с введенными в [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaillerie D.* Thin Elastic and Periodic Plates // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1984. № 6. P. 159—191.
2. *Kohn R. V., Vogelius M.* A new model for thin plates with rapidly varing thickness // Intern. J. Solids and Struct. 1984. V. 20 № 4. P. 333—350.
3. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Асимптотические методы осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1987. Вып. 19. С. 78—147.
4. *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes et applications. V. 1. Paris: Dunod. 1968. 372 p.
5. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
6. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
7. *Bensoussan A., Lions J.-L.* Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. 700 p.
8. *Колпаков А. Р.* Расчет и проектирование слоистых пластинок // ПМТФ. 1989. № 4. С. 152—161.
9. *Колпаков А. Р.* К определению усредненных характеристик упругих каркасов // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 969—977.
10. *Колпаков А. Г.* Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66—73.

11. *Колпаков А. Г.* Усредненные жесткости термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 53—61.
12. *Kolpakov A. G.* Mechanics of composite frameworks // Шестой конгресс по теоретична и прикл. мех. Варна, 1989. Резюмета.
13. *Kolpakov A. G.* On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congress on Computational Mechanics. 1990. FRG: Stuttgart, 1990. Extended Abstracts of Lectures. P. 453—456.
14. *Козлова М. В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1989. Вып. 5. С. 6—10.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.VII.1989