Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3

А. А. Пименов, В. И. Пушкарев

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА КВАТЕРНИОНОВ К ОБОБЩЕНИЮ МЕТОДА КОЛОСОВА — МУСХЕЛИШВИЛИ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Получено граничное уравнение для первой основной задачи трехмерной теории упругости на основе метода Колосова — Мусхелишвили путем замены поля комплексных чисел на поле гамильтоновых кватернионов. Дано частное решение для пространства с эллиптической полостью, испытывающего равномерное растягивающее усилие на бесконечности.

Элементы алгебры обобщенных кватернионов [1] выглядят следующим образом: $\eta = ex_0 + xi + yj + zk$. В дальнейших построениях под ex_0 будем подразумевать время т. е. $ex_0 = t$. Таким образом, любую функцию $f(\eta)$ можно представить в виде аналитической функции

$$f(\eta) = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k, \ \alpha_n = \alpha_n(t, x, y, z), \ n = 1, \ldots, 4$$

где α_1 — скалярная часть, а сумма остальных слагаемых — векторная часть.

Далее, можно показать, что

$$\Box \alpha_n = 0, \ \Box = \partial_{tt} + \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz} \tag{1}$$

Решения уравнения (1) — гармонические функции.

Несколько иными преобразованиями можно получить уравнения

$$(\partial_{tx} + \partial_{ty} + \partial_{tz} + \partial_{xy} + \partial_{xz} + \partial_{yz})\,\alpha_n = 0 \tag{2}$$

решения которых также будут гармоническими функциями.

Отметим, что среди всех кватернионов наиболее приемлемым для решения пространственных задач может показаться подпространство $V = \{xi + yi + zk\}$, элементы которого — векторы трехмерного евклидова пространства. Однако в этом случае решения уравнений относительно α_2, α_3 и α_4 не являются гармоническими функциями.

Рассмотрим трехмерное напряженное состояние при отсутствии или постоянстве объемных сил. Оно характеризуется тремя уравнениями равновесия, к которым добавляются граничные условия [2]. Для их решения введем функцию напряжений

$$\begin{gathered}\sigma_x = 2\partial_{tyyzz}\varphi, \quad \sigma_y = 2\partial_{txxzz}\varphi, \quad \sigma_z = 2\partial_{txxyy}\varphi \\ \tau_{xy} = -\partial_{txyzz}\varphi, \quad \tau_{xz} = -\partial_{txyyz}\varphi, \quad \tau_{yz} = -\partial_{txxyz}\varphi\end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку напряжения постоянны во времени, то функция напряжений φ должна линейно зависеть от времени, т. е. $\varphi(t, x, y, z) = kt + \varphi_0(x, y, z)$, где k — некоторая постоянная, $\varphi_0(x, y, z)$ — функция, зависящая от координат.

Если объемные силы отсутствуют или постоянны, то уравнения совместности при трехмерном напряженном состоянии можно выразить в виде

$$\nabla^2\Theta = 0, \ (1 + \nu)\,\nabla^2\mathbf{E} + (\partial_{xy} + \partial_{xz} + \partial_{yz})\,\Theta \tag{4}$$

где ν — коэффициент Пуассона, Θ и $\mathbf{E}$ — соответственно сумма нормальных и касательных напряжений, ∇^2 — оператор Лапласа. Так как напряжения постоянны во времени, то

$$\partial_{tt}\Theta = \partial_{tt}\mathbf{E} = \partial_{tx}\Theta = \partial_{ty}\Theta = \partial_{tz}\Theta = 0$$

Дополнив уравнения (4) данными производными до уравнений типа (1) и (2), получим

$$\Box\,\Theta = 0, \quad (1+\nu)\,\Box\,\mathbf{E} + (\partial_{tx} + \partial_{ty} + \partial_{tz} + \partial_{xy} + \partial_{xz} + \partial_{yz})\,\Theta = 0$$

Отсюда следует, что Θ и $\mathbf{E}$ — гармонические функции. Следовательно, $\mathbf{E}$ должна иметь сопряженные функции Q, R, T. Тогда $\mathbf{E} + Qi + Rj + Tk$ — аналитическая функция от η, и значит, можно записать $f(\eta) = \mathbf{E} + Qi + Rj + Tk$. Пятикратный интеграл от этой функции по η представляет собой другую аналитическую функцию, скажем, $4\Psi(\eta)$. Обозначая действительную и мнимые части $\Psi(\eta)$ через e, q, r и t, получим

$$\Psi(\eta) = e + qi + rj + tk = \frac{1}{4}\int\int\int\int\int f(\eta)\,d^5\eta$$

откуда $\Psi^{(5)}(\eta) = \frac{1}{4} f(\eta)$. Кроме того:

$$\partial_{ttxyz}e + \partial_{ttxyz}qi + \partial_{ttxyz}rj + \partial_{ttxyz}tk = \Psi^{(5)}(\eta)\,k\,\partial_z\eta = -{}^1/_4 f(\eta)$$

Приравнивая все действительные части в первом, втором и т. д. членах, находим $\partial_{ttxyz}\,e = -{}^1/_4\mathbf{E}$. Поскольку e, q, r и t — сопряженные функции, то, продифференцировав их на ∂_{txyz}, получим

$$\begin{gathered}
\partial_{txxyz}q = -{}^1/_4\mathbf{E}, \quad \partial_{txyyz}r = -{}^1/_4\mathbf{E}, \quad \partial_{txyzz}t = -{}^1/_4\mathbf{E} \\
\partial_{ttxyz}q = -{}^1/_4 Q, \quad \partial_{txxyz}e = {}^1/_4 Q, \quad \partial_{txyyz}t = {}^1/_4 Q \\
\partial_{txyzz}r = -{}^1/_4 Q, \quad \partial_{ttxyz}r = -{}^1/_4 R, \quad \partial_{txxyz}t = -{}^1/_4 R \\
\partial_{txyyz}e = {}^1/_4 R, \quad \partial_{txyzz}q = -{}^1/_4 R, \quad \partial_{ttxyz}t = -{}^1/_4\mathbf{T} \\
\partial_{txxyz}r = {}^1/_4\mathbf{T}, \quad \partial_{txyyz}q = -{}^1/_4\mathbf{T}, \quad \partial_{txyzz}e = {}^1/_4\mathbf{T}
\end{gathered} \tag{5}$$

Учитывая, что φ — линейная функция от времени, $\partial_{ttxyz}\varphi = 0$, а также соотношения (3) для касательных напряжений, можно записать

$$\mathbf{E} = -(\partial_{ttxyz} + \partial_{txxyz} + \partial_{txyyz} + \partial_{txyzz})\,\varphi = \tau_{xy} + \tau_{xz} + \tau_{yz}$$

Из уравнений (5) следует, что $\varphi + e + q + r + t$ — гармоническая функция. Таким образом, для любой функции напряжений φ имеем

$$\varphi = e_1 - e - q - r - t \tag{6}$$

где e_1 — некоторая гармоническая функция.

Аналогично можно показать, что

$$\begin{gathered}
\Theta = (\partial_{ttxyy} + \partial_{ttxxy} + \partial_{ttxzz} + \partial_{ttxxz} + \partial_{ttyzz} + \partial_{ttyyz} + 2\partial_{txxyy} + \\
+ 2\partial_{txxzz} + 2\partial_{tyyzz})\,\varphi = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z
\end{gathered}$$

Выразим гармоническую функцию Θ в виде суммы шести гармонических функций

$$\begin{gathered}
\Theta_1 = (\partial_{ttxyy} + \partial_{txxyy})\,\varphi, \quad \Theta_2 = (\partial_{ttxxy} + \partial_{txxyy})\,\varphi \\
\Theta_3 = (\partial_{ttxzz} + \partial_{txxzz})\,\varphi, \quad \Theta_4 = (\partial_{ttxxz} + \partial_{txxzz})\,\varphi \\
\Theta_5 = (\partial_{ttyzz} + \partial_{tyyzz})\,\varphi, \quad \Theta_6 = (\partial_{ttyyz} + \partial_{tyyzz})\,\varphi
\end{gathered} \tag{7}$$

имеющих сопряженные функции B_n, C_n и D_n. Следовательно,

$$f_n(\eta) = \Theta_n + B_n i + C_n j + D_n k \quad (n = 1, \ldots, 6)$$

— аналитические функции от η.

Проведя далее рассуждения, аналогичные использованным при выводе (5), получим

$$\varphi = \theta + b + c + d + \theta_0 \tag{8}$$

где θ, b, c и d — сопряженные функции; θ_0 — гармоническая функция.

Уравнения (6) и (8) можно объединить в одно, обозначив

$$2\mathbf{p}_1 = \theta_1 + \theta_0,\ 2\mathbf{p}_0 = \theta - e,\ 2q_0 = b - q,\ 2r_0 = c - r,\ 2t_0 = d - t$$

Имеем

$$\varphi = p_1 + p_0 + q_0 + r_0 + t_0 \tag{9}$$

где p_1 — некоторая гармоническая функция, p_0, q_0, r_0 и t_0 — соответствующим образом подобранные сопряженные функции.

В (9) введем функции q_1, r_1 и t_1, которые являются гармоническими и сопряженными к p, и запишем

$$\delta(\eta) = p_1 + q_1 i + r_1 j + t_1 k$$

Тогда можно проверить, что действительная часть функции

$$(p_0 + q_0 i + r_0 j + t_0 k)(1 - i - j - k) + \delta(\eta)$$

равна правой части уравнения (9). Следовательно, функцию напряжений можно представить в виде

$$\varphi = \mathrm{Re}\,[\varepsilon(\eta)(1 - i - j - k) + \delta(\eta)] \tag{10}$$

Уравнение (10) в свою очередь также можно упростить и выразить в виде

$$\varphi = \mathrm{Re}\,[\Delta(\eta)],\quad \Delta\eta = p_2 + q_2 i + r_2 j + t_2 k,\quad p_2 = p_0 + q_0 + r_0 + t_0 + p_1$$

$$q_2 = -p_0 + q_0 - r_0 + t_0 + q_1,\quad r_2 = -p_0 + q_0 + r_0 - t_0 + r_1,$$

$$t_2 = -p_0 - q_0 + r_0 + t_0 + t_1$$

где $\Delta\eta$ — аналитическая функция, p_2 — гармоническая функция, q_2, r_2 и t_2 — соответствующим образом подобранные сопряженные функции.

Так как равенство (10) выражает φ через $\Delta(\eta)$, то через этот «гиперкомплексный потенциал» можно также представить и напряжения.

Гиперкомплексной функции $f(\eta)$ соответствует сопряженная функция $\bar{f}(\bar{\eta})$. Очевидно, что $f(\eta) + \bar{f}(\bar{\eta}) = 2\,\mathrm{Re}\,f(\eta)$. Тогда $2\varphi = \Delta(\eta) + \bar{\Delta}(\bar{\eta})$, отсюда

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 2G,\quad \tau_{xy} = -Gk$$

$$\tau_{xz} = -Gj,\quad \tau_{yz} = -Gi,\quad G = \mathrm{Re}\,\Delta^{(5)}(\eta)$$

Пусть в прямоугольной системе координат xyz задана некоторая область V, в области V задана поверхность σ, ограниченная некоторой пространственной линией λ. Пусть в каждой точке поверхности определен вектор $F = F_x u + F_y v + F_z w$, где F — результирующая сила, с которой материал слева от элемента поверхности $d\sigma$ действует на материал, расположенный справа от $d\sigma$. Компоненты результирующей силы на поверхности σ таковы:

$$F_x = \iint_\sigma \overline{X}\, d\sigma,\quad F_y = \iint_\sigma \overline{Y}\, d\sigma,\quad F_z = \iint_\sigma \overline{Z}\, d\sigma$$

где $\overline{X}$, $\overline{Y}$ и $\overline{Z}$ — компоненты поверхностных сил, отнесенные к единице площади в данной точке границы. Подставив в эти уравнения вместо напряжений их значения через функцию напряжений и положив $X = 0$, $Y = -\partial_{yyz}\varphi_0$, $Z = \partial_{yzz}\varphi_0$, получим

$$F_x = \iint\limits_{\sigma} [(\partial_y Z - \partial_z Y)\cos(n, x) + (\partial_z \mathbf{X} - \partial_x Z)\cos(n, y) + \\ + (\partial_y Y - \partial_y \mathbf{X})\cos(n, z)]\, d\sigma$$

Данный интеграл по поверхности σ равен криволинейному интегралу по границе λ (формула Стокса). Отсюда, учитывая значения $\mathbf{X}$, Y и Z, имеем

$$F_x = \int\limits_{\lambda} - \partial_y (\partial_{yz}\varphi_0)\, dy + \partial_z (\partial_{yz}\varphi_0)\, dz$$

Следует заметить, что, поскольку $\mathbf{X} = 0$, то пространственный контур λ совпадает с контуром L_{yz}, который является проекцией контура λ на плоскость yz. При движении по контуру L_{yz} от точки $\mathbf{A}_{yz}$ к $\mathbf{B}_{yz}$ координата dz увеличивается, а dy уменьшается. Следовательно, dy нужно взять с минусом. Отсюда

$$F_x = \int\limits_{(\mathbf{A}_{yz})}^{(\mathbf{B}_{yz})} d(\partial_{yz}\varphi_0) = [\mathrm{Re}\, \Delta^{(3)}(\eta)]_{(\mathbf{A}_{yz})}^{(\mathbf{B}_{yz})}\, i$$

Аналогичные формулы получаем для F_y и F_z.

Поверхность σ может составлять часть замкнутой граничной поверхности, которая при ее сечении плоскостями будет давать замкнутые границы λ в пространстве. При проектировании λ на плоскости xy, xz и yz будем получать замкнутые границы L_{xy}, L_{xz} и L_{yz} в соответствующих плоскостях. Тогда, если двигаться от точки $\mathbf{A}$ к точке $\mathbf{B}$ границы λ так, чтобы материал по соответствующим координатным осям все время оставался слева, действующие силы будут равны F_x, F_y и F_z. Найдем их как функции L_{xy}, L_{xz} и L_{yz} в виде

$$F_x u + F_y v + F_z w = \frac{1}{2} \{[f_{11}(L_{xy})\, u + f_{12}(L_{xy})\, v] + \\ + [f_{21}(L_{xz})\, u + f_{22}(L_{xz})\, w] + [f_{31}(L_{yz})\, v + f_{32}(L_{yz})\, w]\} \tag{11}$$

где все коэффициенты при u, v и w — действительные функции. Обозначая η_{xy}, η_{xz} и η_{yz} координаты подвижной точки $\mathbf{B}$, при ее проектировании на соответствующие координатные плоскости xy, xz и yz, можно выразить граничные условия на краю трехмерной полости в форме

$$-\mathrm{Re}\, \Delta_{xy}^{(3)}(\eta_{xy}) - \mathrm{Re}\, \Delta_{xz}^{(3)}(\eta_{xz}) - \mathrm{Re}\, \Delta_{yz}^{(3)}(\eta_{yz}) = \Delta \tag{12}$$

где Δ — правая часть равенства (11). Для определения из этого уравнения трех гиперкомплексных потенциалов заменим гиперкомплексные переменные η_{xy}, η_{xz} и η_{yz} для любой точки в физической области новыми гиперкомплексными переменными ζ_{xy}, ζ_{xz} и ζ_{yz}, связанными зависимостями $\eta_i = \omega_i(\zeta_i)$, $i \in \{xy, xz, yz\}$, где $\omega_i(\zeta_i)$ — подобранные соответствующим образом функции от ζ_i. Эти функции подобраны так, что точки $\mathbf{P}_i'$, определяемые соответствующими гиперкомплексными координатами ζ_i в плоскостях ζ_i соответствуют точкам $\mathbf{P}_i$ (или отображаются в эти точки) на соответствующих плоскостях η_i. Функции, осуществляющие конформное отображение, будем выбирать таким образом, чтобы единичные окружности $\rho_i = 1$ на плоскостях ζ_i отображались на кривые L_i. При этом вместо прямоугольных координат ξ_i, η_i удобно использовать полярные координаты ρ_i, Θ_i. Эти функции должны быть аналитическими в каждой из точек $\mathbf{P}_i'$, которые отображаются в соответствующие «материальные» точки $\mathbf{P}_i$. В качестве таких точек можно взять разложение в ряд Лорана по соответствующим координатным плоскостям. Тогда любые функции от η_i будут также функциями соответственно от ζ_i, получаемых заменой η_i на $\omega_i(\zeta_i)$. Отсюда

$$\Delta_i^{(3)}(\eta_i) = \Delta_i^{(3)}[\omega_i(\zeta_i)] = \varphi_i(\zeta_i)$$

Выразим гиперкомплексные переменные η_i в полярных координатах $\eta_i = r_i\sigma_i$, $\sigma_{xy} = je^{k\Theta_{xy}}$, $\sigma_{xz} = ke^{j\Theta_{xz}}$, $\sigma_{yz} = je^{i\Theta_{yz}}$. Заметим, что σ_i есть в действительности ζ_i для характерных точек на единичных окружностях. Таким образом, правую часть уравнения (12) можно выразить как функцию от σ_i и записать

$$\Delta = jf_{xy}(\sigma_{xy}) + kf_{xz}(\sigma_{xz}) + jf_{yz}(\sigma_{yz})$$

Функция $jf_{xy}(\sigma_{xy})$ соответствует нагрузке, приложенной между точками $\mathbf{A}_{xy}$ и $\mathbf{B}_{xy}$ плоскости xy, которая равна $F_z k$, аналогично функции $kf_{xz}(\sigma_{xz})$ и $jf_{yz}(\sigma_{yz})$ соответствуют нагрузкам $F_y j$ и $F_x i$.

После всего перечисленного граничное условие (12) примет следующий вид:

$$-\operatorname{Re}\varphi_{xy}(\sigma_{xy}) - \operatorname{Re}\varphi_{xz}(\sigma_{xz}) - \operatorname{Re}\varphi_{yz}(\sigma_{yz}) = jf_{xy}(\sigma_{xy}) + kf_{xz}(\sigma_{xz}) + jf_{yz}(\sigma_{yz}) \tag{13}$$

Данное трехмерное граничное условие является аналогом двухмерного в криволинейных координатах [3]. Для его решения проведем вспомогательные рассуждения.

Рассмотрим одну из гиперкомплексных плоскостей, например, xy. Пусть L — спрямляемая кривая в xy; $\eta_{xy} = \lambda(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$ — ее уравнение, где t изменяется от α до β. Выберем произвольную монотонную последовательность $n+1$ значений t: $t_0 = \alpha$, t_1, ..., $t_n = \beta$. Этому выбору соответствует разбиение $\mathbf{T}$ кривой L на n дуг l_0, ..., $l_{(n-1)}$. Пусть $f(\eta_{xy}) = u(x, y)\,i + v(x, y)\,j$ — функция однозначная и непрерывная на L. Выберем между t_k и t_{k+1} по одному значению параметра $t = \tau_k$; получим на каждой дуге l_k по одной точке $\zeta_k = \lambda(\tau_k) = \xi_k i + \eta_k j$. Тогда можно показать, что

$$\lim_{\delta_{\mathbf{T}}\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(\eta_{k+1} - \eta_k) = \int_L f(\eta_{xy})\,d\eta_{xy}$$

Пусть L — гладкая кривая, поэтому для нее можно указать параметрические представление $\eta_{xy} = \lambda(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, такое, что $\lambda(t)$ имеет непрерывную и не обращающуюся в ноль на сегменте $[\alpha, \beta]$ производную. Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned}\int_L f(\eta_{xy})\,d\eta_{xy} &= \int_L -u\,dx - v\,dy + k\int_L -v\,dx + u\,dy = \\ &= \int_\alpha^\beta \{-u[x(t), y(t)]\,x'(t) - v[x(t), y(t)]\}\,dt + \\ &+ k\int_\alpha^\beta \{-v[x(t), y(t)] + u[x(t), y(t)]\}\,dt = \int_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\,\lambda'(t)\,dt\end{aligned} \tag{14}$$

$$f[\lambda(t)] = iu[x(t), y(t)] + jv[x(t), y(t)],$$

$$\lambda'(t) = ix'(t) + jy'(t)$$

Здесь использовано следующее свойство интегралов:

$$\int_L \sum_{k=1}^{p} c_k f_k(\eta_{xy})\,d\eta_{xy} = \sum_{k=1}^{p} c_k \int_L f_k(\eta_{xy})\,d\eta_{xy}$$

Можно показать также, что будут справедливы интегральная теорема и интегральная формула Коши (14) для гиперплоскостей i.

Если принять $\eta_i = \omega_i(\zeta_i)$ при $\omega_i(\zeta_i) = R_i(\zeta_i) + m_i/\zeta_i$, где R_i — любые положительные, а m_i — положительные постоянные, меньшие единицы, то координаты на соответствующих плоскостях выразятся через известные для эллипсов соотношения.

Определим потенциалы $\varphi_i(\zeta_i)$, удовлетворяющие граничным условиям (13) для любой из внешних точек ζ_i единичного круга. Далее уравнение (13) поочередно умножается на $1/(\sigma_i - \zeta_i)$. Каждый член после этого остается некоторой функцией от σ_i и может быть проинтегрирован по единичным окружностям γ_i. Отсюда из интегральной теоремы Коши для единичных кругов, когда ζ_i обозначают точки вне их, получаем

$$\operatorname{Re}\varphi_i(\zeta_i) = \frac{b_i}{4\pi}\int\limits_{\gamma_i}\frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i-\zeta_i}\,d\sigma_i, \quad b_{xy} = \frac{j}{k}, \quad b_{xz} = \frac{k}{j}, \quad b_{yz} = \frac{j}{i}$$

Рассмотрим пространство с эллиптической полостью, которая свободна от нагрузки, причем напряжения вызываются приложением равномерного растягивающего усилия S, проекции которого на оси координат S_x, S_y и S_z.

Будем искать аналитические потенциалы, которые следует наложить на поле простого растяжения, действующего всюду в области при отсутствии отверстия.

Рассмотрим плоскость xy. Сила, передаваемая через дугу $\mathbf{A}_{xy}\mathbf{B}_{xy}$, в соответствии с вышеизложенным составляет

$$F_z^\circ k = S_z\eta_{xy} = S_zR_{xy}\left(\sigma_{xy} + \frac{m_{xy}}{\sigma_{xy}}\right)$$

Далее имеем

$$jf_{xy}(\sigma_{xy}) = F_zk = -F^c k = -S_zR_{xy}\left(\sigma_{xy} + \frac{m_{xy}}{\sigma_{xy}}\right)$$

Подставив это выражение в (15), при учете интегральной теоремы Коши, получим

$$\operatorname{Re}\varphi_{xy}(\zeta_{xy}) = -\frac{1}{2}S_zR_{xy}m_{xy}/\zeta_{xy}$$

а так как $F_zk = [\operatorname{Re}\Delta^{(3)}(\eta)]_{(\mathrm{A}_{xy})}^{(\mathrm{B}_{xy})}k = [\operatorname{Re}\Delta^{(3)}(\eta_{xy})]k = [\operatorname{Re}\varphi_{xy}(\zeta_{xy})]k$, то

$$\sigma_z = +\frac{2S_zm_{xy}\zeta_{xy}^3}{R_{xy}(\zeta_{xy}^2 - m_{xy})^3}, \quad \tau_{xy} = -\frac{S_zm_{xy}\zeta_{xy}^3}{R_{xy}(\zeta_{xy}^2 - m_{xy})^3}k$$

Аналогично при рассмотрении плоскостей xz и yz определяются остальные нормальные и касательные напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.

Караганда

Поступила в редакцию
20.VII.1989