

УДК 532.526

© 1991 г.

В. А. Батищев

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ВЯЗКИХ СЛОЯХ

При больших числах Марангони исследуются термокапиллярные течения в тонких слоях, вызванные неравномерным нагревом свободной границы. В условиях осевой симметрии строятся автомодельные решения нелинейных уравнений пограничного слоя и найдены асимптотические формулы решений для малых и больших значений толщины слоя. Показано, что автомодельные решения могут быть не единственными при определенных значениях параметров задачи. В неоднородной жидкости силы плавучести приводят к усилению, гашению или формированию возвратных течений вблизи свободной границы. Автомодельные решения при наличии термокапиллярных эффектов изучались в [1—5].

1. При малых коэффициентах вязкости  $\nu \rightarrow 0$  и теплопроводности  $\chi \rightarrow 0$  рассматривается нелинейная осесимметричная задача о стационарном термокапиллярном движении несжимаемой жидкости в тонком слое, ограниченном свободной поверхностью  $\Gamma$  и твердой стенкой  $S$  при воздействии ненулевого градиента температуры на свободную границу:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \\ \nu \nabla T &= \chi \Delta T, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} p &= 2\nu \rho \Pi \mathbf{n} + \sigma (k_1 + k_2) + p_*, (x, y, z) \in \Gamma \\ 2\nu \rho [\Pi \mathbf{n} - (\mathbf{n} \Pi \mathbf{n})] &= \nabla_{\Gamma} \sigma, \mathbf{v} \mathbf{n} = 0, (x, y, z) \in \Gamma \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$T = T_{\Gamma}, (x, y, z) \in \Gamma; \mathbf{v} = T - T_S = 0, (x, y, z) \in S$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости;  $T$  — температура;  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$  — орт оси  $z$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе  $\Gamma$ ;  $\Pi$  — тензор скоростей деформации;  $k_1, k_2$  — главные кривизны поверхности  $\Gamma$ ;  $p_*$  и  $T_{\Gamma}$  — заданные давление и температура на  $\Gamma$ ;  $T_S$  — температура стенки.  $\nabla_{\Gamma} = \nabla - (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{n}$  — градиент вдоль  $\Gamma$ ;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, считается линейной функцией температуры:  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T| (T - T_*)$ , где  $\sigma_0, \sigma_T, T_*$  — известные постоянные,  $\sigma_T < 0$ .

При неравномерном нагреве свободной границы возникают поверхностные касательные напряжения вдоль  $\Gamma$ , которые при  $\nu, \chi \rightarrow 0$  приводят к формированию нелинейных пограничных слоев вблизи границ области вследствие термокапиллярного эффекта.

Задачу (1.1), (1.2) приведем к безразмерному виду путем введения характерных масштабов длины  $L$ , скорости  $U = (|\sigma_T|^2 A^2 L \rho^{-2} \nu^{-1})^{1/2}$ , давления  $P = \sigma_0 / L$ , где  $A$  — характерный масштаб градиента температуры. Введем малый параметр  $\varepsilon = M^{-1/2}$ , где  $M = |\sigma_T| L^2 A \rho^{-1} \nu^{-2}$  — число Марангони. Отметим, что малым значениям  $\varepsilon$  соответствуют малые  $\nu$  или большие градиенты температуры. Было показано [5], что порядки скорости и толщины пограничного слоя вблизи свободной границы соответственно равны  $O(U)$  и  $O(\varepsilon)$ .

Далее рассмотрим термокапиллярные течения в тонких слоях толщиной порядка  $\varepsilon$ . Отметим, что рассматривались [6] течения в слоях толщиной  $\varepsilon$ , ограниченные двумя твердыми стенками, причем градиент давления определялся в процессе решения уравнений Прандтля.

Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon \mathbf{h}_1 + \dots, \quad p' \sim \lambda q_0 + \varepsilon \lambda q_1 + \dots \quad (1.3)$$

$$T \sim \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots, \quad \zeta \sim \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \dots, \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad p' = (p + \rho g z)/P$$

Здесь  $\lambda = |\sigma_T| AL/\sigma_0$  — капиллярная постоянная.  $z = \zeta(x, y)$  — уравнение свободной границы.

2. Краевая задача для определения главных членов асимптотики (1.3) получается применением второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [7] к системе (1.1), (1.2). Вблизи твердой поверхности  $S$  вводятся локальные ортогональные координаты  $\xi, \varphi, \theta$ , где  $\xi$  — расстояние точки  $N(x, y, z)$  до поверхности  $S$ , а  $\varphi, \theta$  — криволинейные координаты на  $S$  основания нормали, опущенной из точки  $N$ . Пусть  $h_{\varphi k}, h_{\theta k}, h_{\xi k}$  — компоненты вектора  $\mathbf{h}_k$  в локальных координатах. Подставляем (1.3) в (1.1), (1.2) и вводим преобразование растяжения  $\xi = \varepsilon s$ . Приравнявая нулю коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}, \varepsilon$ , находим, что  $h_{\xi 0} = 0$ , а  $h_{\varphi 0}, h_{\theta 0}, h_{\xi 1}$  удовлетворяют уравнениям пограничного слоя Прандтля.

Приведем эти уравнения в осесимметричном случае, считая, что  $h_{\theta 0} = 0$ , вектор  $\mathbf{v}$  не зависит от координаты  $\theta$ , а  $\varphi$  — длина дуги поверхности вращения  $S$  в меридианальном сечении:

$$\begin{aligned} h_{\varphi 0} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + h_{\xi 1} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2} - \frac{\partial q_0}{\partial s} \\ \frac{\partial q_0}{\partial s} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (r h_{\varphi 0}) + \frac{\partial}{\partial s} (r h_{\xi 1}) = 0 \\ \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} &= -\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{h}_1 \mathbf{n} = 0 \quad (s = \zeta_1(\varphi)), \quad h_{\varphi 0} = h_{\xi 1} = 0 \quad (s = 0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $r(\varphi)$  — расстояние точки поверхности  $S$  до оси вращения  $z$ .

Систему (2.1) дополняем уравнением для определения функции  $\zeta_1(\varphi)$ , используя динамические краевые условия на свободной границе. Рассмотрим случай, когда капиллярная постоянная имеет порядок  $\varepsilon^2$ , т. е.  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^2$ . Теперь краевые условия (1.2) для нормальных напряжений при учете свойств осевой симметрии приводят к уравнениям

$$\lambda_0 q_0 = B \zeta_1 \cos(\mathbf{n} \mathbf{e}_z) - \zeta_1 (k_1^2 + k_2^2) - \Delta \zeta_1 \quad (2.2)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа — Бельтрами на поверхности  $\Gamma$ ,  $B = \rho g L^2 / \sigma_0$  — число Бонда.

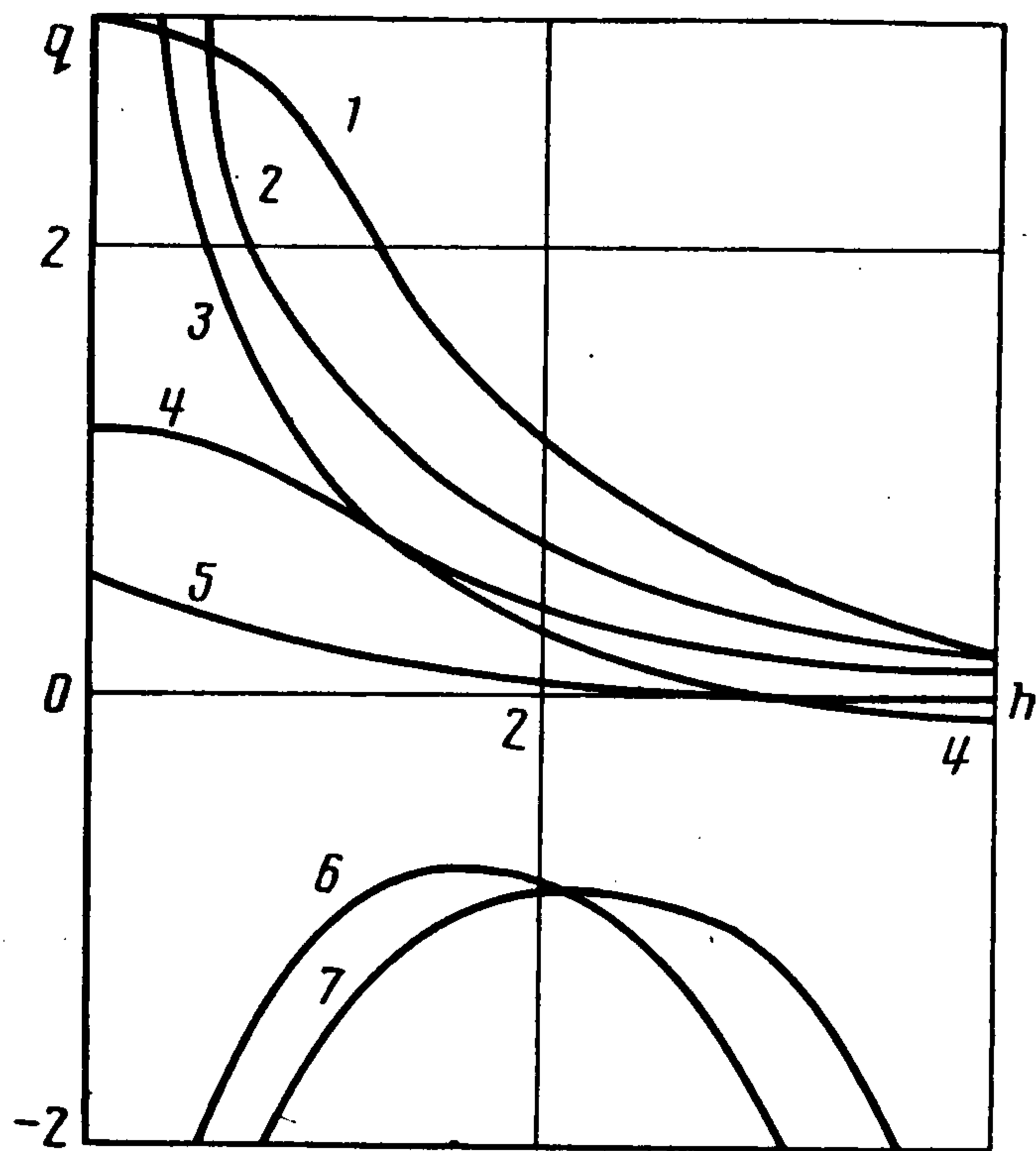
В случае  $\lambda \ll \varepsilon^2$  поверхность  $s = \zeta_1(\varphi)$  удовлетворяет уравнению (2.2) при  $\lambda_0 = 0$ , которое интегрируется отдельно от системы (2.1). Случай  $\lambda \gg \varepsilon^2$  не рассматривается.

3. Построим автомодельные решения системы (2.1), (2.2) при учете осевой симметрии при условии, что градиент поверхностного натяжения зависит от координаты  $\varphi$  по степенному закону  $d\sigma/d\varphi = \tau \varphi^n$ . Введем функцию тока соотношениями  $h_{\varphi 0} = \partial \psi / \partial s$ ,  $h_{\xi 1} = -r^{-1} \partial (r \psi) / \partial \varphi$  и обозначим  $\eta = s |\tau|^{1/3} \varphi^{(n+1/3)}$ . Представим функции  $\psi$  и  $q_0$  в виде

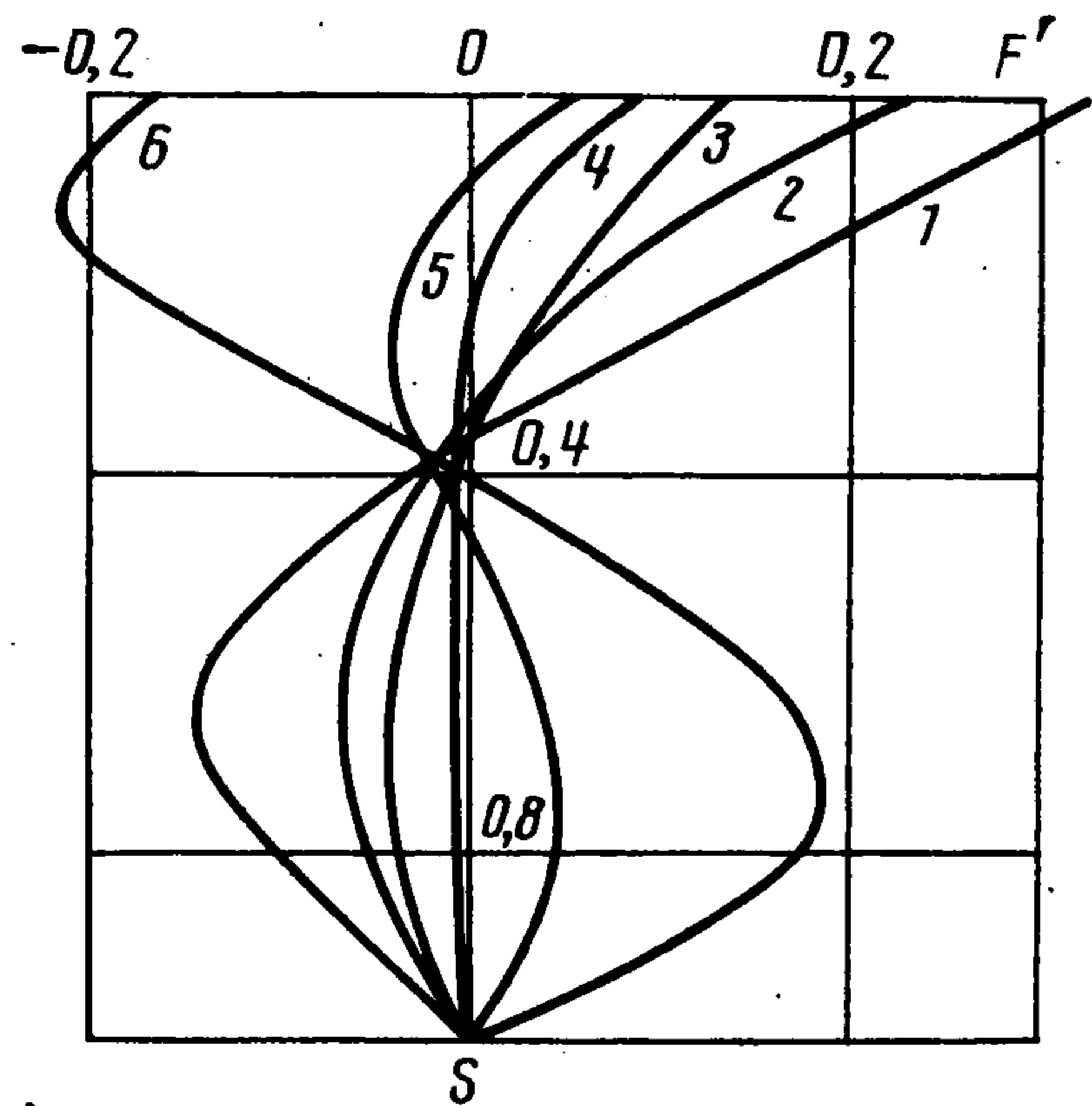
$$\psi = |\tau|^{1/3} \varphi^{(n+2)/3} F(\eta), \quad q_0 = 3q |\tau|^{-1/3} \varphi^{(4n+2)/3} / (4n+2)$$

Для функции  $F(\eta)$  из системы (2.1) выводим уравнение

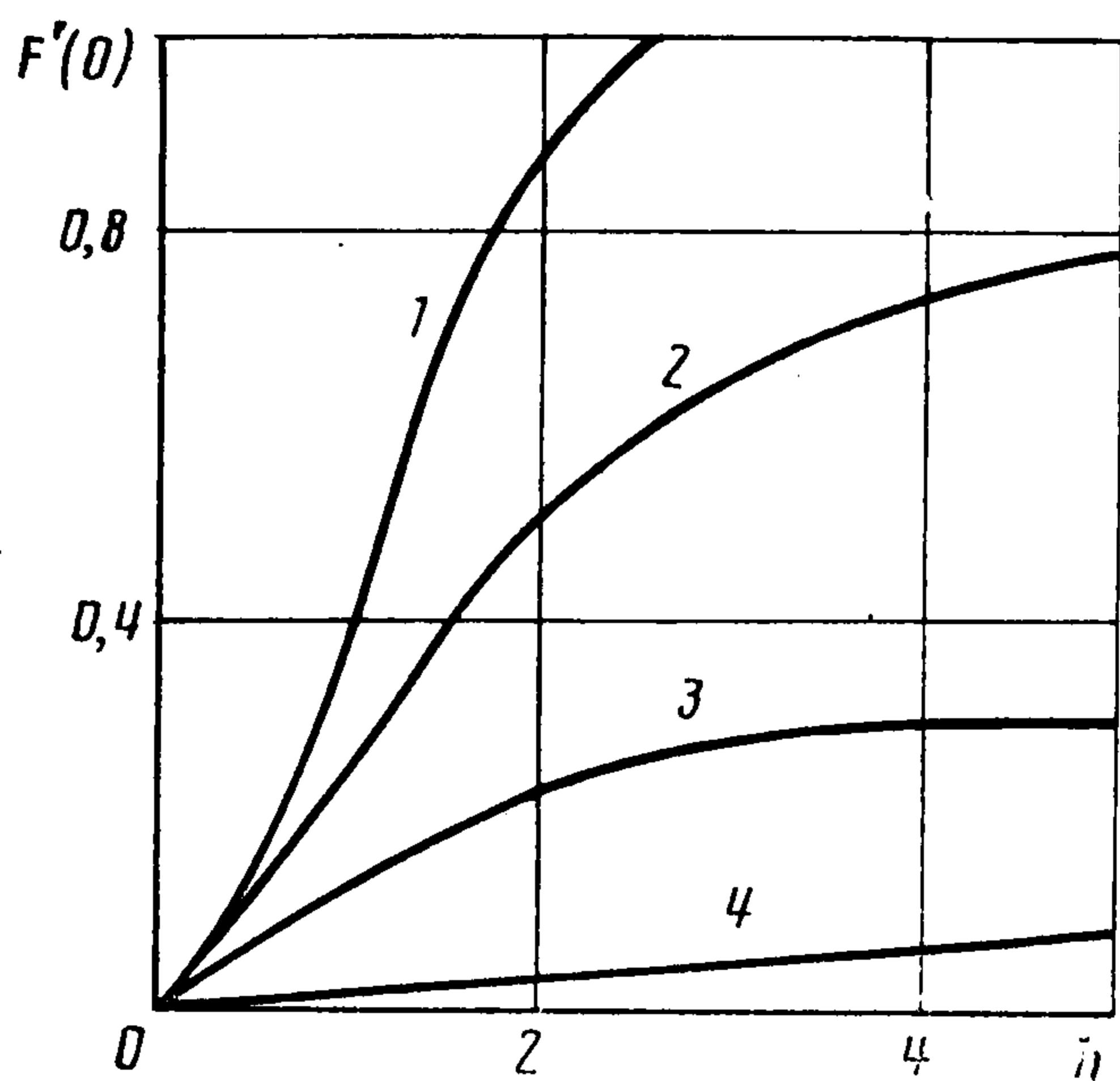
$$3F''' + (n+5)FF'' - (2n+1)F'^2 = 3q \quad (3.1)$$



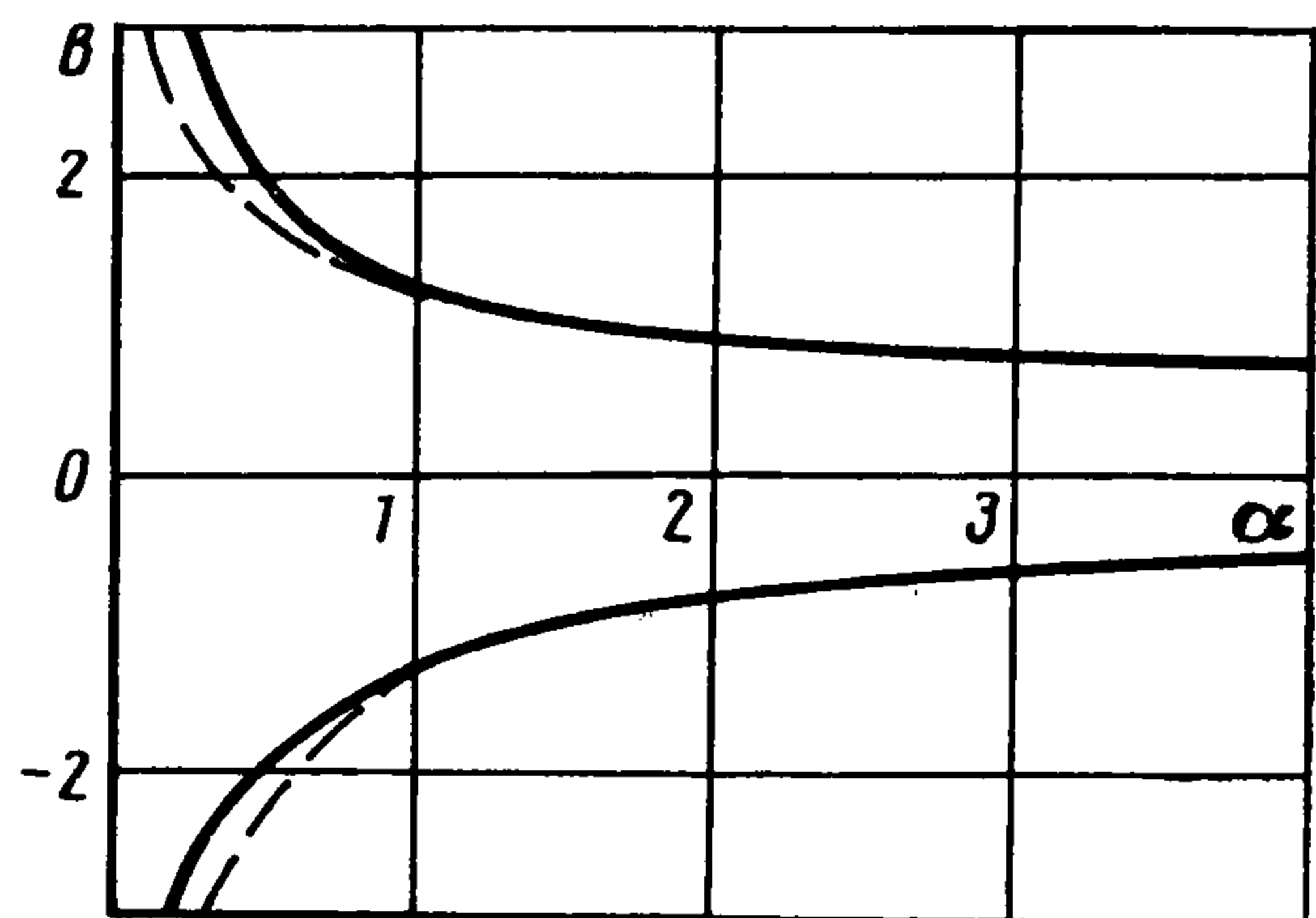
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Рассмотрим слой постоянной толщины  $h = \text{const}$ . Автомоделное решение существует при  $n = 1$ . Помещая начало системы координат на свободную границу, запишем краевые условия для уравнения (3.1)

$$F(0) = F(h) = F'(h) = 0, \quad F''(0) = -1 \quad (3.2)$$

Заметим, что одно из условий (3.2) служит для определения неизвестной постоянной  $q$ , пропорциональной давлению в слое. При условии  $F''(0) = -1$  касательные напряжения на свободной поверхности направлены в сторону возрастания координаты  $\eta$ , а при  $F''(0) = 1$  — в обратную сторону.

Задача (3.1), (3.2) при  $n = 1$  проинтегрирована численно для различных  $h$ . На фиг. 1 кривая 2 изображает зависимость  $q(h)$ . При малых  $h$ , разлагая функцию  $F(\eta)$  в ряд по степеням  $\eta$ , найдем асимптотику  $q = 1,5 h^{-1} [1 + o(1)]$  при  $h \rightarrow 0$ . При  $h = 0,5$  у асимптотического и численного значений  $q$  совпадают три значащие цифры. На фиг. 2 кривая 3 изображает профиль скорости при  $h = 1$ . Наибольшее значение скорости достигается на свободной границе, где направление скорости совпадает с направлением касательного напряжения. Вблизи твердой стенки возникает зона противотока с максимальной скоростью, приблизительно втрое меньшей, чем скорость на свободной границе  $v_{\Gamma}$ . С ростом толщины

слоя значение  $v_T$  и область приповерхностного течения, где  $h_{\varphi_0} > 0$  уменьшаются. На фиг. 2 кривая 4 изображает профиль скорости при  $h = 10$ . Зависимость  $F'(0)$  от  $h$  изображена кривой 2 на фиг. 3.

При  $h \rightarrow \infty$  легко строится асимптотика решения задачи (3.1), (3.2). Приведем главные члены этой асимптотики

$$q \sim h^{-2} G^2(\infty), \quad F(\eta) \sim h^{-2} G(\eta h) \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0)$$

$$F(\eta) \sim h^{-2} G(\infty) (1 - \eta) \quad (\eta_0 \leq \eta \leq 1), \quad h \rightarrow \infty$$

Здесь  $\eta_0 = O(h^{-1})$ , а функция  $G(t)$  определяется из краевой задачи

$$G''' + 2GG'' - G'^2 = 0; \quad G(0) = G'(\infty) = 0, \quad G''(0) = -1$$

Численный расчет показал, что  $G(\infty) = 0,7125$ , а  $G'(0) = 0,8972$ .

Краевая задача (3.1), (3.2) решена численно также и при условии  $F''(0) = 1$ . График зависимости  $q(h)$  изображен кривой 7 на фиг. 1. Отметим, что асимптотические формулы строятся только при  $h \rightarrow 0$ :  $q \sim -1,5 h^{-1}$ ,  $F \sim -0,5 h\eta + 0,5 h\eta^2 - 0,25\eta^3 h^{-1}$ .

В слое с двумя свободными границами функция  $F(\eta)$  удовлетворяет уравнению (3.1) при  $n = 1$  с краевыми условиями  $F(0) = F(h) = F''(h) = 0$ ,  $F''(0) = \gamma$  ( $\gamma = \pm 1$ ). Зависимость  $q(h)$  рассчитана численно и графически изображена на фиг. 1, где кривые 3 и 6 соответствуют значениям  $\gamma$  равным  $-1$  и  $1$ . Можно найти асимптотические формулы  $q \approx -\gamma/h$  и  $F'(0) \approx \gamma h/3$  при  $h \rightarrow 0$ . Отметим, что в отличие от слоя с твердой границей функция  $F'(\eta)$  монотонна с максимумом на свободной границе.

Построим автомодельные решения в тонком слое, лежащем на горизонтальной твердой поверхности, когда свободная граница имеет точку контакта с твердой стенкой при  $\varphi = 0$ . Краевое условие (2.2) после линеаризации относительно  $\zeta_1$ ,  $\zeta_1'$ ,  $\zeta_1''$  приводится к виду

$$\lambda_0 q_0 = B\zeta_1 - \zeta_1'' - \zeta_1'/r \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай, когда членом  $B\zeta_1$  можно пренебречь. Это выполняется, если капиллярные силы превосходят гравитационные, например в невесомости ( $B = 0$ ). Автомодельное решение существует только при  $n = -7/5$ . Записывая коэффициент поверхностного натяжения в виде  $\sigma = \sigma_0 - 6,25 \tau\varphi^{-2/5}$ , находим решение

$$\psi = -\varphi^{1/5} b^2 \tau^{1/5} F(\eta), \quad \eta = 1 - s\varphi^{-1/5} b^{-1} \tau^{1/5}, \quad \zeta_1 = b\tau^{-1/5} \varphi^{1/5}$$

Функция  $F(\eta)$  определяется из краевой задачи

$$5F''' + b^3 (6FF'' + 3F'^2) = 5\alpha b^2 \quad (3.4)$$

$$F(0) = F(1) = F'(1) = 0, \quad F''(0) = -1$$

Параметр  $b$  пропорционален градиенту давления и подлежит определению. Постоянная  $\alpha$  известна:  $\alpha = 96\lambda_0^{-1} \tau^{-5/3} / 125$ .

Краевая задача (3.4) интегрировалась численно с применением метода Рунге — Кутты. На фиг. 4 сплошными линиями изображена зависимость  $b(\alpha)$ . При фиксированных  $\alpha$  численно рассчитаны два решения, для одного из которых  $b > 0$ , а для второго  $b < 0$ . При больших  $\alpha$  построены асимптотические формулы этих решений разложением функции  $F(\eta)$  в ряд по степеням  $\eta$ . Приведем формулу  $b \approx \pm \sqrt{1,5/\alpha}$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ).

Отметим, что при  $\alpha = 1$  у численного и асимптотического значений совпадают три значащие цифры:  $b = 1,22$ . При  $\alpha \rightarrow 0$  построена асимп-

тотика решения задачи (3.4) для положительных  $b$ :

$$b \approx c\alpha^{-1/3}, \quad F \approx \alpha^{2/3}c^{-2}G\left(\frac{c\eta}{\alpha^{1/3}}\right) \quad (0 \leq \eta \leq \eta_0)$$

$$F \approx -\alpha^{2/3}c^{-1/2}\sqrt{5/3}(\eta - 1) \quad (\eta_0 \leq \eta \leq 1, \quad \alpha \rightarrow 0)$$

$$\eta_0 = O(\alpha^{1/3}), \quad c = (\sqrt{0,6} G(\infty))^{2/3}$$

Функция  $G(t)$ , описывающая течение в приповерхностном слое, определяется из краевой задачи

$$5G''' + 6GG'' + 3G'^2 = 0; \quad G(0) = G'(\infty) = 0, \quad G''(0) = -1$$

Численным методом найдено, что  $G'(0) = 1,824$ ;  $G(\infty) = 1,543$ .

С уменьшением  $\alpha$  скорость на свободной границе и область приповерхностного течения, где  $h_{\varphi_0} > 0$  уменьшаются, одновременно увеличивается толщина зоны противотока. Профиль скорости при  $\alpha = 10^{-3}$  проходит вблизи кривой 4 на фиг. 2.

В окрестности точки контакта границ области ( $\varphi \rightarrow 0$ ) полученное решение не справедливо, так как здесь асимптотические разложения имеют более сложный вид, чем (1.3), а уравнения тонкого слоя совпадают с полной системой Навье — Стокса. Асимптотическое исследование системы Навье — Стокса вблизи линии контакта проведено в [8, 9].

При краевом условии  $F''(0) = 1$  решение задачи (3.4) получается из рассмотренного выше путем замены переменных  $F$ ,  $\alpha$ ,  $b$  соответственно на  $-F$ ,  $-\alpha$ ,  $-b$ .

Построим автомодельное решение при условии, что капиллярными силами в (3.3) можно пренебречь, тогда краевое условие на свободной границе запишем в виде  $\lambda_0 q_0 = B\zeta_1$ . Теперь автомодельное решение существует при  $n = 4/5$  и записывается в виде  $\psi = -\varphi^{-2/3}b^2\tau^{1/3}F(\eta)$ , где  $\eta = 1 - s\varphi^{-2/3}\tau^{1/3}b^{-1}$ , причем  $\zeta_1 = b\tau^{-1/3}\varphi^{2/3}$ . Функция  $F$  удовлетворяет краевой задаче

$$5F''' + b^3(8FF'' - F^2) = 5\alpha b^2$$

$$F(0) = F(1) = F'(1) = 0, \quad F''(0) = -1$$

Здесь  $\alpha = B\lambda_0^{-1}\tau^{-2/3}$  — заданный параметр, а постоянная  $b$  подлежит определению.

Решение  $F(\eta)$  рассчитано численно для различных  $\alpha$ , а зависимость  $b(\alpha)$  изображена на фиг. 4 штрихами. Приведем асимптотику  $b \approx \pm \sqrt{1,5\alpha^{-1}}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Для значений  $b > 0$  при малых  $\alpha$  найдена асимптотическая формула  $b \approx 0,5574\alpha^{-1/3}$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ).

4. Рассмотрим случай, когда на свободной границе задан тепловой поток  $\kappa dT/dn = Q$ . Теперь, чтобы выполнить краевое условие для касательного напряжения, необходимо рассчитать распределение температуры внутри слоя.

Приведем автомодельное решение в осесимметричном случае для слоя постоянной толщины  $h$  при  $Q = Q_0\varphi^2$ ,  $T = \varphi^2\theta(s)$ ,  $\psi = \varphi F(s)$ . Функции  $F(s)$ ,  $\theta(s)$  определяются из краевой задачи

$$F''' + 2FF'' - F'^2 = q(h), \quad \theta'' + 2Pr(\theta'F - \theta F') = 0 \quad (4.1)$$

$$F(0) = 0, \quad F''(0) = -2\theta(0), \quad \theta'(0) = -1/Pr$$

$$F(h) = F'(h) = \theta(h) = 0$$

Здесь учтено, что за характерный масштаб температуры принята величина  $Q_*/\kappa$ , где  $Q_*$  — масштаб теплового потока,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $Pr$  — число Прандтля.

Задача (4.1) исследована численно для разных значений параметров  $h$  и  $Pr$ . На фиг. 1 кривые 1, 4 и 5 изображают зависимость градиента давления от толщины слоя  $q(h)$  при числах Прандтля, равных соответственно 1, 7 и 50. Отметим, что в отличие от задачи, когда задана температура свободной границы ( $\theta''(0) = -1$ ), функция  $q(h)$  имеет конечное значение при  $h = 0$ .

При малых  $h$  приведем асимптотические формулы

$$q \sim 3/\sqrt{Pr}, \quad F \sim \frac{1}{2}(h^2s - 2hs^2 + s^3)/\sqrt{Pr}$$

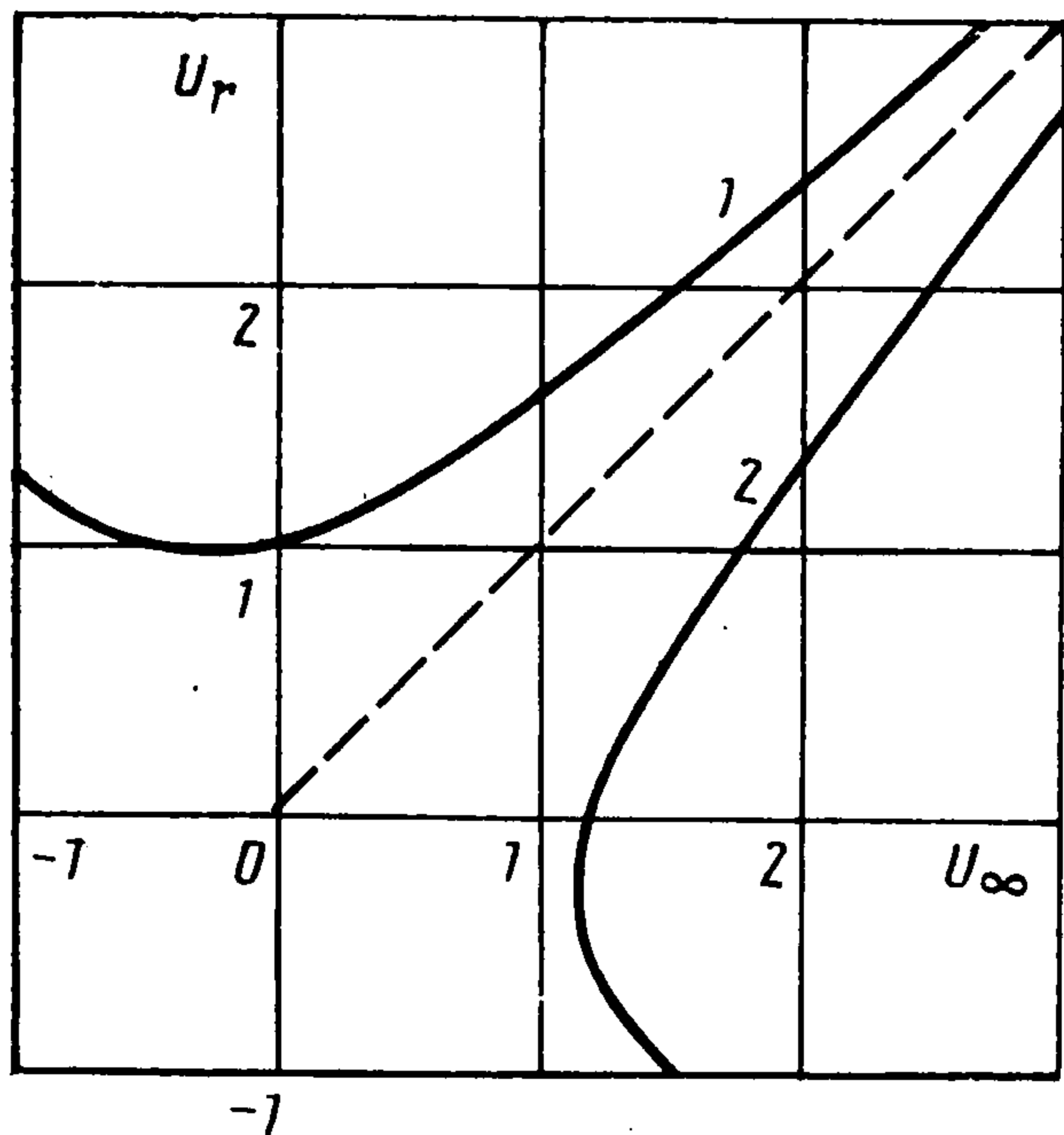
$$\theta \sim (h - s)/\sqrt{Pr} + \frac{1}{2}h^3s^2 \quad (h \rightarrow 0)$$

На фиг. 3 кривые 1, 3 и 4 изображают зависимость скорости на свободной границе  $F(0)$  от толщины слоя при числах Прандтля, равных соответственно 1, 7 и 50. С ростом  $h$  скорость жидкости увеличивается и стремится к конечному пределу при  $h \rightarrow \infty$ . Внутри области вблизи свободной границы возникает приповерхностное течение, имеющее одинаковое направление с касательными напряжениями, и зона обратного более слабого течения вблизи стенки. Температура на свободной границе убывает с ростом числа Прандтля и стремится к нулю при  $Pr \rightarrow \infty$ . При  $h = 1$  для  $1 \leq Pr \leq 50$  профили температур близки к линейным.

5. Рассмотрим термокапиллярное осесимметричное течение в слое бесконечной глубины при заданном градиенте коэффициента поверхностного натяжения  $d\sigma/d\varphi = \tau\varphi^n$ . Здесь  $\varphi$  — длина дуги на свободной границе в меридиональном сечении, отсчитываемая от оси симметрии. Определив функцию тока

$$\psi = \varphi^{(n+2)/3} |\tau|^{1/3} F(\eta), \quad \eta = s |\tau|^{1/3} \varphi^{(n-1)/3}$$

для  $F(\eta)$ , выводим уравнение (3.1) с краевыми условиями  $F(0) = F''(\infty) = 0$ ,  $F''(0) = \pm 1$ . Параметр  $q$  в (3.1) определяет амплитуду градиента давления во внешнем потоке.



Фиг. 5

Введем амплитуду скорости на свободной границе  $U_\Gamma = F'(0)$  и во внешнем потоке  $U_\infty = F'(\infty)$ . Функция  $F(\eta)$  рассчитана численно для разных  $n$ . На фиг. 5 приведена зависимость амплитуды скорости  $U_\Gamma$  от  $U_\infty$  при  $n = 0$ . Кривая 1 соответствует случаю  $F''(0) = -1$ , а кривая 2 — случаю  $F''(0) = 1$ . Отметим, что при  $F''(0) = -1$  для каждого значения найдено одно решение  $F(\eta)$ ,

а при  $F''(0) = 1$  для некоторых  $U_\infty$  существуют два решения.

При больших положительных  $U_\infty$  приведем асимптотическую формулу

$$U_\Gamma = U_\infty + \frac{a}{\sqrt{U_\infty}} + \dots \quad (U_\infty \rightarrow +\infty)$$

Здесь  $a = G'(0)$ , где  $G(\eta)$  определяется из краевой задачи

$$3G''' + \eta(n+5)G'' - (4n+2)G' = 0$$

$$G'(\infty) = G(0) = 0, \quad G''(0) = \pm 1$$

При  $n = 0$  находим  $a = \mp 0,7743$  для  $F''(0) = \pm 1$ . Кривая 2 на фиг. 5 пересекает ось абсцисс при  $U_\infty = 1,084$ . Вблизи этого значения краевая

задача для  $F(\eta)$  имеет два решения. Отметим, что профили скоростей во всех случаях монотонны. В случае, когда вне пограничного слоя жидкость покоится ( $U_\infty = 0$ ), численных решений при  $F''(0) = 1$  не найдено, а при  $F''(0) = -1$  рассчитано одно решение, для которого  $F'(0) = 1,056$ .

6. Рассмотрим влияние сил плавучести в тонком слое неоднородной жидкости при термокапиллярном течении. Уравнения движения записываем в приближении Буссинеска, заменив в первом уравнении системы (1.1) член с силой тяжести на  $g\beta T e_z$ , где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения. Рассматривая плоскую задачу, находим, что автомодельное решение существует только при  $d\sigma/d\varphi = \tau\varphi$ . Представляя решение в виде

$$\psi = \varphi |\tau|^{1/2} F(\eta), \quad \theta = |\tau| \varphi^2 \theta(\eta), \quad \eta = s |\tau|^{1/2}$$

для  $F(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  выводим краевую задачу

$$F^{(4)} + FF''' - F'F'' = \lambda\theta, \quad \theta'' + \text{Pr}(F\theta' - 2F'\theta) = 0 \quad (6.1)$$

$$F = 0, \quad F'' = -1, \quad \theta = 1 \quad (\eta = 0), \quad F = F' = \theta = 0 \quad (\eta = h)$$

Параметр  $\lambda$  учитывает влияние сил плавучести в тонком слое. Знак  $\lambda$  зависит от знака разности температур на границах слоя, причем  $\lambda > 0$ , если свободная граница нагрета сильнее, чем твердая нижняя граница.

Задача (6.1) рассчитана численно при  $h = 1$  и  $\text{Pr} = 7$ . На фиг. 2 приведены профили скоростей для различных  $\lambda$ , равных 10, 0, -15 и -30 (кривые 1, 2, 5 и 6 соответственно). При  $\lambda > 0$  происходит усиление скорости на свободной границе  $v_T$  с возрастанием  $\lambda$ , причем направление скорости также как и в однородной жидкости, совпадает с направлением касательных напряжений. Для отрицательных значений  $\lambda$  при  $\lambda_1 \leq \lambda \leq 0$  ( $\lambda_1 \approx -10$ ) происходит торможение потока вблизи свободной границы. При  $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1$  ( $\lambda_2 \approx -20$ ) область течения разбивается на три зоны, в двух из которых, примыкающих к границам области, скорость положительна, а в средней зоне возникает противоток, например кривая 5 на фиг. 2. При  $\lambda < \lambda_2$  вблизи свободной границы возникает обратное течение, направленное против поверхностных касательных напряжений, а в остальной части потока формируется противоток (кривая 6 на фиг. 2).

Таким образом, силы плавучести могут приводить к усилению, ослаблению или возникновению возвратных течений вблизи свободной границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. Symp. on Material Science in Space. Grenoble, 1979. p. 313—345.
2. *Napolitano L. G., Golia C.* Coupled Marangoni boundary layers // Applications of Space developments: Selection Paper 31st. Intern. Astronaut. Congr. Tokyo, 1980 // Acta Astronaut. 1981. V. 8. № 5—6. P. 417—434.
3. *Napolitano L. G., Russo G.* Similar axially symmetric Marangony boundary layers // Acta Astronaut. 1984. V. 11. № 3—4. P. 189—198.
4. *Pucknachov V. V.* Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers. Dublin: Bool Press, 1982. P. 97—110.
5. *Батищев В. А.* Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // ПММ. 1989. Т. 53. вып. 3. С. 425—432.
6. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2. М.: Мир, 1990. С. 395—726.
7. *Вишик М. А., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—102.
8. *Солонников В. А.* Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье — Стокса // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 252—258.
9. *Moffatt H. K.*, Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. № 1. P. 1—18.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
5.VII.1990