

УДК 532.591 : 534.1

© 1991 г.

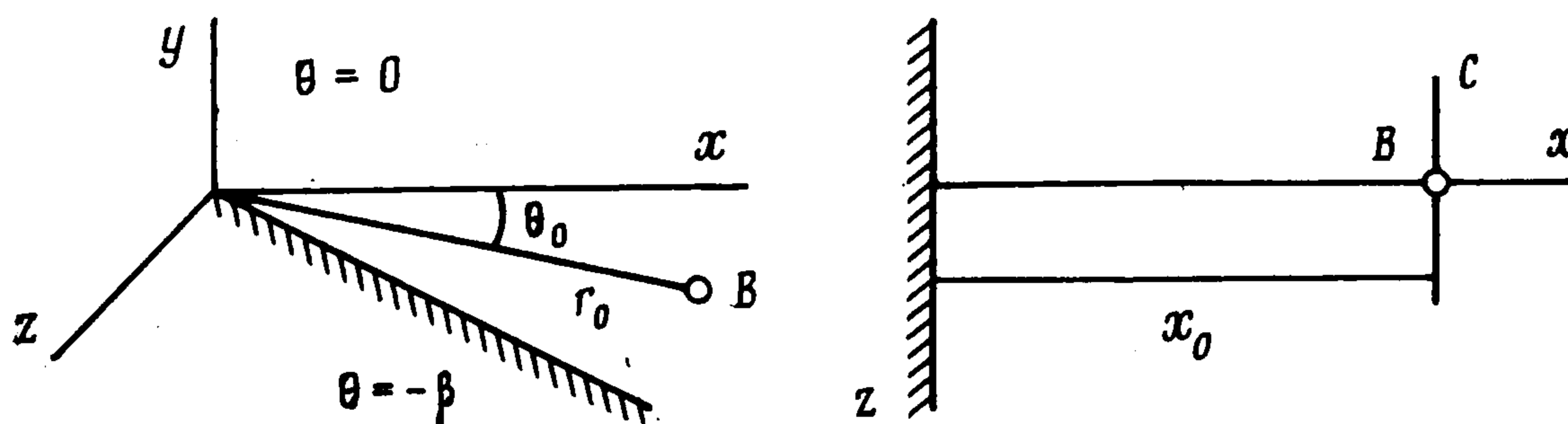
А. Н. Бестужева, А. А. Дорфман

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННЫЕ ИСТОЧНИКОМ В ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Получены решения задачи о волновом движении, вызванном пульсирующим источником, движущимся в жидкости над наклонным дном. Выполнен асимптотический анализ решения, исследованы структуры волновых полей.

Движение источника в жидкости постоянной глубины достаточно полно изучено путем последовательного применения интегральных преобразований и метода стационарной фазы [1—3]. Для малых изменений дна произвольной формы разработана [4] асимптотическая теория волновых движений, основанная на применении аппарата псевдодифференциальных операторов и сведении задачи к решению гамильтоновых систем. Для случая значительных изменений глубины (жидкость ограничена плоским наклонным дном) рассматривались лишь некоторые частные случаи: была поставлена задача о структуре волнового следа за движущимся источником и намечен путь решения [5], построено решение плоской задачи для пульсирующего источника [6].

1. Пусть в жидкость, занимающую клиновидную область, в момент времени $t = 0$ помещен источник интенсивности b , пульсирующий с частотой ω и движущийся со скоростью c параллельно линии берега (фиг. 1).



Фиг. 1

Уравнения, граничные и начальные условия задачи запишем в рамках линейной дисперсионной теории [2, 7]

$$\Delta G = -b (4\pi r)^{-1} \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, z) E(-\omega t)$$

$$G_{tt} + 2cG_{tz} + c^2G_{zz} + gr^{-1}G_\theta = 0, \quad \theta = 0 \quad (1.1)$$

$$G_\theta = 0, \quad \theta = -\beta; \quad G = G_t = 0, \quad \theta = 0, \quad t = 0$$

$$G < \infty, \quad r \rightarrow 0; \quad G \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad \eta = -g^{-1}G_t|_{\theta=0}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2n}, \quad n = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(x) = \exp(ix)$$

Здесь G — нестационарная функция Грина, r, θ, z — цилиндрические координаты, $(r_0, \theta_0, 0)$ — положение источника B , t — время, g — ускорение свободного падения, η — возвышение свободной поверхности.

Методом интегральных преобразований получим решение задачи (1.1) в виде

$$G = G^c + G^d$$

G^c, G^d обусловлены собственными функциями непрерывного и дискретного спектров соответственно [8].

Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, запишем формулы для установившегося движения

$$G_s = \lim_{t \rightarrow \infty} G = E(-\omega t) (G_s^c + G_s^d)$$

$$G_s^c = \frac{b}{16\pi^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_0^\pi E(s_c z \cos \lambda) \sqrt{gs_c} \left[\frac{E(\Omega_c^- t) - 1}{\Omega_c^-} - \frac{E(\Omega_c^+ t) - 1}{\Omega_c^+} \right] Y^c ds_c d\lambda \quad (1.2)$$

$$G_s^d = \frac{bg}{16\pi^2} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{E(\sigma z)}{\sqrt{gp\gamma}} \left[\frac{E(\Omega_d^- t) - 1}{\Omega_d^-} - \frac{E(\Omega_d^+ t) - 1}{\Omega_d^+} \right] Y^d(p) p d\sigma \quad (1.3)$$

$$Y^c = \Phi^c(r_0, \theta_0) \Phi^c(r, \theta), \quad Y^d(\kappa) = \Phi_l^d(\kappa r_0, \theta_0) \Phi_l^d(\kappa r, \theta)$$

$$\Omega_c^\pm = \omega \pm \sqrt{gs_c} - cs_c \cos \lambda, \quad \Omega_d^\pm = \omega \pm \sqrt{gp\gamma} - c\sigma$$

$$s_c = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \gamma = \cos l\beta, \quad p, q \geq 0, \quad \sigma = p \quad \text{при} \quad \sigma \geq 0$$

$$\varepsilon_l = (-1)^{(n+1)/2} \left\{ 2(1 + \gamma)^{2(n-1)} \sqrt{1 - \gamma^2} \prod_{k=1, k \neq l}^{n-1} \sin(k + l)\beta \sin(k - l)\beta \right\}^{-1}$$

Φ^c, Φ_l^d — собственные функции непрерывного и дискретного спектра соответственно, определенные в [8]:

$$\Phi^c = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j, \chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_k^{(\chi)} \exp \left\{ -s_c r \cos(a_{kj} + (-1)^j \theta) + \right.$$

$$\left. + (-1)^\chi i \left(-rq \cos(a_{kj} + (-1)^j \theta) + \frac{\pi}{4} (n-1) \right) \right\}$$

$$a_{kj} = 2(k - j)\beta$$

$$B_k^{(\chi)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(s_c + p)^{n-1}} \prod_{\sigma=1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} (p^2 \sin^2 \sigma\beta + q^2) \prod_{\sigma=1}^{n-k} \text{ctg} \sigma\beta \left[\frac{1}{2} p^2 \sin 2\sigma\beta + (-1)^\chi i q s_c \right]$$

$$\Phi_l^d = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^1 \sum_{k=1}^{n-1} B_{kl} \exp(-rp \sin(a_{kj} + (-1)^j \theta + l\beta))$$

$$B_{kl} = (-1)^{n-k} \prod_{\sigma=n-k+1}^{n-1} \sin(\sigma - l)\beta \sin(\sigma + l)\beta \times$$

$$\times \prod_{\sigma=1}^{n-k} \text{ctg} \sigma\beta \sin(\sigma + l)\beta \cos(\sigma - l)\beta$$

Выполним исследование величины G_s^c для волн непрерывного спектра, которое проведем по аналогии с задачами, рассмотренными в [2, 3], для случая бесконечно глубокой жидкости.

Анализ нулей выражений Ω_c^\pm , проведенный по аналогии с [7], показывает, что для обеспечения экспоненциального затухания при $t \rightarrow \infty$, для интервала $0 \leq \lambda < \pi/2$ путь в комплексной плоскости s_c должен быть смещен ниже вещественной оси в окрестности точек

$$s_c^\pm = \left(\sqrt{g} \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\tau \cos \lambda}}{2c \cos \lambda} \right)^2, \quad \tau = \frac{c\omega}{g}$$

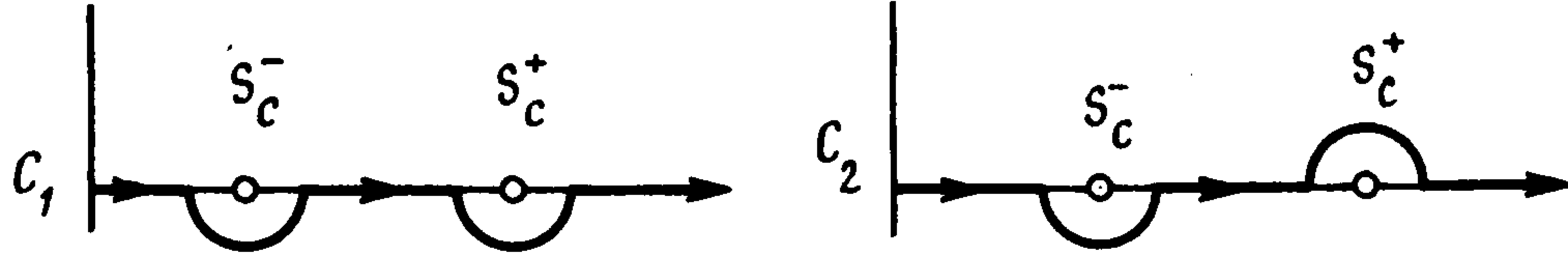
Обозначим этот деформированный путь через C_1 . Для интервала

$$\pi/2 < \lambda \leq \pi - \gamma_0, \quad \gamma_0 = \begin{cases} 0, & \tau < 1/4 \\ \arccos [q(4c\omega)^{-1}], & \tau \geq 1/4 \end{cases}$$

путь в комплексной плоскости s_c должен быть деформирован таким образом, чтобы он лежал ниже вещественной оси в окрестности точки s_c^- и выше вещественной оси в окрестности точки s_c^+ . Этот путь обозначим через C_2 . Отсюда следует, что

$$G_s^c = \frac{bg}{8\pi^2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \int_{C_1} + \int_{\pi/2}^{\pi-\gamma_0} \int_{C_2} + \int_{\pi-\gamma_0}^{\pi} \int_0^{\infty} \right\} Y^c \frac{E(s_c z \cos \lambda)}{gs_c - (\omega - cs_c \cos \lambda)^2} ds_c d\lambda \quad (1.4)$$

Пути C_1, C_2 показаны на фиг. 2.



Фиг. 2

Проводя аналогичное исследование G_s^d , получим из (1.3) выражение для волн дискретного спектра

$$G_s^d = \frac{bg}{8\pi^2} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \int_{L_1} \Psi_l^d(p) p dp + \sum_{l=1}^{l^*} \varepsilon_l \int_{L_2} \Psi_l^d(\sigma) p d\sigma + \sum_{l=l^*+1}^{n-1} \int_{-\infty}^0 \Psi_l^d(\sigma) p d\sigma \right\} \quad (1.5)$$

$$\Psi_l^d(\kappa) = \frac{E(\kappa z)}{g p \gamma - (\omega - c\kappa)^2} Y^d(p)$$

Деформированный путь L_1 в плоскости p совпадает с деформированным путем C_1 в плоскости s_c , а путь L_2 отличается от C_2 тем, что он расположен на отрицательной вещественной полуоси плоскости σ . Полюсы $p_{1,2}$ определяются по формулам

$$p_{1,2} = g \frac{2\tau + \gamma \pm \sqrt{\gamma(\gamma + 4\tau)}}{2c^2} \quad (1.6)$$

а полюсы $\sigma_{1,2}$ — по формулам, отличающимся от (1.6) заменой γ на $-\gamma$ и существуют при условии $\gamma \geq 4\tau$, т. е. для $l = l^* + 1, \dots, n - 1$, где $l^* = \beta^{-1} \arccos 4\gamma$.

Вводя переменную $v = \omega^2/g$, на основании теоремы Коши о вычетах, получим из формул (1.4), (1.5)

$$G_s^c = \frac{bi}{4\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} (I^- - I^+) d\lambda - \int_{\pi/2}^{\pi-\gamma_0} I^+ d\lambda \right\} \quad (1.7)$$

$$G_s^d = \frac{bi}{4\pi} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \sum_{\alpha=1}^2 \frac{(-1)^\alpha p_\alpha E(p_\alpha z)}{\sqrt{\gamma(\gamma + 4\tau)}} Y^d(p_\alpha) - \sum_{l=1}^{l^*} \varepsilon_l \frac{|\sigma_2| E(\sigma_2 z)}{\sqrt{\gamma(\gamma - 4\tau)}} Y^d(|\sigma_2|) \right\} \quad (1.8)$$

при $s_c^* z \rightarrow +\infty$

$$G_s^c = \frac{bi}{4\pi} \int_{\pi/2}^{\pi-\gamma_0} I^- d\lambda \quad (1.9)$$

$$G_s^d = \frac{bi}{4\pi} \sum_{l=1}^{l^*} \varepsilon_l \frac{|\sigma_1| E(\sigma_1 z)}{\sqrt{\gamma(\gamma - 4\tau)}} Y^d(|\sigma_1|) \quad \text{при } s_c^* z \rightarrow -\infty \quad (1.10)$$

Здесь

$$I^\pm = \frac{s_c^\pm E(s_c^\pm z \cos \lambda)}{\sqrt{1 + 4\tau \cos \lambda}} Y^c$$

$$s_c^\pm = s_c^* \frac{1 + 2\tau \cos \lambda \pm \sqrt{1 + 4\tau \cos \lambda}}{2(1 + \tau^2) \cos^2 \lambda}, \quad s_c^* = v \frac{1 + \tau^2}{\tau^2}$$

Для дальнейшей оценки интегралов в (1.7), (1.9) применим метод стационарной фазы [9]. Значение интеграла

$$J = \int_a^b I^\pm(\lambda) E(W^* S(\lambda)) d\lambda$$

при больших значениях параметра $W^* = s_c^* R$, где $R = \sqrt{(r - r_0)^2 + z^2}$, определяется выражением

$$J \simeq \sum_{\{\lambda_0\}} \sqrt{\frac{2\pi}{W^* |S''(\lambda_0)|}} I^\pm(\lambda_0) E\left(W^* S(\lambda_0) + \operatorname{sgn} S''(\lambda_0) \frac{\pi}{4}\right)$$

где λ_0 — корни уравнения $S'(\lambda_0) = 0$. Таким образом, дальнейшая оценка связана с отысканием корней следующих уравнений:

$$\frac{ds_c^\pm}{d\lambda} = s_c^\pm \frac{z \sin \lambda + M \cos \lambda}{z \cos \lambda - M \sin \lambda} \quad (1.11)$$

$$M = (-1)^x r \cos(a_{kj} + (-1)^j \theta) + (-1)^{x'} r_0 \cos(a_{k'j'} + (-1)^{j'} \theta_0)$$

При определении корней этих уравнений ограничимся случаем малых значений τ , удовлетворяющих условию $\tau < 1/4$. С точностью до членов, содержащих τ^2 , выражения (1.7)–(1.10) могут быть при $vz \rightarrow \infty$ представлены в виде

$$G_s^c = \frac{bvi}{4\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - 4\tau \cos \lambda) E(vz(1 - 2\tau \cos \lambda) \cos \lambda) Y^c d\lambda \quad (1.12)$$

$$G_s^d = \frac{bvi}{4\pi} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{4\tau}{\gamma}\right) E\left(\frac{v|z|}{\gamma} \left(1 - \frac{2\tau}{\gamma}\right)\right) Y^d \left(\frac{v}{\gamma} \left(1 - \frac{2\tau}{\gamma}\right)\right) \quad (1.13)$$

а при $vz \rightarrow -\infty$ величина G_s^c определяется по формуле, отличающейся от (1.12) тем, что интеграл берется от $\pi/2$ до π , а G_s^d — по формуле, отличающейся от (1.13) заменой τ на $-\tau$.

Асимптотическая оценка G_s^c имеет вид

$$G_s^c \simeq \frac{bi}{2\pi} \left(\frac{v}{2\pi R}\right)^{1/2} D \left(D \left(I \frac{1 - 4\tau \cos \lambda_0}{|S''(\lambda_0)|^{1/2}} \exp(-v(1 - 2\tau \cos \lambda_0)) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\bar{M} - i(z \cos \lambda_0 - M \sin \lambda_0)) + \frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} S''(\lambda_0) \right) \right)$$

$$I = \exp\left\{i \frac{\pi}{4} (n-1) [(-1)^x + (-1)^{x'}]\right\}, \quad D = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sum_{j, \chi=0}^1 \sum_{k=1}^n B_k^{(\chi)}$$

$$S''(\lambda_0) = z(4\tau \cos 2\lambda_0 - \cos \lambda_0) - M(4\tau \sin 2\lambda_0 - \sin \lambda_0)$$

где λ_0 — корень уравнения

$$z(2\tau \sin 2\lambda - \sin \lambda) + M(2\tau \cos 2\lambda - \cos \lambda) = 0$$

при $vz \rightarrow +\infty$ $\lambda \in [0, \pi/2]$, при $vz \rightarrow -\infty$ $\lambda \in [\pi/2, \pi]$, \bar{M} вычисляется по формуле, отличающейся от (1.11) условием $\chi = \chi' = 0$ и заменой \cos на \sin .

Анализ полученного решения дает возможность исследовать структуру корабельных волн, которые являются частной реализацией черенковского излучения в диспергирующей среде. Поле излучения формируется волнами непрерывного и дискретного спектров и состоит из двух характерных зон: окрестности источника и прибрежной зоны. В окрестности источника волновое движение обеспечивается волнами непрерывного спектра и состоит из волнового поля, симметричного относительно оси $z = 0$ и вызванного пульсацией источника, и волнового следа, локализо-

ванного в хвостовой части, вызванного поступательным движением источника. Волны дискретного спектра обеспечивают волновое движение в прибрежной зоне. В составе волн дискретного спектра находится волна Стокса, которая превосходит все остальные в окрестности линии берега, и можно считать, что волновое движение, распространяющееся вдоль линии берега, образуется лишь волной Стокса.

Полученные асимптотические оценки показывают, что движущийся и пульсирующий источник при малых τ излучает расходящиеся во все стороны от источника волны, зависящие от направления, в отличие от излучения неподвижно пульсирующего источника, при этом формируется сложная диаграмма направленности излучения. На это основное волновое поле накладывается черенковское излучение (корабельные волны). Если частота излучения ω невелика, а g/c^2 — конечная величина, то преобладает черенковское излучение с характерными особенностями, присущими наличию наклонного дна. При $\tau \gg 1/4 G_s \rightarrow 0$.

2. Рассмотрим частные случаи движущегося источника постоянной интенсивности ($\omega = 0$) и неподвижного пульсирующего источника ($c = 0$), которые допускают решение задачи в явном виде.

Пусть $\omega = 0$. В этом случае параметры задачи определяются по формулам

$$s_c^+ = \frac{g}{c^2 \cos^2 \lambda}, \quad p_1 = -\sigma_2 = \frac{g\gamma}{c^2}, \quad s_c^- = p_2 = \sigma_1 = \gamma_0 = 0, \quad l^* = n - 1$$

а функции G^c и G^d , полученные из формул (1.4), (1.5) при помощи теоремы Коши о вычетах, имеют вид

$$G^c = \frac{b}{4\pi} \int_{g/c^2}^{\infty} \sin \left(\sqrt{\frac{gs_c^+}{c^2}} z \right) Y^c \left(\frac{c^2 s_c^+}{g} - 1 \right)^{-1/2} ds_c^+ \quad (2.1)$$

$$G^d = \frac{bg}{8\pi c^2} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \sin \left(\frac{g\gamma}{c^2} z \right) Y^d \left(\frac{g\gamma}{c^2} \right) \quad (2.2)$$

При построении формул (2.1), (2.2), описывающих зону черенковского излучения, было обеспечено условие отсутствия волнового поля перед источником. На основании (2.1), (2.2) вычислим возвышение свободной поверхности

$$\eta = \eta^c + \eta^d$$

$$\eta^c = \frac{2bg}{c^3} \sum_{\alpha=0}^1 D \left(D \left(I \int_0^{\infty} \sqrt{1+u^2} \exp \left(-\frac{g}{c^2} \sqrt{1+u^2} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(\sqrt{1+u^2} \bar{M}_0 + i \left((-1)^\alpha z + M_0 u \right) \right) du \right) \right) \right) \\ M_0, \bar{M}_0 = M, \quad \bar{M}(\theta = 0) \quad (2.3)$$

$$\eta^d = \frac{bg}{2\pi c^3} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \gamma \cos \left(\frac{g\gamma}{c^2} z \right) Y^d \left(\frac{g\gamma}{c^2} \right) \Big|_{\theta=0} \quad (2.4)$$

Выполним асимптотический анализ выражения (2.3) путем применения метода стационарной фазы (большой параметр $W = gR/c^2$). С этой целью изучим поведение фазовой функции

$$S(u) = R^{-1} (1 + u^2)^{1/2} \left((-1)^\alpha z + M_0 u \right)$$

Стационарные точки $S(u)$ вычисляются по формуле

$$u_{\pm} = \left[-(-1)^\alpha z \pm \sqrt{z^2 - 8M_0^2} \right] / (4M_0)$$

Условие вещественности и положительности корней u_{\pm} определяет область существования волнового движения жидкости, вызванного движущимся источником:

$$0 \leq M_0 \leq z/(2\sqrt{2})$$

В точках перегиба фазовой функции ($S''(u_{\pm}) = 0$) стационарные точки $u_{\pm} = 2^{-1/2}$ вырождаются, что учитывается при написании асимптотических формул. Таким образом:

$$\eta^c \simeq \frac{2b}{c^2} \left(\frac{2\pi g}{R}\right)^{1/2} \sum_{\{u_{\pm}\}} \sum_{\alpha=0}^1 D^{\alpha} \left(D \left(I \left(\frac{(1+u_{\pm}^2)^3}{z^2 - 8M_0^2} \right)^{1/4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left(-\frac{g}{c^2} \sqrt{1+u_{\pm}^2} \left(\sqrt{1+u_{\pm}^2} \bar{M}_0 + i((-1)^{\alpha} z + M_0 u_{\pm}) \mp i \frac{\pi}{4} \right) \right) \right) \right)$$

при $0 \leq M_0 < z/(2\sqrt{2})$

$$\eta^c \simeq \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{b}{c^2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{g^2}{cR}\right)^{1/3} \sum_{\alpha=0}^1 D^{\alpha} \left(D \left(I \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left(-\frac{3g}{2c^2} \bar{M}_0 + \frac{3\sqrt{3}g}{2c^2} M_0 i - (-1)^{\alpha} \frac{\pi}{6} i \right) \right) \right)$$

при $M_0 = z/(2\sqrt{2})$

D^0, D^1 — операторы по условию: D^0 — суммирование производится по индексам, удовлетворяющим условию $-(-1)^k \cos a_{kj} > 0$, D^1 — условию $(-1)^k \cos a_{kj} > 0$.

Перейдем к анализу выражения (2.4). В прибрежной зоне величина η^d вычисляется по формуле (2.4), в которой $r \simeq 0$. В окрестности линии берега определяющей из волн дискретного спектра является волна Стокса, соответствующее ей волновое движение имеет вид

$$\eta_{n-1}^d \simeq \frac{bg}{2\pi c^3} \varepsilon_{n-1} \sin \beta \cos \left(\frac{g \sin \beta}{c^2} z \right) Y^d \left(\frac{g \sin \beta}{c^2} \right) \Big|_{l=n-1, r=0=0} \quad (2.5)$$

Как видно из (2.5), с удалением источника от линии берега, волны дискретного спектра затухают по экспоненциальному закону.

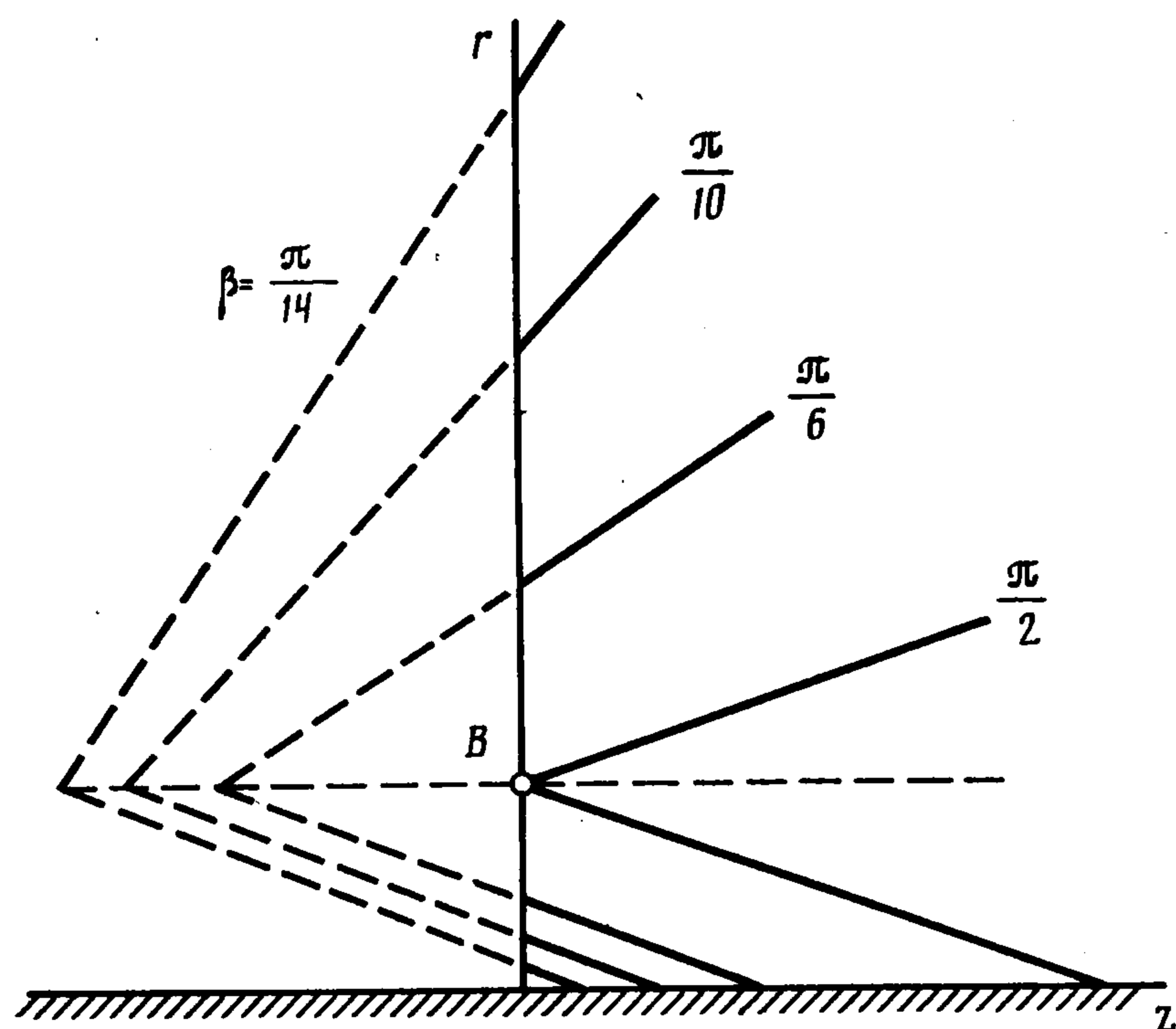
Опишем структуру волнового поля, образующегося при движении источника по поверхности жидкости переменной глубины ($\theta_0 = 0$). В отличие от случая бесконечно глубокой жидкости, в которой черенковское излучение сосредоточено в клине с углом раствора $19^{\circ}28'$ за движущимся источником, в случае наклонного дна оно образует область, ограниченную с одной стороны от линии движения источника линией берега $r = 0$, по которой распространяется волна Стокса, а с другой стороны при $r > r_0$ — прямой

$$r = z(2\sqrt{2}) \cos(\pi m/n)^{-1} + r_0 (\cos(\pi m/n))^{-1} \quad (2.6)$$

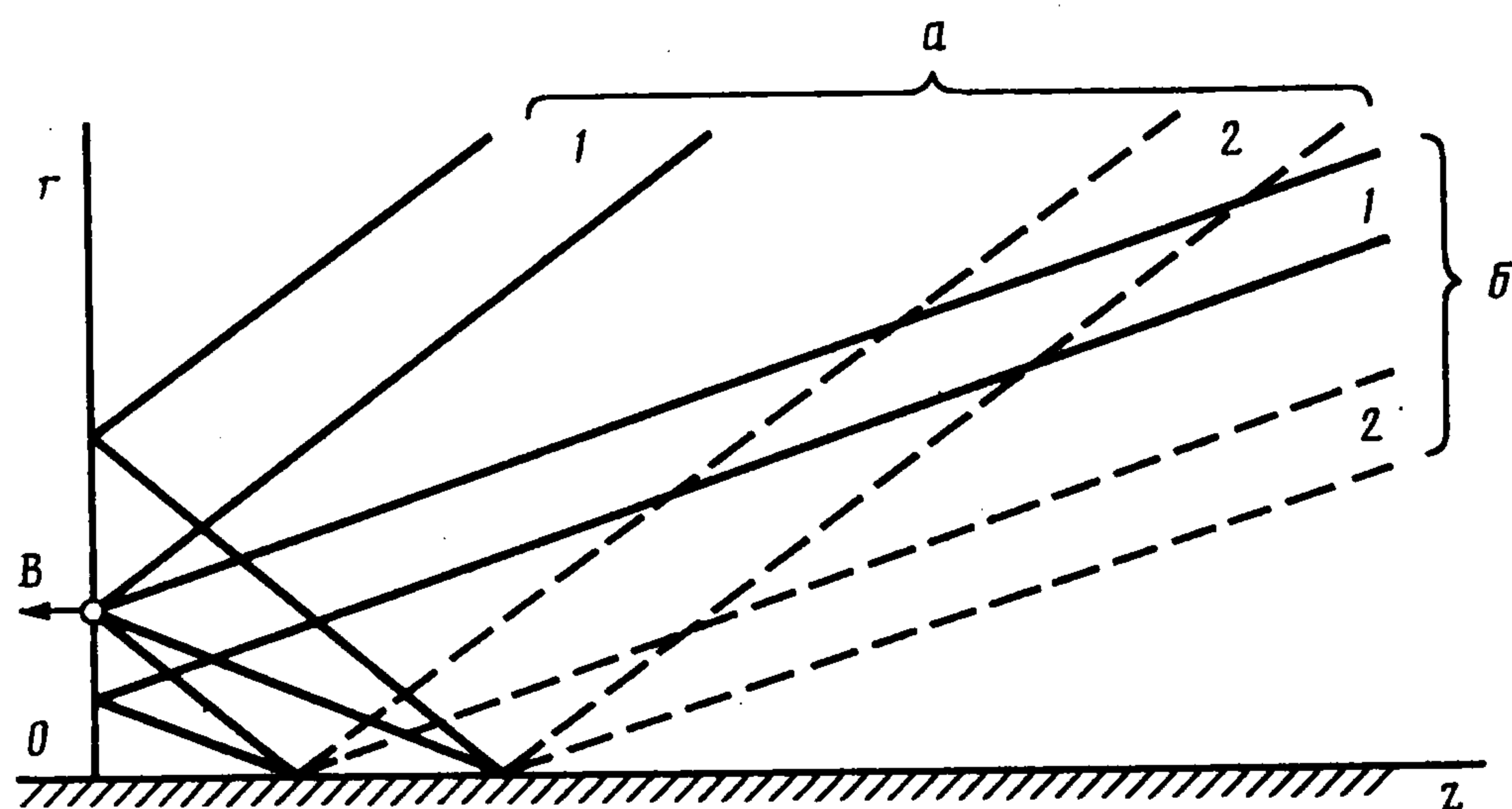
Прямую, описываемую уравнением (2.6), назовем границей волнового поля. С уменьшением угла наклона дна β граница волнового поля разворачивается на все больший угол относительно линии движения источника и при $\beta \rightarrow 0$ прямая (2.6) составляет с линией движения угол, близкий к $\pi/2$.

С удалением источника от берега линия берега перестает играть роль границы области излучения при $r < r_0$, и границей области становится прямая

$$r = r_0 \cos(\pi m/n) - z/(2\sqrt{2})$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Угол раствора черенковского клина увеличивается, при этом клин разворачивается относительно линии движения источника вершиной к берегу (фиг. 3).

Внутреннее наполнение черенковского клина является результатом наложения продольных и поперечных волн. На фоне таких волновых образований, затухающих по закону $R^{-1/2}$, формируются волны, обладающие прямолинейным фронтом, уравнение которого имеет вид $M = z/2 \sqrt{2}$, и характеризующиеся тем, что на этих прямых происходит значительное возрастание амплитуд волнового поля (продольных и поперечных волн). Назовем указанные прямые расходящимися волнами. Такие волны в случае бесконечно глубокой жидкости, безграничной в плане, также существуют и представляют собой границы волнового следа. Система расходящихся волн состоит из $m + 1$ семейств, каждое семейство волн характеризуется одним и тем же углом наклона ($|\cos a_{kj}| = \cos(\pi s/n)$, $s = 0, 1, \dots, m$) и включает в себя $m + 1$ прямых и $m + 1$ отраженных от берега волн.

В области $r > r_0$ прямые волны уходят в бесконечность, затухая по закону $R^{-1/2}$. В области $r < r_0$ $m + 1$ прямых волн падает на берег в определенных точках с координатами $z = 2 \sqrt{2} r_0 \cos(\pi s/n)$, $s = 0, 1, \dots, m$ (назовем их береговыми точками) и при падении формируют отраженные волны. В каждую береговую точку приходит веер прямых волн в количест-

ве $m + 1$ (по одной из каждого семейства) и выходит веер отраженных волн, также в количестве $m + 1$. Прямые и отраженные волны располагаются симметрично относительно линий

$$r = z (2 \sqrt{2} \cos (\pi s/n))^{-1} \quad (2.7)$$

в полосе шириной $2r_0 (\cos (\pi s/n))^{-1}$ (s — номер семейства). Оси симметрии каждого из $m + 1$ семейств представляют собой расходящиеся волны от источника, движущегося вдоль береговой линии ($r_0 = 0$). В этом случае отраженные волны сливаются с прямыми и каждое s -е семейство вырождается в одну прямую (2.7). Ближайшее к берегу семейство прямых и отраженных волн ($s = 0$) наклонено при любом β под углом $19^\circ 28'$, что соответствует движению источника в бесконечно глубокой жидкости.

На фиг. 4 представлена структура волнового следа при $\beta = \pi/6$ ($m = 1$), где цифры 1, 2 обозначают прямые и отраженные волны соответственно, а буквы a, b — номера семейств волн, характеризуемых одним и тем же углом наклона.

При построении волновой картины можно руководствоваться следующим правилом: к реальному источнику, расположенному на оси $z = 0$ на расстоянии r_0 от линии берега, добавляется система из $2m + 1$ фиктивных источников, расположенных на оси $z = 0$ и удаленных от линии берега на расстояния

$$r = \pm r_0 / \cos (\pi s/n), \quad s = 0, 1, \dots, m$$

От каждого из $2m + 2$ источников проводится луч под углом $\arctg [(2 \sqrt{2} \cos (\pi s/n))^{-1}]$, причем каждому s соответствуют два фиктивных источника, расположенных симметрично относительно оси $r = 0$. На больших удалениях от источника лучи, выходящие из $m + 1$ источников, расположенных на положительной части оси r , соответствуют прямым волнам, а лучи, выходящие из $m + 1$ источников, расположенных на отрицательной части оси r , — отраженным от берега волнам.

Впервые задача о структуре волнового следа, формируемого при движении источника над плоским наклонным дном, рассматривалась в [5] для значений углов $\beta = \pi/4, \pi/6$. Однако не был установлен смешанный характер спектра собственных значений задачи, вследствие чего была найдена лишь одна составляющая решения, связанная с собственными функциями непрерывного спектра. Из совокупности расходящихся волн была найдена только одна волна, соответствующая волне, формирующейся при движении источника в жидком полупространстве. Качественная интерпретация решения [5] дана в первом издании (1936 г.) работы [1] (с. 117—118), однако приведенная волновая картина неполная ввиду указанной ограниченности решения [5].

Сравнение величин η^c и η^d показывает, что волновое движение, обусловленное волнами непрерывного спектра, затухает вблизи береговой линии по закону $z^{-1/2}$, в то время как движение, обусловленное волнами дискретного спектра, представляет собой распространение незатухающих волн.

На основании изложенных результатов можно получить формулу для волнового сопротивления F тела митчелловского типа, движущегося с постоянной скоростью c параллельно линии берега на удалении x_0 от нее

$$F = \frac{2\rho g^2}{\pi c^2} \left\{ \int_1^\infty \frac{I_c^2 + J_c^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \lambda^2 d\lambda + \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \gamma (I_d^2 + J_d^2) \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{matrix} I_c \\ J_c \end{matrix} \right\} = \int_{(S)} f_z \Phi^c(x_0, y_0) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{g}{c^2} z_0 \lambda \right) dy_0 dz_0$$

$$\left. \begin{matrix} I_d \\ J_d \end{matrix} \right\} = \int_{(S)} f_z \Phi_l^d(x_0, y_0) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{g}{c^2} z_0 \gamma \right) dy_0 dz_0$$

где $|x - x_0| = f(y, z)$ — уравнение контура тела, y_0, z_0 — координаты точек на поверхности обтекаемого тела S , ρ — плотность жидкости.

Зависимость (2.8) представляет собой обобщение формулы Митчелла в области переменной глубины [1].

Пусть $c = 0$. В случае пульсирования неподвижного источника из формул (1.12), (1.13) при $\tau = 0$ получим

$$\eta = i\omega g^{-1} E(-\omega t) G_s|_{\theta=0}$$

$$G_s^c = \frac{bi}{2} \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \sum_{\alpha=0}^1 D^\alpha (D(I(z^2 + M^2)^{-1/4} \exp(-v\bar{M} + i(-1)^\alpha \times \\ \times (v\sqrt{z^2 + M^2} - \pi/4))) \quad (2.9)$$

$$G_s^d = \frac{biv}{2\pi} \sum_{l=1}^{n-1} \varepsilon_l \gamma^{-2} \cos\left(\frac{v}{\gamma} z\right) Y^d\left(\frac{v}{\gamma}\right)$$

В прибрежной зоне волновое поле определяется по формуле и по $G_s^c = O(z^{-1/2})$ последней формуле (2.9) при $r = 0$.

В окрестности береговой линии из волн дискретного спектра определяющей является волна Стокса, соответствующее ей волновое движение имеет вид

$$G_{n-1}^d \simeq \frac{biv}{2\pi} \varepsilon_{n-1} \sin^{-2} \beta \cos\left(\frac{v}{\sin \beta} z\right) Y^d\left(\frac{v}{\sin \beta}\right) \Big|_{r=0, l=n-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. Питерс А. С., Стокер Д. Д. Движение корабля как свободно плавающего твердого тела на волнении // Теория поверхностных волн. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. с. 43—144.
3. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 327 с.
4. Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н. Операторный метод Маслова в задаче о волнах на воде, возбуждаемых движущимся над неровным дном источником // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 7. С. 744—751.
5. Hanson E. T. The theory of ship waves // Proc. Roy. Soc. A. 1926. V. 111. № 759. P. 491—529.
6. Сретенский Л. Н. Периодические волны, создаваемые источником, находящимся над наклонным дном // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1012—1025.
7. Стокер Д. Д. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 618 с.
8. Дорфман А. А. Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. с. 104—112.
9. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
6.VII.1989