Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3

К. А. Чишко

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА ГРИНА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Для функции Грина динамической задачи теории упругости в неограниченной изотропной среде получены формулы, описывающие в цилиндрических координатах R, φ и z фурье-трансформанты этой функции по времени t и координатам φ и z; зависимость от R сохранена в явном виде, что позволяет использовать результаты для решения граничных задач в круговых цилиндрических областях. Рассмотрен специальный случай спектральных компонент поля скоростей смещений точек среды и поля напряжений системы произвольно движущихся дислокационных петель.

Уравнение движения упругой среды в криволинейных координатах может быть представлено в ковариантной форме [1]

$$(\rho g^{\alpha\delta}\partial^2/\partial t^2 - \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\beta\nabla_\gamma)\, u_\delta = f^\alpha \tag{1}$$

где $u_\alpha(\mathbf{y}, t)$ — поле смещений точек среды в системе обобщенных координат $\{y^\alpha\}$ в момент времени t; $f^\alpha(\mathbf{y}, t)$ — плотность объемных сил; ρ — плотность среды; $g^{\alpha\beta}$ — контравариантный метрический тензор [2]; ∇_α — ковариантная тензорная производная [1, 2]; $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — четырежды контравариантный тензор упругих модулей среды [1, 3]. В случае изотропной среды, рассмотрением которой здесь ограничимся, этот тензор имеет вид [1]

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \rho\,(c_l^2 - 2c_t^2)\, g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} + \rho c_t^2\,(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) \tag{2}$$

(c_l и c_t — скорости продольного и поперечного звука).

Введем дважды ковариантный тензор Грина $G^{(0)}_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t - t')$, удовлетворяющий уравнению

$$(\rho g^{\alpha\delta}\partial^2/\partial t^2 - \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\beta\nabla_\gamma)\, G^{(0)}_{\delta\mu} = \Omega_0^{-1}\delta^\alpha_\mu\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}')\,\delta(t - t') \tag{3}$$

причем $\Omega_0 = h_1h_2h_3$ (h_α — параметры Ламе), $\delta_\beta{}^\alpha$ — символ Кронекера. Решение уравнения (1) может быть после этого записано в виде [4, 5]

$$u_\alpha(\mathbf{y}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\Omega'\,\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t - t')\, f^\beta(\mathbf{y}', t') \tag{4}$$

Здесь $d\Omega$ — элемент объема в $\mathbf{y}$-пространстве, а

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t - t') = G^{(0)}_{\alpha\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t - t')\, P^\mu_\beta(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}') \tag{5}$$

— функция Грина динамической задачи теории упругости в неограниченной среде в координатах $\{y^\alpha\}$, где $P_\beta{}^\mu(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}')$ — оператор проектирования, отображающий компоненты вектора, определенного относительно базиса $\mathbf{e}_\mu(\mathbf{y})$ в точке $\mathbf{y}$ на базис $\mathbf{e}_\beta(\mathbf{y}')$ в точке $\mathbf{y}'$. Для декартовой системы координат $P_\beta{}^\gamma = \delta_\beta{}^\gamma$, в криволинейных координатах:

$$P_{\alpha\beta}(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}') = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^\alpha}\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y'^\beta} \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — декартовы радиус-векторы точек, в которых строятся соответствующие базисы [1]. Из (6) вытекает очевидное соотношение $P_{\alpha\beta}(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{y})$.

По поводу представления (5) необходимо сделать следующее разъяснение. Функция Грина выражает закон соответствия между векторными величинами, отнесенными к точкам пространства с различными базисами. Поэтому если используется, например, функция $C^{(0)}_{\alpha\beta}$, компоненты которой определены в базисе $\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{y})$, то перед вычислением ее свертки с силой $f^\beta(\mathbf{y}')$, имеющей компоненты в базисе $\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{y}')$, последнюю необходимо спроектировать на базис $\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{y})$ (в противном случае операция свертки не имеет смысла). Таким образом, снова приходим к соотношениям (4), (5), причем функцией Грина задачи удобно считать именно $\Gamma_{\alpha\beta}$, поскольку в отличие от $G^{(0)}_{\alpha\beta}$ она в явном виде удовлетворяет соотношениям взаимности [4, 5]

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t-t') = \Gamma_{\beta\alpha}(\mathbf{y}', \mathbf{y}; t'-t). \tag{7}$$

При этом функция $\Gamma_{\alpha\beta}$ удовлетворяет, конечно, уравнениям (3). Последнее легко проверить, если учесть, что проектор $P_{\alpha\beta}$ аналогично метрическому тензору $g_{\alpha\beta}$ ведет себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянная величина:

$$\nabla_\gamma P_{\alpha\beta} = \partial P_{\alpha\beta}/\partial y^\gamma - P_{\mu\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} = 0$$

$$\nabla_\gamma' P_{\alpha\beta} = \partial P_{\alpha\beta}/\partial y'^\gamma - P_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} = 0$$

где $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля [1, 2], а символы ∇_γ и ∇_γ' означают дифференцирование соответственно по $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$. Отметим, что проектор $P_{\alpha\beta}$ дифференцируется не как ковариантный тензор второго ранга, а как набор ковариантных векторов (базиса), что очевидно из его определения (6).

Известно [6, 7], что функция $G^{(0)}_{\alpha\beta}$ может быть представлена как:

$$G^{(0)}_{\alpha\beta}(\mathbf{y}, \mathbf{y}'; t-t') = L_{\alpha\beta}U(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|, t-t') \tag{8}$$

$$L_{\alpha\beta} = -\rho\{(c_l^2 - c_t^2)\nabla_\alpha\nabla_\beta^{*} + \Box_l g_{\alpha\beta}\} \tag{9}$$

$$\Box_\lambda = \partial^2/\partial t^2 - c_\lambda^2\nabla_\mu\nabla^\mu; \quad \lambda = l, t$$

Потенциал U удовлетворяет уравнению [7]

$$\rho^2 \Box_l \Box_t U(|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|; t-t') = \Omega_0^{-1}\delta(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\,\delta(t-t') \tag{10}$$

Решение уравнения (10) имеет вид [8]

$$U(y, t) = A \sum_{\lambda=l,t}^{(-)} \left(\frac{1}{c_\lambda} - \frac{t}{y}\right)\Theta\left(t - \frac{y}{c_\lambda}\right) \tag{11}$$

где $A = [4\pi\rho^2(c_l^2 - c_t^2)]^{-1}$, $\Theta(t)$ — ступенчатая функция Хэвисайда, а знак минус у суммы означает, что берется разность слагаемых с $\lambda = l$ и $\lambda = t$. Очевидно, что представляющее интерес спектральное разложение удобно производить, исходя из соотношения (8), поскольку скалярный потенциал (11) инвариантен по отношению к любому ортогональному преобразованию координат, а преобразование дифференциального оператора (9) не представляет в каждом конкретном случае принципиальных затруднений.

Сказанным выше по существу ограничивается возможность рассмотрения проблемы в общем виде. Переходим далее к специальному случаю цилиндрической системы координат R, φ и z; при этом $|y - y'| = [R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}$, а физические компоненты проекционного оператора таковы:

$$\bar{P}_{\alpha\beta}(\varphi-\varphi') = \left\| \begin{matrix} \cos(\varphi-\varphi') & \sin(\varphi-\varphi') & 0 \\ -\sin(\varphi-\varphi') & \cos(\varphi-\varphi') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

(здесь и далее черта над вектором и тензором означает физические компоненты этого объекта). Физические компоненты дифференциального оператора $L_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\bar{L}_{\alpha\beta} = \rho\delta_{\alpha\beta}\left[c_l^2\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] -$$
$$- \frac{4\pi\rho}{A}\left\|\begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial R^2} & \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial\varphi} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) & \frac{\partial^2}{\partial R\,\partial z} \\ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial\varphi} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) & \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial R}\right) & \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial R\partial z} & \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{matrix}\right\| \qquad (13)$$

Спектральное разложение физических компонент функции Грина

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(R, R', \varphi - \varphi', z; t) = (2\pi)^{-2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \bar{\gamma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) \times$$
$$\times \exp\left[i(\omega t - k_z z)\right] \qquad (14)$$

может быть получено из определения (5) при учете соотношений (8) и (9). Фурье-трансформанты $\bar{\gamma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R,\ R' \mid m,\ k_z)$ при учете выражения (8) могут быть выражены через фурье-трансформанту $U^{\omega}(R,\ R' \mid m,\ k_z)$ потенциала U:

$$\bar{\gamma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{im(\varphi-\varphi')}\,\bar{P}_{\nu\beta}(\varphi - \varphi') \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi')}\, l^{\omega}_{\alpha\nu}\left(\frac{\partial}{\partial R}\,\middle|\, n, k_z\right) U^{\omega}(R, R' \mid n, k_z) \qquad (15)$$

где фурье-образ оператора $\bar{L}_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$l^{\omega}_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial R}\,\middle|\, n, k_z\right) = \rho\delta_{\alpha\beta}\left[c_l^2\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} - \frac{n^2}{R^2}\right) + \omega^2\right] -$$
$$- \frac{4\pi\rho}{A}\left\|\begin{matrix} \frac{\partial^2}{\partial R^2} & \frac{in}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{R}\right) & -ik_z\frac{\partial}{\partial R} \\ \frac{in}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R} \quad \frac{1}{R}\right) & \frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{n^2}{R}\right) & \frac{nk_z}{R} \\ -ik_z\frac{\partial}{\partial R} & \frac{nk_z}{R} & -k_z^2 \end{matrix}\right\| \qquad (16)$$

Фурье-трансформанту потенциала $U^{\omega}(R,\ R' \mid m,\ k_z)$ можно построить несколькими очевидными способами. Наиболее просто это можно сделать, перейдя в известном разложении Фурье [8]

$$U^{\omega}(x, y \mid k_z) = -A\sum_{\lambda=l,t}^{(-)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i(k_x x + k_y y)\right]}{k_x^2 + k_y^2 + q_\lambda^2}\,dk_x\,dk_y \qquad (17)$$
$$q_\lambda = (k_z^2 - \omega^2/c_\lambda^2)^{1/2}$$

к цилиндрическим координатам $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ и произведя разложение (17) в ряд Фурье по переменной φ. В результате, используя известные интегральные представления и теоремы сложения для бесселевых функций [9, 10], находим

$$U^{\omega}(R, R', \varphi - \varphi' \mid k_z) = -2A\omega^{-2}\sum_{\lambda=l,t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{(\lambda)\omega}(R, R' \mid k_z)\, e^{in(\varphi-\varphi')} \qquad (18)$$

Здесь

$$U_n^{(\lambda)\omega}(R,\ R' \mid k_z) = I_n(q_\lambda R)\, K_n(q_\lambda R')\,\Theta(R' - R) +$$
$$+ I_n(q_\lambda R')\, K_n(q_\lambda R)\,\Theta(R - R') \qquad (19)$$

где $I_n(\xi)$ и $K_n(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя порядка n первого и второго рода соответственно. Подставляя выражение (19) в (15) и производя преобразования, имеем окончательно

$$\bar{\gamma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) = \sum_{\lambda = l, t} \bar{\gamma}^{(\lambda)\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) \tag{20}$$

Здесь

$$\bar{\gamma}^{(\lambda)\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) = [2\pi\rho\omega^2]^{-1} \Big\{ a^{(\lambda)}_{\alpha}(R \mid m, k_z)\, b^{(\lambda)}_{\beta}(R' \mid m, k_z)\, \theta(R - R') +$$
$$+ b^{*(\lambda)}_{\alpha}(R \mid m, k_z)\, a^{*(\lambda)}_{\beta}(R' \mid m, k_z)\, \theta(R' - R) + \frac{\omega^2}{2c_\lambda^2} \frac{c_l^2 - c_\lambda^2}{c_l^2 - c_t^2} A^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z) \Big\} \tag{21}$$

Векторы $\mathbf{a}^{(\lambda)}$ и $\mathbf{b}^{(\lambda)}$ имеют вид

$$\mathbf{a}^{(\lambda)}(\xi \mid m, k_z) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial\xi}, -\frac{m}{\xi}, \frac{ik_z}{2} \right\} K_m(q_\lambda \xi)$$
$$\mathbf{b}^{(\lambda)}(\xi \mid m, k_z) = \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi}, -\frac{m}{\xi}, \frac{ik_z}{2} \right\} I_m(q_\lambda \xi)$$

а звездочкой обозначены комплексно сопряженные им величины. Диагональная матрица $A^{(\lambda)}_{\alpha\beta}$ имеет компоненты

$$A^{(\lambda)}_{RR}(R, R' \mid m, k_z) = A^{(\lambda)}_{\varphi\varphi}(R, R' \mid m, k_z) =$$
$$= [K_{m-1}(q_\lambda R)\, I_{m-1}(q_\lambda R') + K_{m+1}(q_\lambda R)\, I_{m+1}(q_\lambda R')]\, \theta(R - R') +$$
$$+ [I_{m-1}(q_\lambda R)\, K_{m-1}(q_\lambda R') + I_{m+1}(q_\lambda R)\, K_{m+1}(q_\lambda R')]\, \theta(R' - R)$$
$$A^{(\lambda)}_{zz}(R, R' \mid m, k_z) = 2\, [K_m(q_\lambda R)\, I_m(q_\lambda R')\, \theta(R - R') +$$
$$+ I_m(q_\lambda R)\, K_m(q_\lambda R')\, \theta(R' - R)]$$

Можно проверить, что фурье-трансформанты (21) удовлетворяют соотношениям взаимности (7).

Фурье-трансформанты физических компонент поля смещений, определяемого уравнением (1), представляются с использованием соотношения (20), после чего имеем

$$\bar{u}_\alpha(R, \varphi, z, t) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp[i(\omega t - k_z z)] \times$$
$$\times \int dR' R' \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R, R' \mid m, k_z)\, \bar{f}_\beta^{\,\omega}(R' \mid m, k_z) \tag{22}$$

В случае, когда поля в среде создаются системой дислокационных петель, тензорные компоненты силы $\bar{f}_\beta^{\,\omega}(R, \varphi, z, t)$ таковы [11]:

$$f^\beta(\mathbf{y}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \lambda^{\beta\gamma\nu\mu} \nabla_\gamma j_{\nu\mu}(\mathbf{y}, t') \tag{23}$$

где $j_{\nu\mu}(\mathbf{y}, t)$ — тензор плотности потока дислокаций [11, 12]. Спектральное разложение физических компонент вектора (23) при учете равенства (2) имеет вид

$$\bar{f}_R^{\,\omega}(R \mid m, k_z) = \frac{2\rho c_t^2}{i\omega} \Big\{ \Big(\frac{c_l^2}{2c_t^2} - 1 \Big) \frac{\partial}{\partial R} \bar{j}^{\,\omega}_{\nu\nu} +$$
$$+ \Big(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \Big) \bar{j}^{\,s\omega}_{RR} + \frac{im}{R} \bar{j}^{\,s\omega}_{R\varphi} - ik_z \bar{j}^{\,s\omega}_{Rz} \Big\}$$
$$\bar{f}_\varphi^{\,\omega}(R \mid m, k_z) = \frac{2\rho c_t^2}{i\omega} \Big\{ \Big(\frac{c_l^2}{2c_t^2} - 1 \Big) \frac{im}{R} \bar{j}^{\,\omega}_{\nu\nu} +$$
$$+ \Big(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R} \Big) \bar{j}^{\,s\omega}_{R\varphi} + \frac{im}{R} \bar{j}^{\,s\omega}_{\varphi\varphi} - ik_z \bar{j}^{\,s\omega}_{\varphi z} \Big\}$$
$$\bar{f}_z^{\,\omega}(R \mid m, k_z) = \frac{2\rho c_t^2}{i\omega} \Big\{ -ik_z \Big(\frac{c_l^2}{2c_t^2} - 1 \Big) \bar{j}^{\,\omega}_{\nu\nu} + \frac{\partial}{\partial R} \bar{j}^{\,s\omega}_{Rz} + \frac{im}{R} \bar{j}^{\,s\omega}_{\varphi z} - ik_z \bar{j}^{\,s\omega}_{zz} \Big\}$$

Здесь $\bar{f}_{\nu\nu} = \bar{f}_{RR} + \bar{f}_{\varphi\varphi} + \bar{f}_{zz}$ — след тензора $\bar{f}_{\alpha\beta}(R, \varphi, z, t)$, а $\bar{f}^{s\omega}_{\alpha\beta}(R\,|\,m, k_z) = \frac{1}{2}(\bar{f}^{\omega}_{\alpha\beta} + \bar{f}^{\omega}_{\beta\alpha})$ — фурье-трансформанты физических компонент симметричной части этого тензора. Для поля скоростей смещения точек среды $\bar{v}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_\alpha$ трансформанты таковы: $\bar{v}_\alpha{}^\omega (R\,|\,m, k_z) = i\omega\bar{u}_\alpha{}^\omega (R\,|\,m, k_z)$. Фурье-трансформанты поля напряжений получаются из закона Гука для среды с дислокациями [11, 12]

$$\bar{\sigma}^{\omega}_{\alpha\beta}(R\,|\,m, k_z) = \bar{\lambda}_{\alpha\beta\gamma\delta}\bar{\nabla}_\gamma\bar{u}_\delta(R\,|\,m, k_z) + \frac{\rho}{i\omega}\{(c_l{}^2 - 2c_t{}^2)\,\delta_{\alpha\beta}\bar{f}^{\omega}_{\nu\nu} + 2c_t{}^2\bar{f}^{s\omega}_{\alpha\beta}\}$$

При $\bar{f}_{\alpha\beta} = 0$ отсюда следуют известные соотношения между напряжениями и деформациями в среде без дефектов; в координатном представлении для случая цилиндрических координат они приведены, например, в книгах [1, 11]. Переход к фурье-трансформантам в этих выражениях осуществляется формальной заменой операторов дифференцирования $\partial/\partial\varphi \to im$, $\partial/\partial z \to ik_z$. Очевидные формулы для трансформант поля напряжений типа (22) оказываются весьма громоздкими, и здесь не выписываются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 374 с.
2. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
3. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Stenzel G., Bross H.* Elastic stress of moving dislocations in finite crystals // Phys. kondens. Matterie. 1970. V. 12. № 2. P. 138—144.
6. *Stenzel G.* Lineare Kontinuumstheorie der bewegter Verzetzungen // Phys. Stat. Solidi. 1969. V. 34. № 1. S. 351—364.
7. *Bross H.* Zur Theorie der bewegter Verzetzungen // Phys. Stat. Solidi. 1964. V. 5. № 2. S. 329—342.
8. *Нацик В. Д., Чишко К. А.* Звуковое излучение дислокаций, движущихся у поверхности кристалла // Физика твердого тела. 1978. Т. 20. № 2. С. 457—465.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм произведений. М.: Наука, 1963. 1100 с.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
12. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости. Киев: Наук. думка, 1978. 219 с.

Харьков

Поступила в редакцию
15.I.1990