Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 539.3

Л. М. Зубов

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛАСТОСТАТИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

Формулируются принципы стационарности для статических задач нелинейной теории упругости в случае, когда задана граница тела в деформированном состоянии. В предположении об однородности материала для определенных типов краевых условий строятся функционалы потенциальной энергии и дополнительной работы, а также функционалы типа Ху — Васидзу и Тонти. Принцип Гамильтона — Остроградского для динамических задач нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах рассмотрен в [1, 2].

1. Система уравнений равновесия нелинейно-упругого тела имеет вид [3]

$$\operatorname{div}\mathbf{D} + \rho_0\mathbf{b} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{D} = \partial W_0/\partial\mathbf{C},\ \ \mathbf{C} = \operatorname{grad}\mathbf{R},\ \ \mathbf{R} = X_n\mathbf{i}_n \tag{1.2}$$

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i}_k\partial/\partial x_k,\ \ \operatorname{div}\mathbf{D} \equiv \mathbf{i}_s\cdot\partial\mathbf{D}/\partial x_s$$

Здесь x_k — декартовы координаты точек тела в недеформированной (отсчетной) конфигурации, т. е. лагранжевы координаты, $\mathbf{i}_s$ — координатные орты, grad и div — операторы градиента и дивергенции в отсчетной конфигурации, X_n — декартовы координаты точек тела в деформированном состоянии, т. е. эйлеровы координаты, $\mathbf{C}$ — градиент места, $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор частицы тела в деформированной конфигурации, ρ_0 — плотность материала в отсчетной конфигурации, $\mathbf{b}$ — массовая внешняя нагрузка, W_0 — удельная потенциальная энергия деформации, приходящаяся на единицу объема тела в недеформированном состоянии.

Система уравнений (1.1), (1.2) легко сводится к системе относительно неизвестных X_k с независимыми переменными x_s. При этом предполагается известной область, занимаемая упругим телом в отсчетной конфигурации. Краевые условия формулируются на граничной поверхности σ, уравнение которой задано в лагранжевых координатах x_s. Указанная краевая задача эластостатики в лагранжевых координатах допускает ряд вариационных формулировок, приведенных в [4, 5].

Возможна ситуация, когда заданной является поверхность Σ, ограничивающая упругое тело в деформированном состоянии, а задача заключается в нахождении напряженно-деформированного состояния тела при определенных граничных условиях. В этом случае за независимые переменные следует принять эйлеровы координаты X_s, а за основные неизвестные — лагранжевы координаты x_k.

Уравнения равновесия в эйлеровых координатах записываются при помощи симметричного тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ [3]

$$\operatorname{Div}\mathbf{T} + \rho\mathbf{b} = 0,\quad \operatorname{Div}\mathbf{T} \equiv \mathbf{i}_k\cdot\partial\mathbf{T}/\partial X_k \tag{1.3}$$

где ρ — плотность материала в деформированной конфигурации, Div — оператор дивергенции в эйлеровых координатах.

Используя связь тензоров напряжений Коши и Пиолы [3]

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C})\,\mathbf{C}^{-T}\cdot\mathbf{T}, \quad \mathbf{C}^{-T} \equiv (\mathbf{C}^{-1})^T = (\mathbf{C}^T)^{-1} \tag{1.4}$$

а также формулы

$$\partial\,(\det \mathbf{F}) \,/\, \partial\mathbf{F} = (\det \mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-T}$$

$$\partial W/\partial\mathbf{C} = -\mathbf{F}^T\cdot(\partial W/\partial\mathbf{F})\cdot\mathbf{F}^T$$

из (1.2) получим определяющее соотношение для тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{T} = W\mathbf{E} - (\partial W/\partial\mathbf{F})\cdot\mathbf{F}^T \tag{1.5}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1} = \operatorname{Grad}\mathbf{r} = \mathbf{i}_k\partial\mathbf{r}/\partial X_k, \quad \mathbf{r} = x_s\mathbf{i}_s$$

$$W = (\det \mathbf{F})\,W_0 = W(\mathbf{F})$$

Здесь $\mathbf{F}$ — обратный градиент места, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы в отсчетной конфигурации, Grad — оператор градиента в эйлеровых переменных, W — потенциальная энергия деформации, содержащаяся в единице объема деформированного тела, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Для однородного тела удельная энергия W зависит от координат X_k только посредством тензора $\mathbf{F}\,(X_k)$, т. е. отсутствует явная зависимость W от X_k. Учитывая это, найдем при помощи (1.5) выражение $\operatorname{Div}\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_s\cdot\partial\,[W\mathbf{E} - (\partial W/\partial\mathbf{F})\cdot\mathbf{F}^T] \,/\, \partial X_s &= \\ = (\partial W/\partial F_{mn})\,(\partial F_{mn}/\partial X_s)\,\mathbf{i}_s &- F_{kn}\partial\,(\partial W/\partial F_{sn}) \,/\, \partial X_s\mathbf{i}_k - \\ - (\partial W/\partial F_{sn})\,(\partial F_{kn}/\partial X_s)\,\mathbf{i}_k&, \quad F_{mn} = \mathbf{i}_m\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{i}_n\end{aligned} \tag{1.6}$$

Поскольку $F_{sn} = \partial x_n/\partial X_s$, имеем $\partial F_{sn}/\partial X_k = \partial F_{kn}/\partial X_s$, откуда

$$(\partial W/\partial F_{mn})\,(\partial F_{mn}/\partial X_s)\,\mathbf{i}_s = (\partial W/\partial F_{sn})\,(\partial F_{kn}/\partial X_s)\,\mathbf{i}_k \tag{1.7}$$

Согласно (1.6), (1.7) уравнения равновесия (1.2) принимают вид

$$\operatorname{Div}\mathbf{K} - \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{F}^{-T} = 0 \tag{1.8}$$

$$\mathbf{K} = \partial W/\partial\mathbf{F} \tag{1.9}$$

При отсутствии массовых сил уравнения равновесия (1.8) и определяющие соотношения (1.9) полностью идентичны уравнениям (1.1) и соотношениям (1.2) с той разницей, что отсчетная и деформированная конфигурации меняются ролями. Таким образом, несимметричный тензор $\mathbf{K}$ может служить аналогом тензора напряжений Пиолы для эйлеровых координат.

Указанная аналогия не распространяется на силовые граничные условия, которые имеют две эквивалентные формы записи [3]

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{f} \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{N}$ — единичные векторы нормалей соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях; $\mathbf{f}_0$ — нагрузка, приходящаяся на единицу площади поверхности σ; $\mathbf{f}$ — нагрузка, действующая на единицу площади поверхности Σ. Учитывая вытекающее из (1.5), (1.9) соотношение

$$\mathbf{K} = (W\mathbf{E} - \mathbf{T})\cdot\mathbf{F}^{-T} \tag{1.11}$$

из (1.10) получим формулировку силовых граничных условий в терминах тензора $\mathbf{K}$

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{K} = (W\mathbf{N} - \mathbf{f})\cdot\mathbf{F}^{-T} \tag{1.12}$$

2. Предположим, что граница Σ упругого тела в деформированном состоянии известна и состоит из трех частей: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. На Σ_1

задан вектор перемещений, что равносильно заданию вектора $\mathbf{r}$, определяющего положение частиц поверхности в отсчетной конфигурации. На Σ_3 задана внешняя нагрузка, т. е. выполняется условие (1.12). Точки поверхности Σ_2 могут без трения скользить по заданной твердой поверхности, не отрываясь от нее. Последнее условие приводит к следующему ограничению на вариации $\delta\mathbf{r}$ на Σ_2

$$\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{r}=0 \tag{2.1}$$

Учитывая формулу преобразования элементарной ориентированной площадки при деформации

$$\mathbf{n}\,d\sigma=(\det\mathbf{F})\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{N}\,d\Sigma$$

ограничение (2.1) перепишем в виде

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}=0 \tag{2.2}$$

Условие отсутствия трения на поверхности Σ_2

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{G}=0,\quad \mathbf{G}=\mathbf{E}-\mathbf{N}\mathbf{N}$$

согласно (1.11) эквивалентно требованию

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{G}=0 \tag{2.3}$$

Покажем, что уравнения равновесия (1.8), граничные условия (1.12) на Σ_3 и (2.3) на Σ_2 вытекают из вариационного уравнения

$$\delta\int\limits_V W\,dV=-\int\limits_V \rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}\,dV+\int\limits_{\Sigma_3}(W\mathbf{N}-\mathbf{f})\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\Sigma \tag{2.4}$$

Вариации $\delta\mathbf{r}$ в (2.4) подчинены требованию $\delta\mathbf{r}=0$ на Σ_1 и условию (2.2) на Σ_2. На основании (1.9) имеем

$$\delta\int\limits_V W\,dV=\int\limits_V \operatorname{tr}(\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{F}^{T})\,dV=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\Sigma-\int\limits_V(\operatorname{Div}\mathbf{K})\cdot\delta\mathbf{r}\,dV=$$
$$=\int\limits_{\Sigma_2\cup\Sigma_3}\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{r}\,d\Sigma-\int\limits_V(\operatorname{Div}\mathbf{K})\cdot\delta\mathbf{r}\,dV \tag{2.5}$$

Учитывая (2.5), ограничение (2.2) на Σ_2, а также равенства

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{r}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}+\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{N}\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}$$
$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{G}=\mathbf{G}$$

вариационное уравнение (2.4) преобразуем к виду

$$\int(\operatorname{Div}\mathbf{K}-\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{F}^{-T})\cdot\delta\mathbf{r}\,dV-\int\limits_{\Sigma_2}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{G})\cdot(\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r})\,d\Sigma-$$
$$-\int\limits_{\Sigma_3}[\mathbf{N}\cdot\mathbf{K}-(W\mathbf{N}-\mathbf{f})\cdot\mathbf{F}^{-T}]\cdot\delta\mathbf{r}\,d\Sigma=0 \tag{2.6}$$

Так как на Σ_2 вектор $\mathbf{G}\cdot\mathbf{F}^{-T}\cdot\delta\mathbf{r}$ может принимать любые значения, лежащие в плоскости, касательной к поверхности Σ_2, а в V и на Σ_3 вариации $\delta\mathbf{r}$ произвольны, то из (2.6) следуют уравнения равновесия (1.8) и краевые условия (1.12) и (2.3).

Выражение в правой части (2.4), вообще говоря, нельзя представить в виде вариации какого-либо функционала. Поэтому в общем случае вариационное уравнение (2.4) не является вариационным принципом, так как не сводится к условию стационарности некоторого функционала. Более того, видно, что даже в простейшем случае $\mathbf{b}=\text{const}$ объемный интеграл в правой части (2.4) не будет вариацией функционала, а поверхностный интеграл даже при отсутствии краевой нагрузки ($\mathbf{f}=0$) также не сводится к вариации какого-либо функционала.

Отсюда, в частности, вытекает, что, даже если пренебречь массовыми силами, краевая задача нелинейной эластостатики в эйлеровых координатах со свободным участком границы не допускает вариационной формулировки, т. е. не эквивалентна задаче о стационарности функционала.

В дальнейшем будем полагать, что массовые силы отсутствуют, а граница тела Σ не содержит участка Σ_3 с заданной нагрузкой. В этом случае вариационное уравнение (2.4) превращается в вариационный принцип стационарности потенциальной энергии

$$\delta\Pi[\mathbf{r}] = 0, \quad \Pi = \int\limits_V W\,dV$$

Соотношения (1.8), (1.9) позволяют построить принцип типа Ху — Васидзу для задачи нелинейной эластостатики в эйлеровых координатах. В этом принципе независимо варьируются функции $\mathbf{r}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$, а функционал имеет вид

$$\Pi_1[\mathbf{r}, \mathbf{F}, \mathbf{K}] = \int\limits_V [W(\mathbf{F}) - \operatorname{tr}(\mathbf{K}^T \cdot (\mathbf{F} - \operatorname{Grad}\mathbf{r}))]\,dV - \int\limits_{\Sigma_1} \mathbf{N}\cdot\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*)\,d\Sigma \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{r}^*$ — заданное на Σ_1 краевое значение вектора места в отсчетной конфигурации. Главным (устойчивым) краевым условием для функционала (2.7) является налагаемое на вектор $\mathbf{r}$ геометрическое условие контакта на Σ_2, приводящее к ограничению (2.2). Уравнениями Эйлера вариационной задачи $\delta\Pi_1 = 0$ служат уравнения равновесия (1.8) при $\mathbf{b} = 0$, определяющие соотношения (1.9) и геометрическое соотношение $\mathbf{F} = \operatorname{Grad}\mathbf{r}$. Граничное условие $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$ на Σ_1 и условие отсутствия трения на Σ_2 (2.3) вытекают из вариационного принципа $\delta\Pi_1 = 0$, т. е. являются естественными краевыми условиями для функционала Π_1.

3. Систему уравнений равновесия упругого тела в эйлеровых координатах можно преобразовать к виду, не содержащему функции $\mathbf{r}(X_m)$ в качестве неизвестной. Исключение этой функции приводит к следующему уравнению совместности:

$$\operatorname{Rot}\mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{Rot}\mathbf{F} \equiv \mathbf{i}_k \times \partial\mathbf{F}/\partial X_k \quad (3.1)$$

При выполнении уравнения (3.1) векторное поле $\mathbf{r}(X_m)$ определяется квадратурами через тензорное поле $\mathbf{F}(X_m)$.

Если массовые силы отсутствуют, то уравнению равновесия (1.8) можно удовлетворить при помощи тензора функций напряжений Φ

$$\mathbf{K} = \operatorname{Rot}\mathbf{\Phi} \quad (3.2)$$

Если при помощи определяющих соотношений (1.9) выразить обратный градиент места $\mathbf{F}$ через тензор напряжений $\mathbf{K}$ и учесть (3.2), то система уравнений в эйлеровых координатах, описывающая равновесие упругого тела, будет состоять из девяти скалярных уравнений совместности (3.1) и содержать в качестве неизвестных компоненты тензора $\mathbf{\Phi}$.

Как и для задачи эластостатики в лагранжевых координатах [4], система уравнений равновесия, не содержащая перемещений, может быть получена из вариационного принципа типа Кастильяно, для формулировки которого введем дополнительную энергию U — функцию тензора напряжений $\mathbf{K}$, связанную с потенциальной энергией деформации W преобразованием Лежандра

$$U = \operatorname{tr}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^T) - W, \quad \mathbf{F} = \partial U/\partial\mathrm{K} \quad (3.3)$$

Разумеется, дополнительная энергия U не совпадает с дополнительной энергией работы [4].

Для построения функции U (**K**) необходимо выразить обратный градиент места **F** через тензор напряжений **K**. Рассмотрим этот вопрос в случае изотропного материала, для которого потенциальная энергия деформации W является функцией инвариантов симметричного и положительно определенного тензора $\mathbf{H} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^T$, где **A** — ортогональный тензор, сопровождающий деформацию [3]. Мера деформации **H** связана с тензором конечных деформаций Коши — Грина [3] ε соотношением

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{E} + 2\varepsilon)^{-1}$$

Из (1.9) следует, что в изотропном материале тензор $\mathbf{A} \cdot \mathbf{K}$ симметричен и является изотропной функцией меры деформации **H**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = \varphi(\mathbf{H}) \tag{3.4}$$

Обращая зависимость (3.4), получим $\mathbf{H} = \psi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{K})$.

Например, для материала с функцией потенциальной энергии

$$W = {}^1/_2 \lambda \operatorname{tr}^2 (\mathbf{H} - \mathbf{E}) + \mu \operatorname{tr} (\mathbf{H} - \mathbf{E})^2, \quad \lambda, \quad \mu = \mathrm{const},$$

имеем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = [\lambda (\operatorname{tr} \mathbf{H} - 3) - 2\mu]\, \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H} - \mathbf{E} = (2\mu)^{-1} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} - \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{tr} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{K})\, \mathbf{E} \right], \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Поскольку $\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{H}$, задача построения зависимости **F** (**K**) свелась к выражению ортогонального тензора **A** через тензор **K**:

$$\mathbf{F}(\mathbf{K}) = \mathbf{A}^T (\mathbf{K}) \cdot \psi [\mathbf{A}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{K}]$$

Выражение **A** (**K**) определяется путем решения уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{A}^T \tag{3.5}$$

означающего симметричность тензора $\mathbf{A} \cdot \mathbf{K}$.

Уравнение (3.5) идентично уравнению работы [6], из которого определяется зависимость тензора поворота **A** от тензора напряжений Пиолы. Как установлено в [6], решение уравнения (3.5) не единственно и в общем случае имеет четыре ветви. Аналогично [6] доказывается, что только одна из этих ветвей соответствует углам поворота материальных волокон, не превосходящим 90°. Отбрасывание остальных ветвей осуществляется при помощи неравенства $\operatorname{tr} \mathbf{A} > 1$. Таким образом, если повороты материальных волокон при деформации не являются чрезмерно большими, то представление обратного градиента места **F** через тензор напряжений **K** будет однозначным.

При помощи (3.2) выразим дополнительную энергию U (**K**) через тензор функций напряжений и рассмотрим следующий функционал типа Кастильяно:

$$\Pi_2 [\mathbf{\Phi}] = \int\limits_V U (\operatorname{Rot} \mathbf{\Phi})\, dV - \int\limits_\Sigma \operatorname{tr} [\mathbf{N} \times \mathbf{\Phi} \cdot (\nabla \mathbf{r}^*)^T]\, d\Sigma \tag{3.6}$$

$$\nabla = \mathbf{G} \cdot \operatorname{Grad}$$

Здесь принято, что $\Sigma = \Sigma_1$, а через ∇ обозначен двумерный оператор градиента на поверхности [7]. Вариация функционала (3.6) имеет вид

$$\delta \Pi_2 = \int\limits_V \operatorname{tr} (\delta \mathbf{\Phi}^T \cdot \operatorname{Rot} \mathbf{F})\, dV + \int\limits_\Sigma \operatorname{tr} [(\mathbf{N} \times \delta \mathbf{\Phi}) \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{F} - \nabla \mathbf{r}^*)^T]\, d\Sigma \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) показывает, что требование стационарности функционала Π_2 эквивалентно уравнениям совместности (3.1) и граничным условиям

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{F} = \nabla\mathbf{r}^* \tag{3.8}$$

Если поверхность Σ односвязна, то условия (3.8) эквивалентны условиям $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*$. В самом деле, дифференцируя последние, получаем (3.8), а интегрируя (3.8), находим $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{d}$, где $\mathbf{d}$ — произвольный постоянный вектор. Поскольку наложение поступательного перемещения не влияет на напряженно-деформированное состояние тела, то условия (3.8) равносильны заданию перемещений на границе области.

Для анизотропного однородного материала можно сформулировать слабый принцип дополнительной энергии, аналогичный вариационному принципу, предложенному в [8, 9]. В этом случае наряду со статически возможными напряжениями независимо варьируется поле ортогонального тензора $\mathbf{A}$ и используется следующее выражение для дополнительной энергии:

$$U(\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{H}) - W, \quad \mathbf{P} = {}^1/_2\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{K}^T\cdot\mathbf{A}^T) = \partial W/\partial\mathbf{H} \tag{3.9}$$

На основании (3.9) имеем

$$\delta U = \operatorname{tr}(\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(\mathbf{F}^T\cdot\delta\mathbf{K}) + \operatorname{tr}(\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\delta\mathbf{A}) \tag{3.10}$$

Функционал слабого принципа дополнительной энергии в эйлеровых координатах имеет вид

$$\Pi_3[\mathbf{\Phi}, \mathbf{A}] = \int_V U(\operatorname{Rot}\mathbf{\Phi}, \mathbf{A})\,dV - \int_\Sigma \operatorname{tr}[(\mathrm{N}\times\mathbf{\Phi})\cdot(\nabla\mathbf{r}^*)^T]\,d\Sigma \tag{3.11}$$

В силу (3.10) и свойства антисимметричности тензора $\mathbf{A}^T\cdot\delta\mathbf{A}$ условия стационарности функционала (3.11) состоят из условий стационарности функционала Π_2 и уравнения $\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\cdot\mathbf{K}^T$, которое согласно (1.11) выражает свойство симметричности тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$.

В заключение приведем выражение функционала вариационного принципа типа Тонти

$$\Pi_4[\mathbf{F}, \mathbf{\Phi}] = \int_V [\operatorname{tr}(\operatorname{Rot}\mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{F}^T) - W(\mathbf{F})]\,dV - \int_\Sigma \operatorname{tr}[(\mathbf{N}\times\mathbf{\Phi})\cdot(\nabla\mathbf{r}^*)^T]\,d\Sigma$$

Условиями стационарности функционала Π_4 служат уравнения

$$\operatorname{Rot}\mathbf{\Phi} = \partial W/\partial\mathbf{F}, \quad \operatorname{Rot}\mathbf{F} = 0$$

и граничные условия (3.8) на Σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Зубов Л. М.* Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 241—245.
5. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406—410.
6. *Зубов Л. М.* О представлении градиента перемещения изотропного упругого тела через тензор напряжений Пиола // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1070—1077.
7. *Зубов Л. М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
8. *Christoffersen J.* On Zubov's principle of stationary complementary energy and a related principle // Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics. 1973. Rep. 44. 10 p.
9. *Де Вебеке Б. Ф.* Новый вариационный принцип в теории упругости с конечными перемещениями // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 194—210.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
16.X.1990