Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 3, 1991

УДК 532.5 : 534.1

А. С. Савин

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ В ПОТОКАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Предлагается способ определения формы свободной поверхности плоского стационарного потока весомой идеальной жидкости, обтекающей точечные гидродинамические особенности. Ставится задача Коши для нахождения профиля такого потока. Рассматривается самоиндуцированное движение точечного вихря под свободной поверхностью идеальной весовой жидкости.

1. Уравнение профиля капиллярно-гравитационной волны малой амплитуды на поверхности стационарного потока. Для плоского стационарного течения, имеющего точечные особенности, был предложен [1] способ нахождения формы свободной поверхности при малых ее отклонениях от невозмущенного положения. Решение, полученное этим способом, имеет вид несобственного интеграла с переменным пределом. Например, в случае обтекания вихря интенсивности Г, находящегося на глубине h, потоком, имеющим на положительной бесконечности скорость $-V$, для формы свободной поверхности можно получить выражение [2]

$$S(x) = -\frac{\Gamma}{\pi V}\int\limits_{\infty}^{x} \frac{t\cos\nu(t-x) - h\sin\nu(t-x)}{t^2+h^2}\,dt \qquad \left(\nu = \frac{g}{V^2}\right)$$

Еще более сложное интегральное представление для функции $S(x)$ может быть получено этим методом при учете капиллярных эффектов [3].

Ниже получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $S(x)$, и поставим задачу Коши для ее определения.

Рассмотрим плоский стационарный поток со скоростью $-V$ при $x = \infty$. Пусть его невозмущенная свободная поверхность совпадает с осью x. Выделим основную составляющую потока, положив его комплексный потенциал равным $W = \omega - Vz$, где $\omega = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$. Линеаризованные граничные условия [3]

$$S(x) = (V/g)\,\varphi_x(x, 0) + [\alpha/(\rho g)]\,S''(x), \quad \psi(x, 0) = VS(x) \tag{1.1}$$

(α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости) могут быть записаны в виде одного для комплексной скорости $U(z) = w'(z)$ на оси x:

$$\operatorname{Im}(\beta U'' + iU' - \nu U) = 0 \quad (\beta = \alpha/(\rho V^2)) \tag{1.2}$$

Здесь и далее штрих означает производную функции по ее аргументу.

Если поток обтекает единственную особенность в точке $z_0 = -ih$, то комплексная скорость имеет вид $U(z) = C/(z + ih)^n + g(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots$, где функция $g(z)$ аналитична во всей области течения. Рассмотрим, следуя методу [1], функцию $f(z) = \beta U'' + iU' - \nu U$, которую вследствие условия (1.2) можно аналитически продолжить по принципу Шварца в верхнюю полуплоскость. Тогда на всей комплексной плоскости

$$f(z) = \beta F_+'' + iF_-' - \nu F_+, \quad F_\pm = C/(z + ih)^n \pm \bar{C}/(z - ih)^n$$

Непосредственно проверяется, что

$$\beta^2 U'''' + (1 - 2\beta\nu)\, U'' + \nu^2 U = \beta f'' - if' - \nu f \qquad (1.3)$$

Из второго граничного условия (1.1) следует

$$R\,(x) \equiv S'\,(x) = V^{-1}\psi_x\,(x, 0) = V^{-1}\mathrm{Im}\,U\,|_{y=0}$$

что позволяет с учетом (1.3) записать равенство

$$\beta^2 R'''' + (1 - 2\beta\nu)\, R'' + \nu^2 R = V^{-1}\,\mathrm{Im}\,(\beta f'' - if' - \nu f)\,|_{y=0}$$

проинтегрировав обе части которого по x с учетом того, что $\mathrm{Im}\, f = 0$, $\mathrm{Im}\, f'' = 0$ при $y = 0$, получим уравнение

$$\beta^2 S'''' + (1 - 2\beta\nu)\, S'' + \nu^2 S = -V^{-1} f\,(x) \qquad (1.4)$$

постоянная интегрирования в котором опущена, поскольку не влияет на однозначное восстановление $S\,(x)$, возможное только при задании дополнительных условий. Сформулируем такие условия для двух важных предельных случаев уравнения (1.4).

Пусть имеем дело с потоком жидкости, в котором действием капиллярных сил можно пренебречь. В этом случае полагаем $\alpha = 0$, после чего (1.4) переходит в уравнение

$$S'' + \nu^2 S = -V^{-1} f_1\,(x), \quad f_1\,(x) = iF_-{}'\,(x) - \nu F_+\,(x) \qquad (1.5)$$

Известно [3], что гравитационные волны развиваются за особенностью, а далеко вверх по потоку их нет. Единственное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее такому условию излучения

$$S\,(x) = -\frac{1}{V\nu}\int\limits_{\infty}^{x} f_1\,(t) \sin \nu\,(x - t)\, dt \qquad (1.6)$$

совпадает с решением задачи, полученным известным методом [1].

При проведении конкретных расчетов удобнее иметь дело не с условиями излучения, а с задачей Коши, которую сейчас поставим. Из соотношения (1.6) можно найти

$$\begin{gathered} S\,(0) = -\frac{2}{V}\,\mathrm{Re}\left[\frac{i^n C}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\,\{e^{-\nu h}\,[\mathrm{Ei}\,(\nu h) + i\pi]\}\right] \\ S'\,(0) = \frac{2}{V}\,\mathrm{Re}\left\{i^{n+1} C\left[\frac{(-1)^{n+1}}{h^n} - \frac{\nu}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\,(e^{-\nu h}\,[\mathrm{Ei}\,(\nu h) + i\pi])\right]\right\} \end{gathered} \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.5) с условиями (1.7) представляет собой задачу Коши для определения профиля чисто гравитационной волны на поверхности стационарного потока.

В частности, обтеканию вихря интенсивности Γ соответствует задача

$$S'' + \nu^2 S = [\Gamma/(\pi V)]\,[(x^2 - h^2)/(x^2 + h^2) - \nu h]/(x^2 + h^2)$$

$$S\,(0) = -\,[\Gamma/(\pi V)]\,\exp\,(-\nu h)\,\mathrm{Ei}\,(\nu h), \quad S'\,(0) = (\Gamma\nu/V)\,\exp\,(-\nu h)$$

а обтеканию источника обильности Q-задача

$$S'' + \nu^2 S = [Q/(\pi V)]\, x\,[2h/(x^2 + h^2) + \nu]/(x^2 + h^2)$$

$$S\,(0) = (Q/V)\,\exp\,(-\nu h), \quad S'\,(0) = [Q/(\pi V)]\,(\nu \exp\,(-\nu h)\,\mathrm{Ei}\,(\nu h) - 1/h)$$

Теперь пусть основную роль играет капиллярность; это означает, что в уравнении (1.4) можно принять $\nu = 0$:

$$\beta^2 S'''' + S'' = -V^{-1} f_2\,(x), \quad f_2\,(x) = \beta F_+{}''\,(x) + iF_-{}'\,(x) \qquad (1.8)$$

В отличие от гравитационных, капиллярные волны развиваются навстречу потоку [3]. Поэтому потребуем, чтобы функция $S\,(x)$ со всеми ее производными стремилась к нулю при $x \to -\infty$. Если в уравнении (1.8) принять $P \equiv S''$ за новую функцию, то единственным его решением, удовлетворяющим названному условию излучения, будет

$$P = -\frac{1}{\beta V}\int_{-\infty}^{x} f_2(t)\sin\frac{x-t}{\beta}\,dt$$

Из этого выражения найдем начальные условия для определения P

$$P(0) = \frac{2}{\beta V}\operatorname{Re}\left[\frac{i^n C}{(n-1)!}\frac{d^n}{dh^n}\left\{\exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{h}{\beta}\right)-i\pi\right]\right\}\right]$$

$$P'(0) = \frac{2}{\beta^2 V}\operatorname{Re}\left\{\frac{i^{n+1}C}{(n-1)!}\left[\frac{d^n}{dh^n}\left\{\exp\left(-\frac{h}{\beta}\right)\left[\operatorname{Ei}\left(\frac{h}{\beta}\right)-i\pi\right]\right\}-\frac{(-1)^n n!}{h^{n+1}}\right]\right\}$$

В общем случае поставить задачу Коши, аналогичную рассмотренным, исходя лишь из условий излучения, затруднительно. Однако можно воспользоваться интегральным представлением функции $S(x)$ для нахождения значений S, S', S'', S''' в какой-либо фиксированной точке, например $x = 0$, и тем самым получить данные Коши для решения уравнения (1.4). Так, в случае обтекания точечного вихря интенсивности Γ соответствующее интегральное представление [3] позволяет найти

$$S(0) = B\,[e^{-\sigma h}\operatorname{Ei}(\sigma h)]_-^+, \quad S'(0) = \pi B\,[\sigma e^{-\sigma h}]_-^+$$

$$S''(0) = B\,[\sigma/h - \sigma^2 e^{-\sigma h}\operatorname{Ei}(\sigma h)]_-^+, \quad S'''(0) = -\pi B\,[\sigma^3 e^{-\sigma h}]_-^+$$

$$(B = \Gamma/(\pi V\sqrt{1-4\beta\nu}), \quad [\Phi(\sigma)]_-^+ = \Phi(\sigma_+) - \Phi(\sigma_-), \ \sigma_\pm = (1 \pm \sqrt{1-4\beta\nu})/(2\beta)$$

2. Самоиндуцированное движение вихря под свободной поверхностью. Пусть в некоторой точке $z_0 = x_0 + iy_0$ ограниченной области, занятой идеальной жидкостью, находится единственный точечный вихрь интенсивности Γ. Это означает, что комплексный потенциал течения имеет вид $W = \Phi + i\Psi = [\Gamma/(2\pi i)]\ln(z - z_0) + p(z, t)$, где функция $p(z, t)$ аналитична по z во всей области течения. Присутствие в выражении для комплексного потенциала слагаемого $p(z, t)$ связано с наличием в жидкости границ (в безграничной среде $p \equiv 0$). Поскольку точечный вихрь сам на себя не действует и, кроме того, «вморожен» в среду, его движение осуществляется в соответствии с уравнением $d\bar{z}_0/dt = p_z(z_0, t)$.

Поставим задачу описать в приближении малых волн движение точечного вихря под свободной поверхностью бесконечно глубоковой жидкости, находящейся в однородном поле тяжести. Положим $p(z, t) = [\Gamma/(2\pi i)]\ln(z - \bar{z}_0) + \omega(z, t)$, тогда $W = W_0 + \omega$, где $W_0 = \Phi_0 + i\Psi_0 = [\Gamma/(2\pi i)]\ln[(z - z_0)(z - \bar{z}_0)]$, а функция $\omega = \varphi + i\psi$ аналитична всюду в области течения.

Вихрь небольшой интенсивности, находящийся на достаточной глубине, будет генерировать поверхностные волны малой амплитуды. В этом случае граничные условия на оси x имеют вид [3]

$$\Phi_t + gS = 0, \quad \Phi_y = S_t \tag{2.1}$$

($S = S(x, t)$ — отклонение свободной поверхности от ее невозмущенного положения $y = 0$). Следствием (2.1) является условие [3]

$$\Phi_{tt} + g\Phi_y\,|_{y=0} = 0 \tag{2.2}$$

Если задать состояние свободной поверхности и положение вихря в начальный момент времени $t = 0$

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad S_t(x, 0) = S_1(x), \quad z_0(0) = -ih \tag{2.3}$$

то с учетом того, что на оси x справедливы соотношения $\Phi_0 = \operatorname{Re} W_0 = \operatorname{Re} \{[\Gamma/(\pi i)] \ln | x - z_0 | \} = 0$, $\partial\Phi_0/\partial t = 0$.

$$\partial\Phi_0/\partial y = -\operatorname{Im} W_0' = (\Gamma/\pi)(x - x_0)/[(x - x_0)^2 + y_0^2]$$

из (2.1)—(2.3) получим задачу для потенциала скорости φ

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y |_{y=0} = -(g\Gamma/\pi)(x - x_0)/[(x - x_0)^2 + y_0^2]$$

$$\varphi_y |_{y=0,\, t=0} = S_1(x) - (\Gamma/\pi)\, x/(x^2 + h^2), \quad \varphi_t |_{y=0,\, t=0} = -gS_0(x) \tag{2.4}$$

Решению задачи (2.4), полученному при помощи преобразования Фурье, можно придать вид

$$\varphi = -\operatorname{Re}\left\{(\Gamma/\pi)\left(-i\ln[z - \overline{z_0(t)}] + \int_0^\infty\int_0^t \frac{d\overline{z_0(\xi)}}{d\xi}\exp(i\lambda[\overline{z_0(\xi)} - z])\, \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times \cos[\sqrt{g\lambda}(t - \xi)]\, d\xi\, d\lambda\right)\right\} + \Theta(x, y, t)$$

$$\Theta(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sigma_1(\lambda)}{|\lambda|}\cos(\sqrt{g|\lambda|}\, t) - \sqrt{\frac{g}{|\lambda|}}\,\sigma_0(\lambda)\sin(\sqrt{g|\lambda|}\, t)\right]\times$$
$$\times \exp(|\lambda| y + i\lambda x)\, d\lambda \tag{2.5}$$

($\sigma_0(\lambda)$, $\sigma_1(\lambda)$ — фурье-образы $S_0(x)$ и $S_1(x)$ соответственно).

Из (2.5) следует выражение для комплексного потенциала всего течения

$$W(z, t) = [\Gamma/(2\pi i)]\{\ln[z - z_0(t)] - \ln[z - \overline{z_0(t)}]\} -$$
$$-\frac{\Gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_0^t \frac{d\overline{z_0(\xi)}}{d\xi}\exp(i\lambda[\overline{z_0(\xi)} - z])\cos[\sqrt{g\lambda}(t - \xi)]\, d\xi\, d\lambda + \chi(z, t) \tag{2.6}$$

где $\chi(z, t)$ — аналитическая в области течения функция, действительная часть которой есть $\Theta(x, y, t)$.

Первый член в правой части (2.6) представляет собой комплексный потенциал течения, создаваемого рассматриваемым и «зеркальным» относительно оси x вихрем интенсивности $-\Gamma$; второй связан с вызываемым вихрем движением свободной поверхности; третий — с развитием начальных возмущений свободной поверхности.

Если в начальный момент времени свободная поверхность была невозмущенной, т. е. совпадала с осью x и не двигалась, то

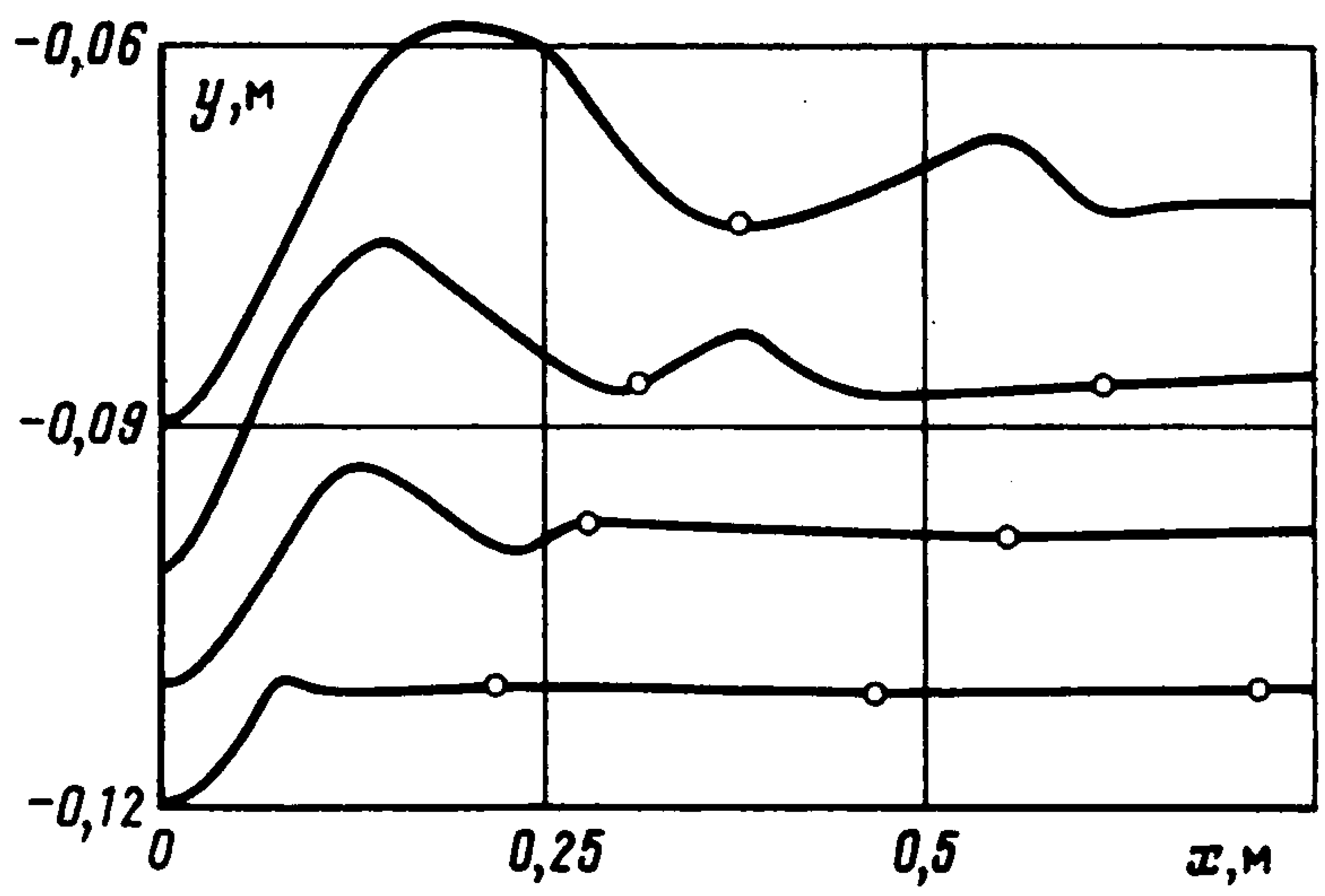
$$\frac{d\overline{z_0(t)}}{dt} = \frac{\Gamma}{\pi}\left\{\frac{1}{4y_0(t)} + i\int_0^\infty \lambda \int_0^t \frac{d\overline{z_0(\xi)}}{d\xi}\exp(i\lambda[\overline{z_0(\xi)} - z_0(t)])\, \times \right.$$
$$\left. \times \cos[\sqrt{g\lambda}(t - \xi)]\, d\xi\, d\lambda\right\} \tag{2.7}$$

Поскольку рассматривается приближение малых волн, влияние «зеркального» вихря доминирует, а воздействие свободной поверхности носит поправочный характер. Вследствие этого приближенный закон движения вихря можно найти, положив в подынтегральном выражении (2.7) $z_0(\xi) = V\xi - ih$, $V = -\Gamma/(4\pi h)$, что соответствует движению вихря при «замороженной» свободной поверхности, т. е. у твердой стенки. Тогда интегрирование по ξ в (2.7) выполняется точно, что дает

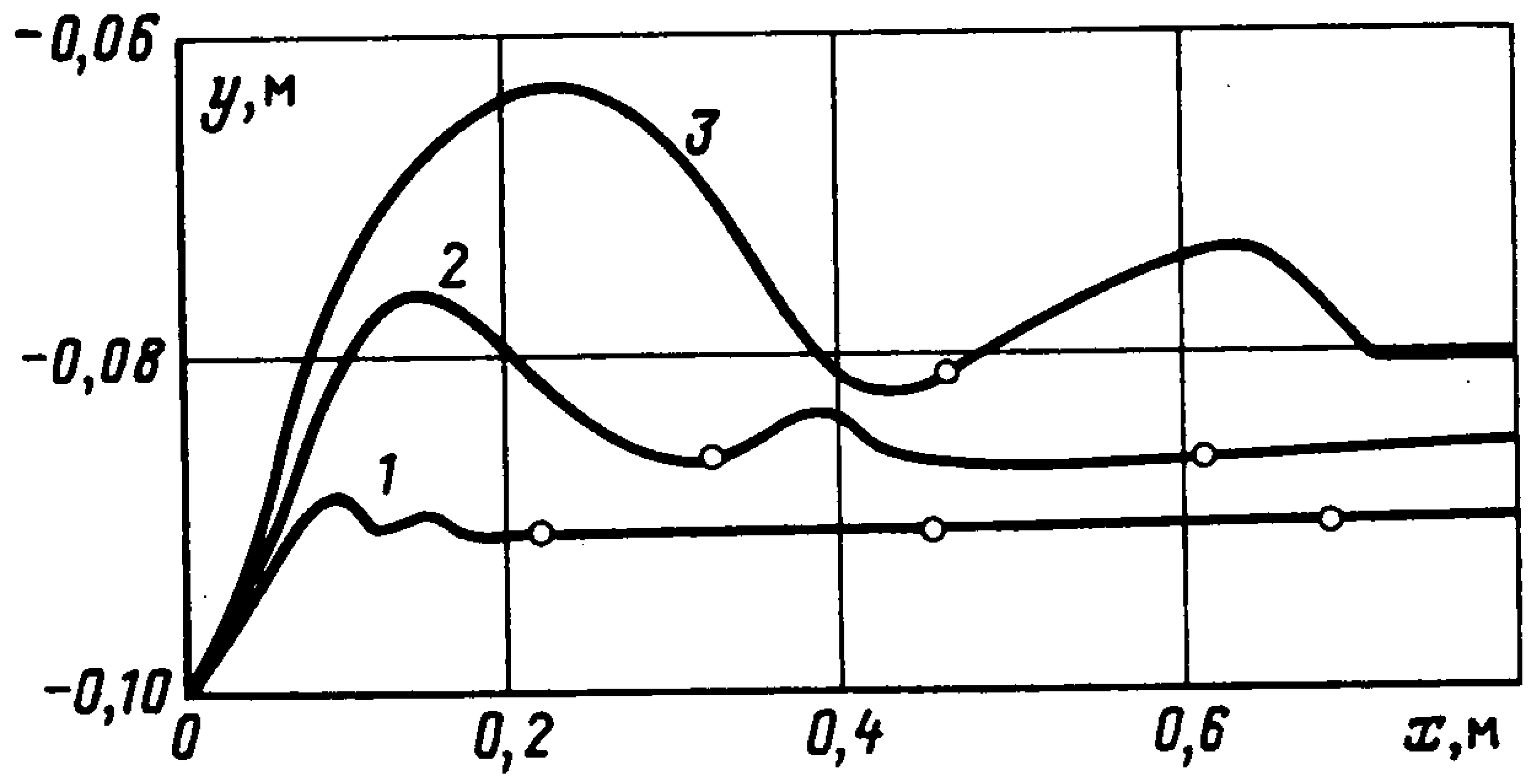
$$y_0(t) = -h + I_1, \quad x_0(t) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^t \frac{d\xi}{y_0(\xi)} - I_2$$

$$I_j = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 h}\int_0^\infty \lambda\exp(-2h\lambda)[F_j(\mu_+) + F_j(\mu_-)]\, d\lambda$$

$$(F_1(\mu) = (1 - \cos\mu t)/\mu^2, \quad F_2(\mu) = (\mu t - \sin\mu t)/\mu^2, \quad \mu_\pm = \lambda V \pm \sqrt{g\lambda})$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлены найденные при помощи ЭВМ по этим формулам траектории вихрей интенсивности $\Gamma = -0{,}1\pi$ м^2/с, находившихся в начальный момент времени на глубинах 9, 10, 11, 12 см. На фиг. 2 изображены траектории вихрей интенсивностей $-0{,}08\pi$, $-0{,}10\pi$, $-0{,}12\pi$ м^2/с (кривые *1*, *2*, *3* соответственно), находившихся в начальный момент на глубине 10 см. Выделенные точки на кривых отмечают положения вихрей через каждую секунду. Видно, что после колебаний тем большей амплитуды, чем меньше начальная глубина и больше интенсивность, вихрь выходит на режим монотонного и весьма медленного всплывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Келдыш М. В.* Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости // М. В. Келдыш. Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 100—103.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1 М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.

Люберцы, Московская обл.

Поступила в редакцию
4.V.1990