

УДК 532.5 : 534.222

© 1991 г.

С. И. Сафаргулова, Н. Н. Смирнов

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Исследуются свойства системы уравнений, описывающей двухскоростное движение пористой среды. Определяется тип системы уравнений в зависимости от скорости проскальзывания фаз и разности напряжений в фазах. Установлены области изменения определяющих параметров, при которых система уравнений, описывающая динамику двухфазной пористой среды, остается гиперболической.

Для корректной постановки задачи двухскоростного течения сжимаемой пористой среды необходимо определить тип соответствующей системы дифференциальных уравнений. Исследованиям подобного рода для различных систем уравнений, описывающих движение многофазных сред, посвящено значительное число работ. Выписаны уравнения неразрывности и движения для каждой фазы; для замыкания системы использовано предположение о баротропности; указана негиперболичность такой системы уравнений при реальных значениях разности скоростей фаз [1, 2]. Показано [3], что в более общем случае для полной системы уравнений, описывающей течение сжимаемых фаз, при использовании модели, содержащей одно и то же давление для различных фаз, система дифференциальных уравнений не гиперболична при реальных значениях величины проскальзывания. Исследовано распространение малых возмущений в смеси с баротропной газовой фазой; отмечено, что свойственные системе дифференциальных уравнений негиперболичность и неустойчивость малых возмущений вызваны недостаточно полным описанием межфазного взаимодействия внутри дисперсной фазы [4]. При введении различных определяемых независимо для каждой фазы давлений система уравнений становится гиперболической [5]. Получены неравенства, определяющие тип системы в пространстве физических переменных в случае несжимаемой твердой фазы и общего давления для обеих фаз¹.

Система уравнений, описывающая одномерное, нестационарное течение двухфазной пористой смеси при отсутствии межфазного массообмена, имеет вид [6]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i u_i}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i u_i^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i p_i}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} = (-1)^i F \\ & \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i (1/2 u_i^2 + e_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i^\circ \alpha_i u_i (1/2 u_i^2 + e_i)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i p_i u_i}{\partial x} - \rho_1 u_2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} + p_1 \frac{d_2 \alpha_i}{dt} = \\ & = (-1)^i (F u_2 + Q); \quad \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_i° , u_i , e_i , α_i — истинная плотность, скорость, внутренняя энергия и среднеобъемная концентрация i -й фазы ($i = 1, 2$), p_1 — давление в газе, p_2 — продольное напряжение в конденсированной фазе, взятое с обратным знаком, F и Q характеризуют межфазное трение и теплообмен.

Дополним систему уравнениями состояния для газа $p_1 = \rho_1^\circ R T_1$ и для твердой фазы в предположении, что локально имеет место плоское дефор-

¹ Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Исследование структур изотермических ударных волн и расчет разлета облака газозвеси: Препринт № 8. Новосибирск, Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР. 1986. 50 с.

мированное состояние:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= ap_1 - bp_2, \quad \varepsilon_{xx} = ap_2 - bp_1 \\ a &= (1 - \nu)(1 + \nu)/E, \quad b = \nu(1 + \nu)/E, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ε_{rr} — деформация в поперечном направлении, ε_{xx} — деформация в продольном направлении, причем при сжатии деформации положительны; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

После преобразований систему уравнений (1) можно привести к виду

$$\frac{\partial \rho_i^0 \alpha_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i^0 \alpha_i u_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = - \frac{F}{\rho_1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{F}{\rho_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{\rho_1}{\rho_1^0} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{p_1(u_2 - u_1)}{\rho_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) = \\ = - \frac{F(u_2 - u_1)}{\rho_1} - \frac{Q}{\rho_1} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial e_2}{\partial x} + \frac{p_2}{\rho_2^0} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \right) = \frac{Q}{\rho_2} \quad (5)$$

Кроме этого, можно заметить, что между ε_{rr} и α_1 существует следующая дифференциальная связь:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \alpha_2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial x} \right) = 0 \quad (6)$$

а кинематическое соотношение между деформацией в продольном направлении ε_{xx} и скоростью u_2 выражается соотношением

$$\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

Найдем характеристические направления в плоскости x, t системы дифференциальных уравнений.

Уравнение (4) при учете уравнения неразрывности газовой фазы и соотношения (6) приводится к виду

$$T_1 \frac{d_1 s_1}{dt} = - \frac{F(u_2 - u_1)}{\rho_1} - \frac{Q}{\rho_1} \quad (8)$$

Уравнение энергии для твердой фазы (5), учитывая уравнение (7), можно записать следующим образом:

$$T_2 \frac{d_2 s_2}{dt} = \frac{Q}{\rho_2} \quad (9)$$

Итак, уравнения для внутренней энергии каждой фазы дают два характеристических направления, определяемых полями скоростей первой и второй фазы и соответствующих переносу температурных возмущений.

Интегрируя уравнение (6), получим при учете равенств (2) зависимость

$$\alpha_1 = f(p_1, p_2) \quad (f(p_1, p_2) = 1 - \alpha_{20} \exp(bp_2 - ap_1)) \quad (10)$$

Уравнение (7) при учете уравнения неразрывности твердой фазы дает интеграл

$$\rho_2^0 = g(p_1, p_2) \quad (g(p_1, p_2) = \rho_{20}^0 \exp((p_1 + p_2)(a - b))) \quad (11)$$

Таким образом, остальные характеристические направления являются характеристическими направлениями системы (3).

Преобразуем эту систему и запишем ее относительно неизвестных функций p_1, p_2, u_1, u_2 . Для этого введем скорость звука в «чистом» газе a_1 и воспользуемся уравнением состояния газа $p_1 = \rho_1^0 R T_1$.

Система (3) в новых переменных будет иметь вид

$$\begin{aligned} k_1 \frac{d_1 p_1}{dt} + \rho_1^\circ f_{,2} \frac{d_1 p_2}{dt} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= - \frac{F(u_2 - u_1) + Q}{c_p T_1} \\ k_2 \frac{d_2 p_1}{dt} + k_3 \frac{d_2 p_2}{dt} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0, \quad \frac{d_1 u_1}{dt} + \frac{1}{\rho_1^\circ} \frac{\partial p_1}{\partial x} = - \frac{F}{\rho_1} \\ \frac{d_2 u_2}{dt} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} f_{,2} \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} &= \frac{E}{\rho_2} \\ a_1 &= \sqrt{\partial p_1 / \partial \rho_1^\circ |_{s_1}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 / a_1^2 + \rho_1^\circ f_{,1}, \quad k_2 = \alpha_2 g_{,1} - \rho_2^\circ f_{,1} \\ k_3 &= \alpha_2 g_{,2} - \rho_2^\circ f_{,2}, \quad f_{,i} = \partial f / \partial p_i, \quad g_{,i} = \partial g / \partial p_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Систему (12) можно записать в матричной форме

$$Z_1 \frac{\partial W}{\partial t} + Z_2 \frac{\partial W}{\partial x} = 1, \quad W = \{p_1, p_2, u_1, u_2\}$$

Используя стандартную процедуру [7] для нахождения характеристических направлений $dx/dt = \lambda$ системы (12), получим, что λ должно быть собственным значением линейного оператора $Z_1^{-1} Z_2$, т. е. удовлетворять следующему характеристическому уравнению:

$$A(u_1 - \lambda)^2 (u_2 - \lambda)^2 - B(u_1 - \lambda)^2 - C(u_2 - \lambda)^2 + D = 0 \quad (13)$$

$$A = 1 - \frac{\rho_1^\circ f_{,2} k_2}{k_1 k_3}, \quad B = \frac{\rho_2}{k_3} \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} f_{,2} - \frac{p_1 - p_2}{k_1 \rho_2} f_{,1} \rho_1^\circ f_{,2} \right)$$

$$C = \frac{\alpha_1}{k_1}, \quad D = \frac{\alpha_1 \rho_2}{k_1 k_3} \left(\frac{1}{\rho_2^\circ} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} f_{,2} \right)$$

Прежде чем приступить к исследованию полученной системы общего вида, рассмотрим несколько частных предельных случаев.

1°. Пусть объемная концентрация газа α_1 зависит только от p_1 , т. е. $\partial f / \partial p_2 = 0$, $\partial \varepsilon_{rr} / \partial p_2 = 0$. Тогда соотношения (2) принимают вид $\varepsilon_{rr} = a p_1$, $\varepsilon_{xx} = a p_2 - b p_1$.

В этом случае находим следующие характеристические направления:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 / a_1^2 + \rho_1^\circ f_{,1}}}, \quad \lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E}{(1 - \nu^2) \rho_2^\circ}} \quad (14)$$

Таким образом, в данном частном случае система (12) всегда гиперболическая. Из соотношений (14) видно, что возмущения будут распространяться по твердой фазе со скоростью продольных волн в тонкой пластине, по газу — со скоростью возмущений в «трубе с эластичными стенками», т. е. в трубе, площадь поперечного сечения которой зависит от давления внутри. Соотношения для $\lambda_{1,2}$ соответствуют решению, полученному в [8, 9].

2°. Пусть $\alpha_1 = f_2(p_2)$, т. е. рассмотрим частный случай, когда $p_2 \gg p_1$, так что можно считать $\partial f / \partial p_1 = 0$, $\partial \varepsilon_{rr} / \partial p_1 = 0$. Этот случай соответствует модельным уравнениям состояния конденсированной фазы (k -фазы) $p_2 = \varphi(\alpha_2)$, используемым в [5]. Тогда ε_{xx} и ε_{rr} , а следовательно, и ρ_2 — функции только p_2 , например: $\varepsilon_{rr} = -b p_2$, $\varepsilon_{xx} = a p_2$.

В этом случае характеристические направления таковы:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm a_1, \quad \lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E}{(1 - \nu^2) \rho_2^\circ} \left(1 + \frac{p_2 \nu (1 + \nu)}{E} \right)} \quad (15)$$

Видно, что слабые возмущения в газе распространяются со скоростью звука a_1 , а в k -фазе — со скоростью, отличающейся от скорости в пластине на величину малого параметра, зависящего от p_2 . Возникающая нелинейность вызвана учетом дополнительной зависимости площади сечения k -фазы от напряжения в ней: $\alpha_2 = f_2(p_2)$.

3°. Пусть $\alpha_1 \rightarrow 0$. Ясно, что при малых α_1 величина ε_{rr} ограничена и в пределе при $\alpha_1 \rightarrow 0$ поперечная деформация также стремится к нулю ($\varepsilon_{rr} \rightarrow 0$), зависимость между p_1 и p_2 принимает вид $p_2 = a p_1 / b$. Для определения деформации ε_{xx} имеем соотношение $\varepsilon_{xx} = (a - b^2/a) p_2$.

В этом случае система дифференциальных уравнений (3) существенно упрощается и получаем четыре действительных характеристических направления

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm a_1, \quad \lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_2^\circ(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (16)$$

что указывает на гиперболичность системы дифференциальных уравнений. Видно, что при уменьшении объемной концентрации газовой фазы слабые возмущения будут распространяться в твердой фазе со скоростью продольных волн в изотропной безграничной линейно-упругой среде.

4°. Рассмотрим случай $\alpha_2 \rightarrow 0$. Деформации и напряжения связаны соотношением (2). Тогда характеристические направления определяются формулами, отличающимися от (15) заменой p_2 на $p_2 - p_1$.

Таким образом, при уменьшении объемного содержания k -фазы по сравнению с газовой фазой при фиксированной общей площади трубы слабые возмущения по газу будут распространяться со скоростью звука в газе a_1 , а по k -фазе — со скоростью, близкой к скорости продольной волны в тонкой пластине. При разности давлений в фазах до 1000 атмосфер второй член подкоренного выражения для $\lambda_{3,4}$ на два порядка меньше первого.

Перейдем к исследованию системы (12) в общем виде, когда $\alpha_1 = f(p_1, p_2)$ (10), а связь напряжений и деформаций задается соотношением (2). Для определения корней характеристического уравнения (13) введем обозначения $u_1 - \lambda = X$, $u_2 - \lambda = Y$, $u_2 - u_1 = \Delta u = Y - X$. Для каждого значения относительной скорости проскальзывания фаз решение уравнения (13) может быть представлено как решение системы

$$Y = \pm \sqrt{\frac{BX^2 - D}{AX^2 - C}}, \quad Y = X + \Delta u \quad (17)$$

Действительные решения в плоскости X, Y соответствуют точкам пересечения прямой $Y = X + \Delta u$ и кривой четвертого порядка, симметричной относительно осей координат, задаваемой первым уравнением системы (17).

Преобразуем подкоренное выражение к более удобному для исследования виду. Получим

$$Y = \pm \sqrt{\frac{c}{a} \frac{(X/X_2)^2 - 1}{(X/X_1)^2 - 1}} \quad (18)$$

$$X_1 = \sqrt{b'/(a_0 + a'')}, \quad X_2 = \sqrt{b'/(a_0 + a'/c)}$$

$$a_0 = \frac{\alpha_1}{a_1^2}, \quad a' = \frac{\rho_1^\circ f_{2,1}}{\rho_2^\circ}, \quad c = \frac{1}{\rho_2^\circ} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} f_{,2}$$

$$b' = \alpha_1, \quad a'' = \rho_1^\circ \left(f_{,1} + \frac{b}{a} f_{,2} \right)$$

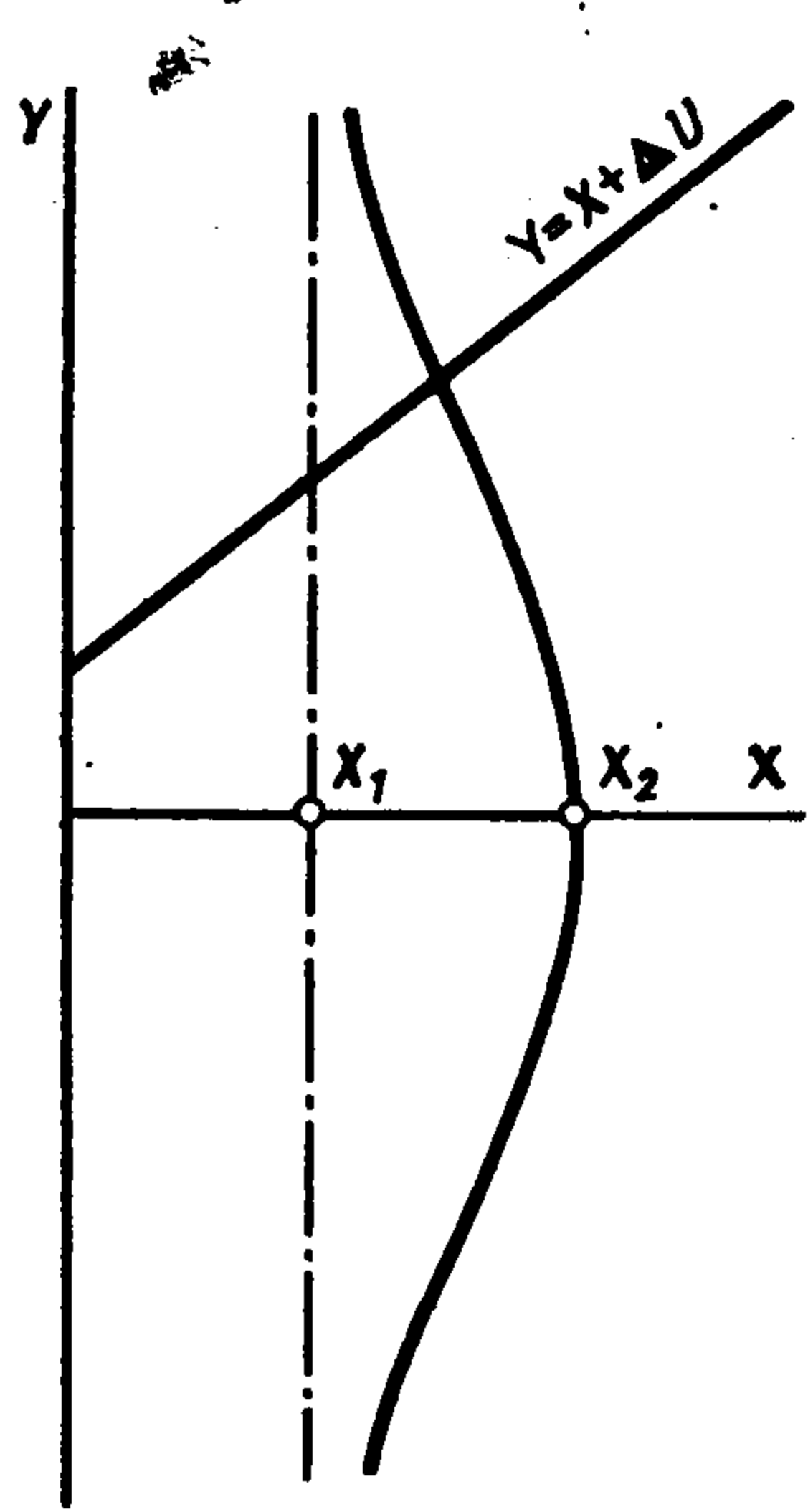
причем a_0, b', a', a'' — положительные коэффициенты (при $-1 < \nu < 1/2$), а c — знакпеременный.

Для существования решения характеристического уравнения необходимо, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным.

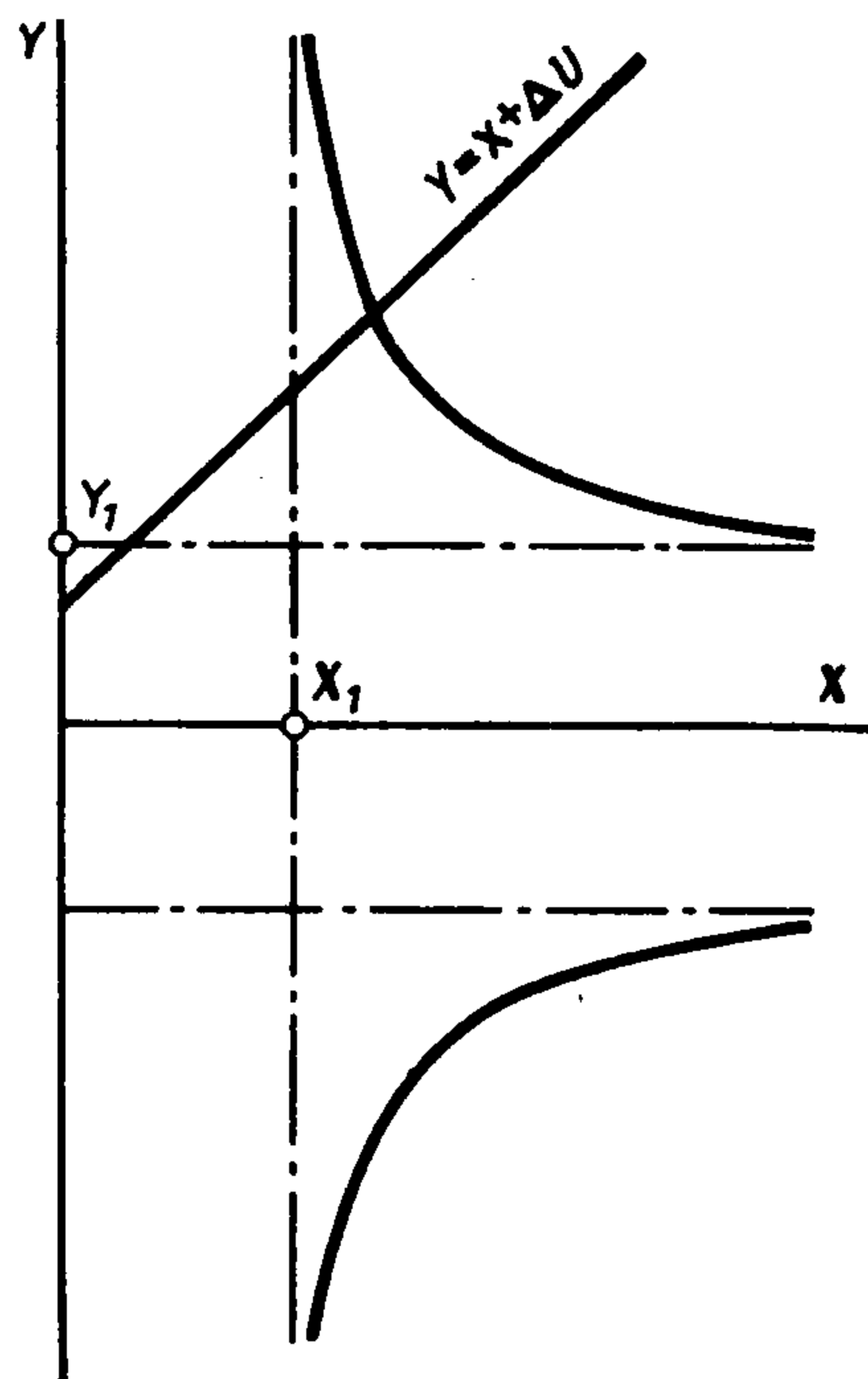
Рассмотрим случай $c < 0$, $\Delta p < -1/b$. Если кроме этого $a_0 + a'/c > 0$, т. е.

$$\Delta p < -\frac{1}{b} - \frac{\rho_1^\circ a \alpha_2 a_1^2}{b \alpha_1} \quad (19)$$

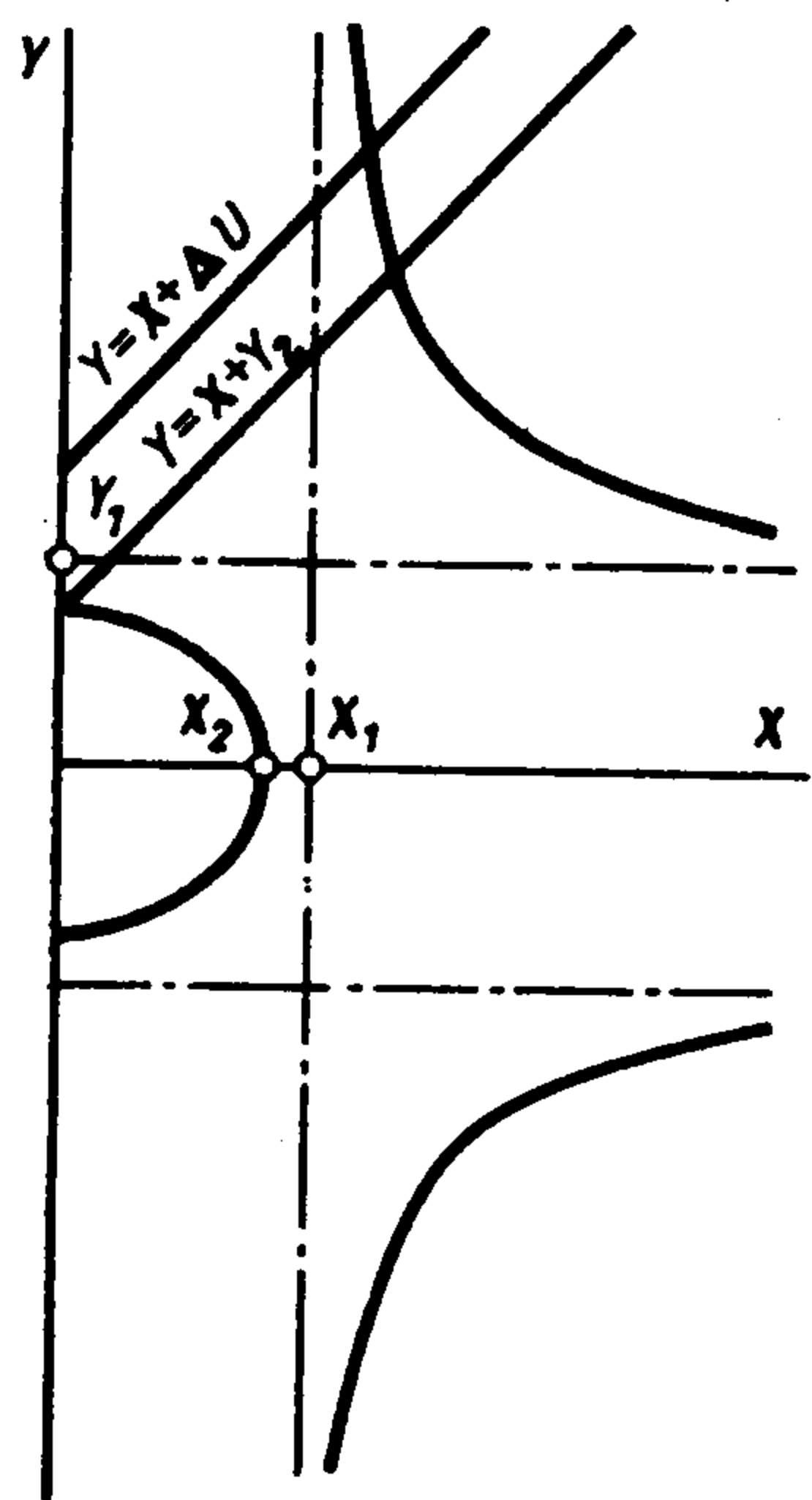
то график кривой (18) имеет вид, изображенный на фиг. 1. Видно, что при любом значении скорости проскальзывания фаз Δu прямая $Y = X + \Delta u$ имеет с кривой (18) два пересечения, т. е. характеристическое уравнение имеет два корня. Таким образом, исходная система уравнений при рассматриваемых перепадах давлений Δp (19) не является гиперболической.



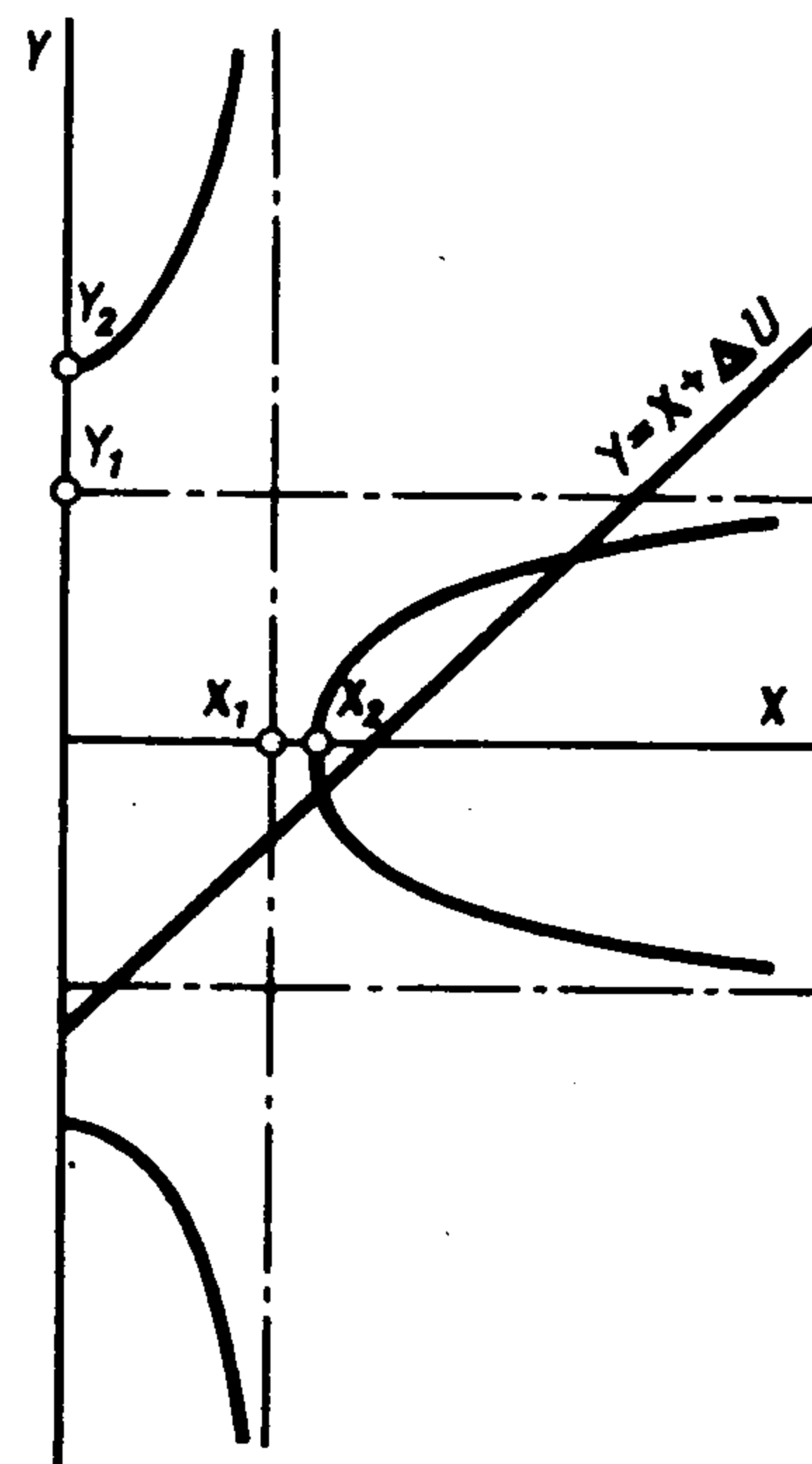
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Если $a_0 + a'/c < 0$, т. е.

$$-\frac{1}{b} - \frac{\rho_1^{\circ} a c \alpha_2 a_1^2}{b \alpha_1} < \Delta p < -\frac{1}{b} \quad (20)$$

тогда график кривой (18) имеет вид, изображенный на фиг. 2 ($Y_1 = \sqrt{cX_1/(aX_2)}$).

Видно, что при больших значениях разности скоростей Δu и в случае, когда выполнено условие (20), система уравнений становится гиперболической. Но эта разность скоростей $|\Delta u| = Y - X$ должна быть больше, чем

$$\sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\rho_2^{\circ}} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2^{\circ}} b \right)}$$

т. е. больше, чем скорость звука в k -фазе, что в реальных задачах неосуществимо. Таким образом, для реальных значений величины Δu и в этом случае система не является гиперболической.

При $\Delta p = -1/b$ кривая на фиг. 2 дополняется точкой $X = 0, Y = 0$ и в случае односкоростной модели ($\Delta u = 0$) характеристическое уравнение имеет четыре действительных корня, два из которых кратные.

Рассмотрим теперь $\Delta p > -1/b$ ($c > 0$). Если при этом $a'/c > a''$, т. е.

$$-\frac{1}{b} < \Delta p < -\frac{1}{b} + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)b} \quad (21)$$

то графическое изображение характеристической кривой (18) соответствует приведенному на фиг. 3 ($Y_2 = \sqrt{c/a}$). Точка в начале координат по мере увеличения в Δp превращается в разрастающийся овал. Видно, что при реальных значениях разности скоростей фаз, меньших скорости звука в k -фазе

$$\left(|\Delta u| \lesssim \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_2^0 (1 - v^2)} \left[1 + \frac{\Delta p v (1 + v)}{E} \right]} \right)$$

система (17) имеет четыре различных действительных решения, что говорит о гиперболичности исходной системы уравнений в рассматриваемом диапазоне изменения Δp . Неравенство (21), выражающее условие гиперболичности системы для реальных значений величины проскальзывания, может быть записано в виде

$$-\frac{E}{v(1+v)} < \Delta p < \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \quad (22)$$

Далее, когда $a'/c < a''$, т. е. когда

$$\Delta p > -\frac{1}{b} + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)b} \quad \left(\Delta p > \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \right) \quad (23)$$

график характеристической кривой принимает вид, изображенный на фиг. 4. При этом с увеличением разности давлений в фазах Δp кривые на фиг. 4 все больше удаляются от асимптот, так что для небольшой (реальной) разницы скоростей фаз система (12) опять становится негиперболической. Для достаточно больших значений величины проскальзывания сохраняются четыре точки пересечения кривой (18) с прямой $Y = X + \Delta u$, т. е. система остается гиперболической.

В случае

$$\Delta p = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \quad \left(\frac{a'}{c} = a'' \right)$$

кривые на фиг. 4 превращаются в две пары асимптот. Характеристическое уравнение при этом для любых значений Δu имеет четыре действительных корня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 184—195.
2. Клейман Я. З. О методе характеристик в теории движения многокомпонентной среды // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 391—394.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 418—429.
4. Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И., Нигматулин Р. И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 83—95.
5. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с; Ч. 2. 360 с.
6. Смирнов Н. Н. Распространение конвективного горения в двухфазных системах с продольной пористостью и переход в режим недосжатой детонации // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23. № 3. С. 58—68.
7. Зверев И. Н., Смирнов Н. Н. Газодинамика горения. М.: Изд-во МГУ, 1987. 307 с.
8. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 104 с.
9. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.