

УДК 532.5

© 1991 г.

В. И. Грынъ

## О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В классе стационарных течений Хименца — Бирмена изучается задача о течениях между пористыми стенками при наличии вдува и отсоса с одинаковыми скоростями. Показывается, что у стенки, где имеется отсос, возникает пограничный слой. Изучается класс нестационарных плоских течений, обобщающий класс течений Хименца — Бирмена. В классе течений, обобщающих течения Джеффри — Гамеля, рассматривается задача о течениях в двугранном угле с пористыми стенками при наличии вдува и отсоса. Находится класс стационарных (нестационарных) плоских течений, в котором изучается задача о течении между пористыми коаксиальными цилиндрами при наличии вдува и отсоса с произвольными скоростями. Находится несколько точных решений стационарных и нестационарных уравнений Навье — Стокса.

**1. Течения между пористыми стенками при наличии вдува и отсоса.** Уравнения, описывающие стационарные плоские течения несжимаемой вязкой жидкости [1]

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = \omega, \quad \Delta\omega = R(u\omega_x + v\omega_y) \quad (1.1)$$

допускают решения в виде (течения Хименца — Бирмена [2—4])

$$v = S(y), \quad u = A(y)x + T(y), \quad \omega = B(y)x + \Omega(y) \quad (1.2)$$

Другие решения получаются из (1.2) поворотом осей  $x, y$ . Функции  $S, A, T, B, \Omega$  удовлетворяют системе уравнений

$$A = -S', \quad B = A', \quad \Omega = T' \quad (1.3)$$

$$S^{(IV)} + R(S'S'' - SS''') = 0, \quad T''' + R(S''T - ST'') = 0 \quad (1.4)$$

Отметим, что уравнения (1.4) преобразуются к виду

$$S''' + R(S'^2 - SS'') = C_1, \quad T'' + R(S'T - ST') = C_2 \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем  $C_1, C_2, \dots$  — постоянные.

Уравнения (1.4) имеют очевидные решения

$$S = C_3y + C_4, \quad T = \int_0^y \int_0^t C_5 \exp(1/2 C_3 R s^2 + C_4 R s) ds dt + C_6y + C_7$$

а также решения вида

$$S = -6/(Ry), \quad T = C_3y^2 + C_4y^{-2} + C_5y^{-3}$$

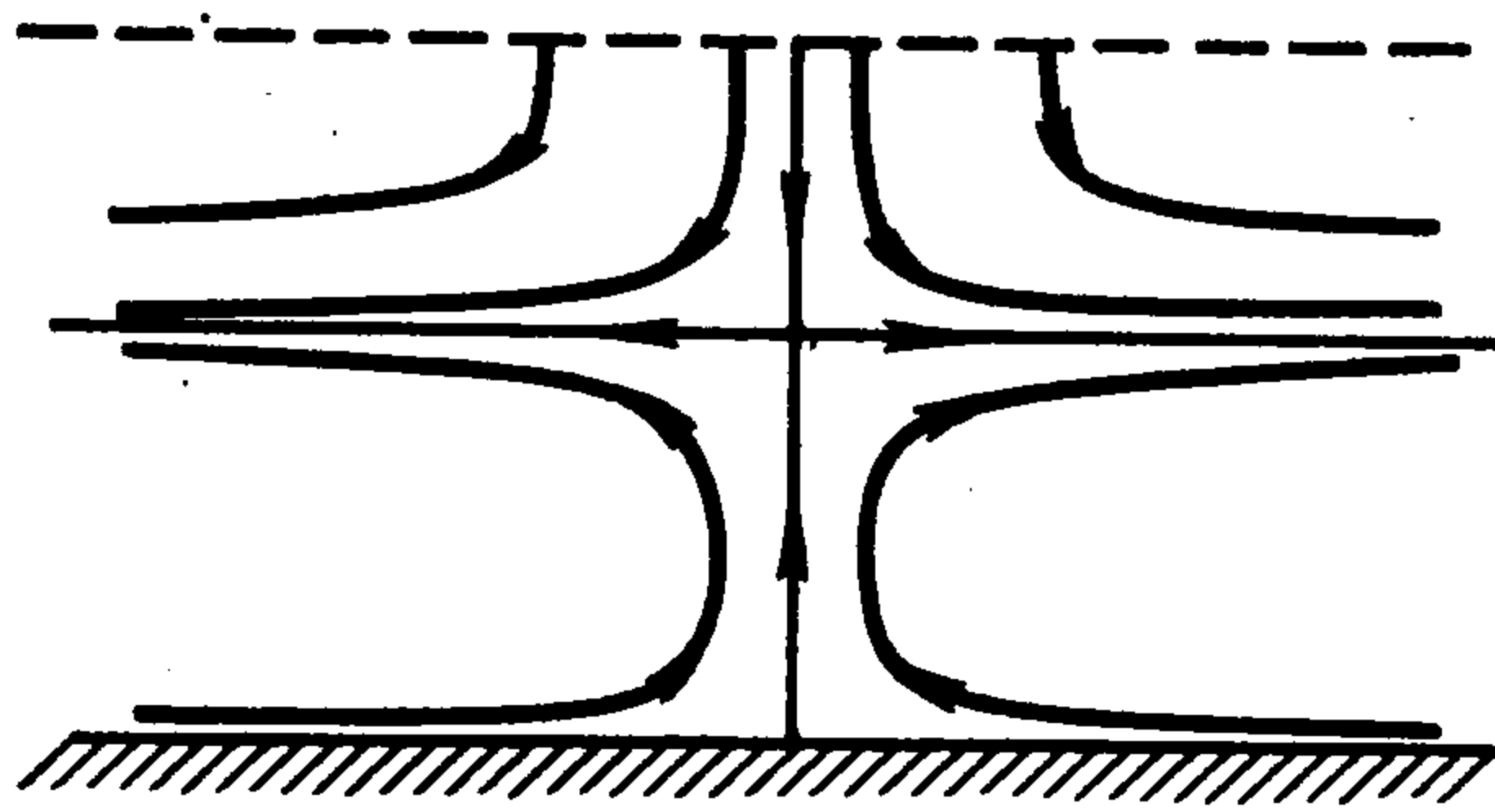
При  $C_1 = 0$  уравнение для  $S$  преобразуется к уравнению Абеля второго рода.

Давление, соответствующее решениям вида (1.2), имеет вид

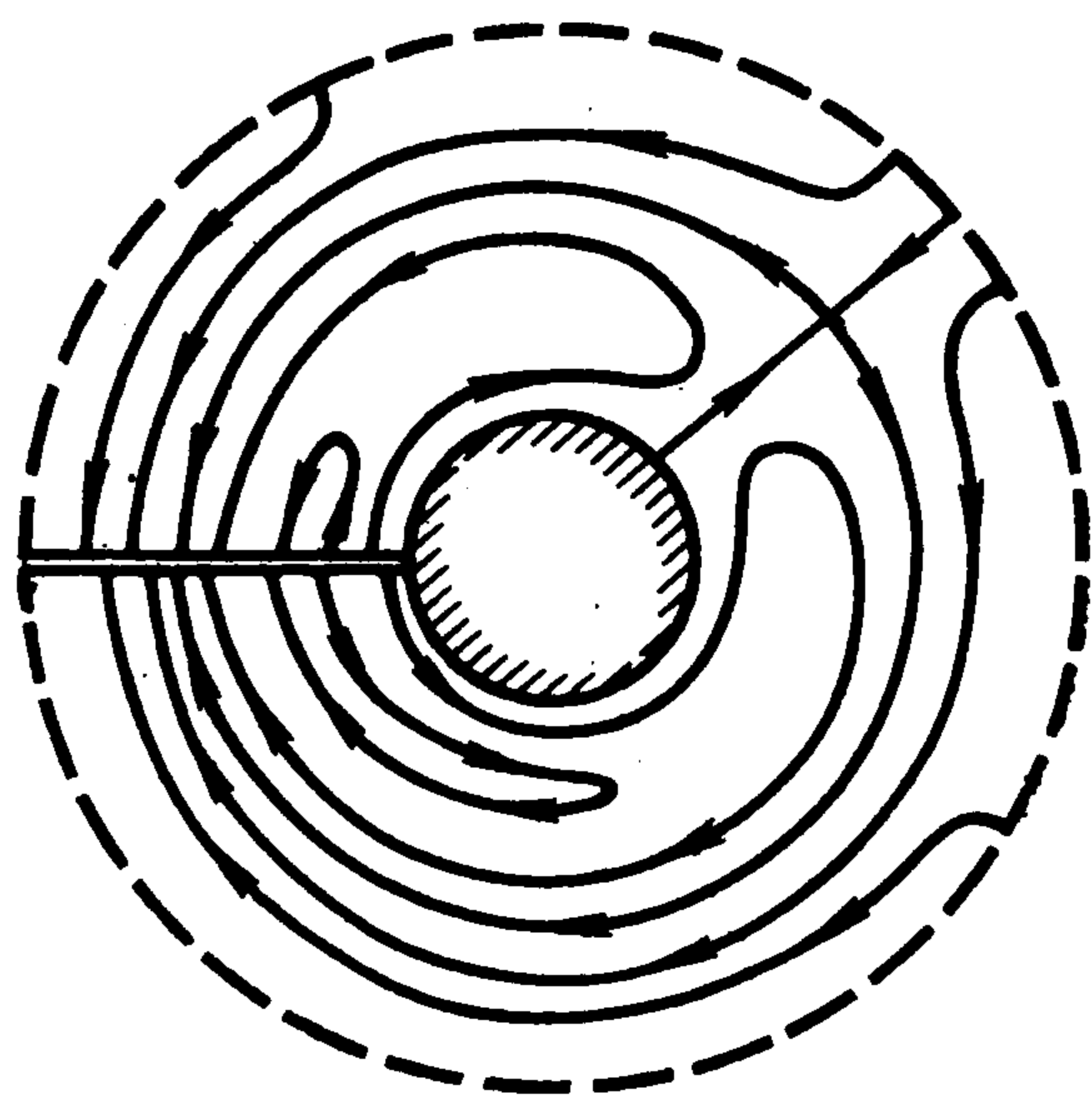
$$p(x, y) = -1/2 C_1 R^{-1} \rho x^2 + C_2 R^{-1} \rho x + R^{-1} \rho S' - 1/2 \rho S^2 + C_8$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $C_1, C_2$  — постоянные из (1.5). Если  $C_1 \neq 0$ , то заменой  $z = x - x_0$  можно добиться, чтобы  $C_2 = 0$  [3].

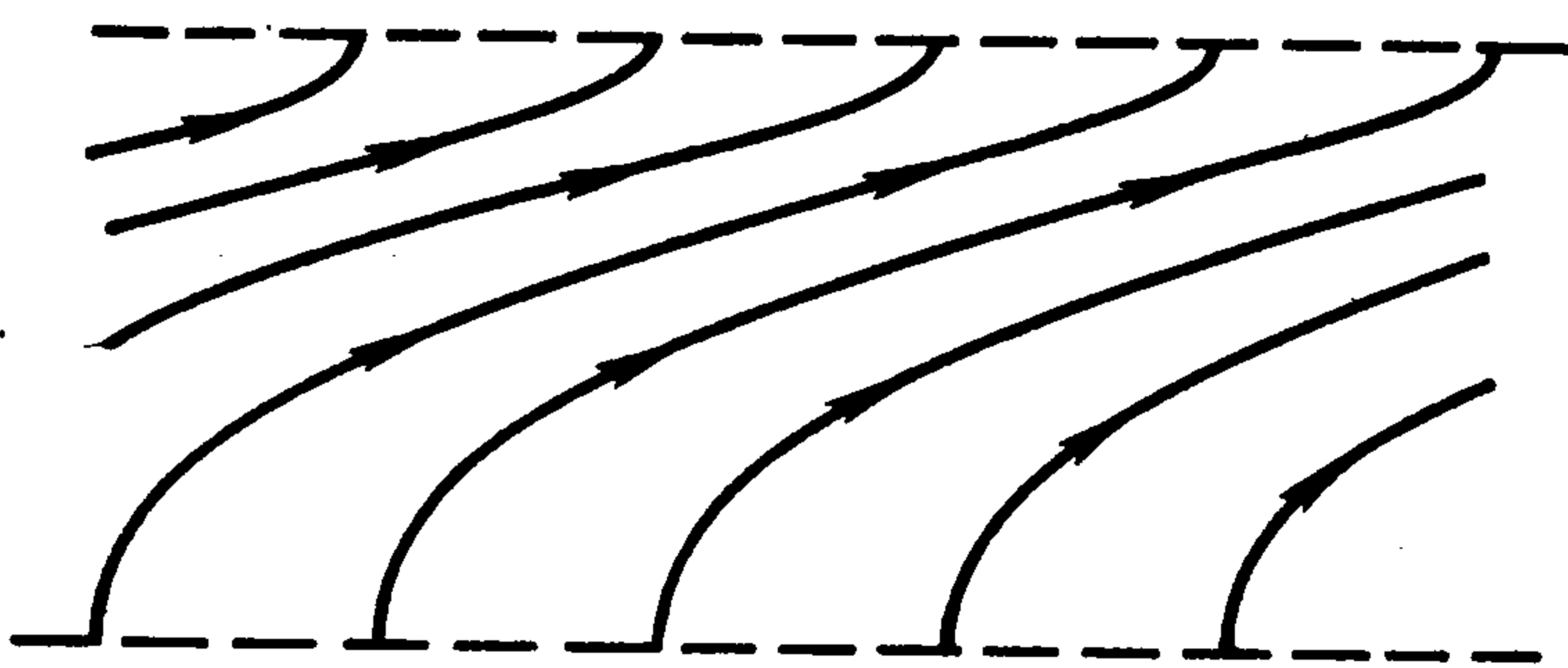
В классе течений (1.2) при  $C_2 = 0$  изучалась [3, 4] задача о течениях между пористыми стенками  $y = \pm h$  с условием вдува или отсоса со скоростями  $V_{\pm}$  (на стенке  $y = -h$  при  $V_- > 0$  — вдув, при  $V_- < 0$  — отсос, при  $V_- = 0$  — условие прилипания). При  $V_+ = V_- \equiv V$  были най-



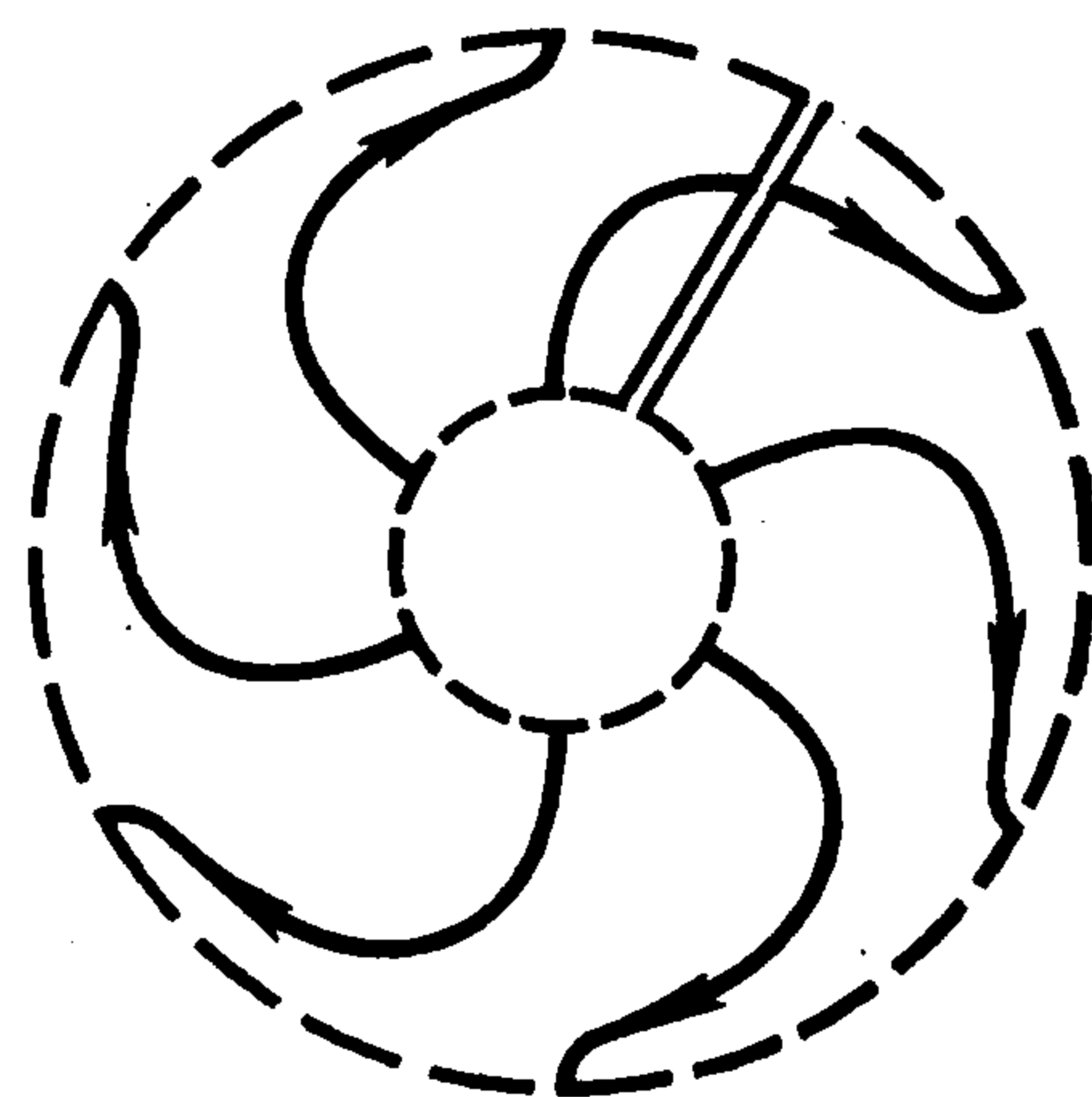
Фиг. 1



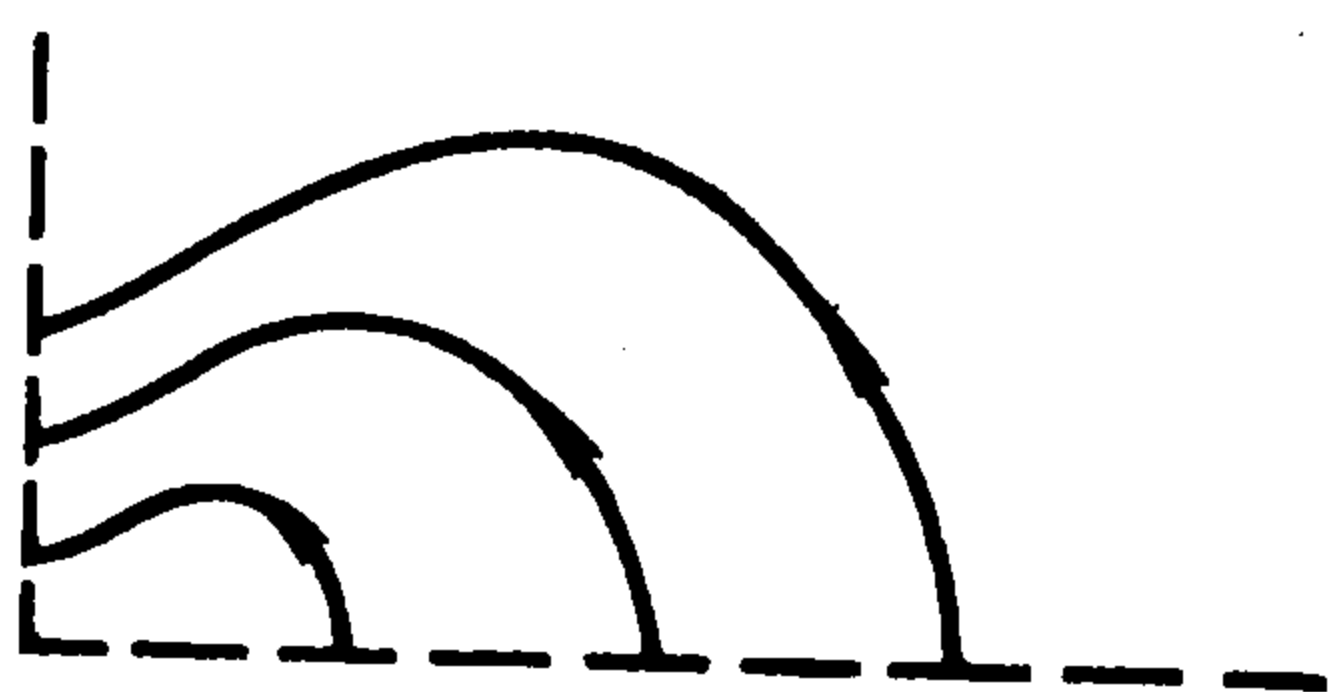
Фиг. 4



Фиг. 2



Фиг. 5



Фиг. 3

дены [3, 4] лишь решения  $S \equiv V$ ,  $T \equiv 0$ . Дополним эти результаты более полным анализом течений при  $V_- = V_+$ . Кроме того, считается, что стенка  $y = h$  движется с горизонтальной скоростью  $U$ . Краевые условия для системы уравнений (1.4) имеют вид

$$S(\pm h) = V_{\pm}, \quad S'(\pm h) = 0, \quad T(-h) = 0, \quad T(h) = U, \quad \int_{-h}^h T(y) dy = Q \quad (1.6)$$

где интегральное условие — аналог расхода жидкости в сечении  $x = 0$  (это условие заменялось [3, 4] условием  $C_2 = 0$ ).

Линии тока течения при  $U = V_- = 0$ ,  $V_+ < 0$  показаны на фиг. 1. Пористые стенки на фиг. 1—5 изображены штриховыми линиями, а жесткие стенки на фиг. 1, 4 — сплошными линиями с кривой штриховкой. На существование возвратных течений при больших  $R$  указывалось ранее [3].

Рассмотрим случай  $V_+ = V_- \equiv V > 0$ , когда решение задачи (1.4), (1.6) находится в элементарных функциях

$$S(y) \equiv V, \quad T(y) = \tau(y/h), \quad \tau(\xi) = \frac{1}{2}U(1 + \xi) + (Q - Uh) \times \\ \times [\exp(\alpha\xi) - \operatorname{sh}(\alpha)\xi - \operatorname{ch}(\alpha)] \{2h[\alpha^{-1}\operatorname{sh}(\alpha) - \operatorname{ch}(\alpha)]\}^{-1}, \quad \alpha = RVh$$

Давление при этом имеет вид

$$p(x, y) = -\rho V \{(Q - Uh)[2h^2(\operatorname{cth}(\alpha) - \alpha^{-1})]^{-1} + \frac{1}{2}h^{-1}U\} x + \operatorname{const}$$

Справедливы асимптотические оценки

$$T(y) = \frac{1}{2}h^{-1}(Q - Uh)(1 + \alpha^{-1})(1 + y/h) + \frac{1}{2}U(1 + y/h) + O(\alpha^{-2})$$

$$p(x, y) = -x\rho V \left\{ \frac{1}{2}h^{-2}(Q - Uh)(1 + \alpha^{-1}) + \frac{1}{2}h^{-1}U + O(\alpha^{-2}) \right\} + \\ + \operatorname{const} \quad (1.7)$$

$$y \in [-h, h_1], \quad h_1 = h(1 - 2\alpha^{-1} \ln \alpha), \quad \alpha \gg e$$

Таким образом, в указанной области решение с точностью  $O(\alpha^{-2})$  совпадает с решением уравнений Эйлера и пограничный слой у стенки  $y = -h$  отсутствует. В то же время у стенки  $y = h$  при  $Q \neq Uh$  он имеется. Его условно можно разбить на две подобласти. При  $y \in [h_2, h]$ ,  $h_2 = h(1 - \alpha^{-2})$  справедлива асимптотическая оценка

$$T(y) = \frac{1}{2}h^{-1}(Q - Uh)(2 + \alpha^{-1})\alpha(1 - y/h) + \frac{1}{2}U(1 + y/h) + O(\alpha^{-2}) = U + \alpha(Q/h - U)(1 - y/h) + O(\alpha^{-2})$$

Вторая формула (1.7) справедлива при  $y \in [-h, h]$ ,  $\alpha \gg \epsilon$ . Следовательно, при  $y \in [h_2, h]$  решение задачи (1.4), (1.6) не стремится к решению уравнений Эйлера. В то же время при  $y \in [-h, h_1] \cup [h_2, h]$  линии тока с точностью  $O(\alpha^{-2})$  совпадают с соответствующими параболой. При  $y \in [h_1, h_2]$  имеет место «сращивание» указанных парабол.

Линии тока

$$x(y; C_9) = (Q - Uh)[h\alpha^{-1} \exp(h^{-1}\alpha y) - \frac{1}{2}h^{-1} \operatorname{sh}(\alpha)y^2 - \operatorname{ch}(\alpha)y] \times \times \{2h[\alpha^{-1} \operatorname{sh}(\alpha) - \operatorname{ch}(\alpha)]\}^{-1} + \frac{1}{2}U(y + \frac{1}{2}h^{-1}y^2) + C_9$$

при  $U = 0$  изображены на фиг. 2.

2. О течениях допускающих переход к переменным вихрь — функция тока. Пусть  $\psi_y = u$ ,  $\psi_x = -v$  и справедливо

$$\text{Условие 1. } \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y \neq 0.$$

Рассмотрим функции

$$X(\omega, \psi) \equiv \omega_x(x(\omega, \psi), y(\omega, \psi)), \quad Y(\omega, \psi) \equiv \omega_y(x(\omega, \psi), y(\omega, \psi))$$

Уравнения (1.1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial G_i}{\partial \omega} + \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} f & g \\ -g & f \end{vmatrix} \frac{\partial G_i}{\partial \psi} = \frac{1}{\sigma} F_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

$$\sigma = X^2 + Y^2, \quad g = uX + vY, \quad f = uY - vX$$

$$G_1 = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}, \quad F_1 = \omega \begin{vmatrix} Y \\ -X \end{vmatrix}, \quad F_2 = RgG_2$$

$$\text{Условие 2. } u = u(\omega), \quad v = v(\omega).$$

При выполнении условий 1, 2 имеем  $dG_i/d\omega = \sigma^{-1}F_i$ ,  $i = 1, 2$ , и, следовательно,  $dg/d\omega = \sigma^{-1}Rg^2$ ,  $d\sigma/d\omega = 2Rg$ .

Итак,

$$\sigma = C_1 g^2, \quad C_1 > 0, \quad g = C_1^{-1}R\omega + C_2, \quad X = C_1 C_3 R^{-1}(C_1^{-1}R\omega + C_2) \\ Y = C_3^{-1}C_4 X, \quad C_3^2 + C_4^2 = C_1^{-1}R^2, \quad u = C_4 W + C_5, \quad v = -C_3 W + C_6, \quad (2.2)$$

$$W = C_1 R^{-2}(\omega - C_* \ln |\omega + C_*|), \quad C_* = C_1 C_2 R^{-1}, \quad C_3 C_5 + C_4 C_6 = C_1^{-1}R$$

$$\text{Условие 3. } u = u(ax + by), \quad v = v(ax + by), \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Утверждение 1. При выполнении условий 1, 2 уравнения (1.1) имеют решения такие и только такие, как и при выполнении условий 1, 3, и все эти решения имеют вид (2.2).

$$\text{Условие 4. } \omega = \omega(ax + by), \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Без ограничения общности считаем  $a = 0$ ,  $b = 1$  (поворот осей  $x, y$ ). Пусть справедливы условия 1, 4. Тогда

$$\omega'' = Rv\omega', \quad v = v(y) \neq 0, \quad u_x = -v' \equiv g_*(y), \quad u_y = \omega$$

$$u = \int_0^y \omega(s) ds + f_*(x), \quad f_*'(x) = g_*(y) = C_1, \quad f_* = C_1 x + C_3$$

$$v = -C_1 y + C_2, \quad C_1^2 + C_2^2 \neq 0, \quad y \neq C_1^{-1}C_2$$

$$\omega(y) = C_4 \int_0^y \exp(C_2 R s - 1/2 C_1 s^2) ds + C_5 \quad (2.3)$$

$$u(x, y) = C_3^* + C_1 x + C_5 y + C_4^* (y - C_1^{-1} C_2) \int_0^y w(s) ds + C_1^{-1} C_4 R^{-1} w(y)$$

$$w(y) = \exp[-1/2 C_1 R (y - C_1^{-1} C_2)^2]$$

$$C_4^* = C_4 \exp(1/2 C_1^{-1} C_2^2 R), \quad C_3^* = C_3 - C_1^{-1} C_4 R^{-1}$$

Все остальные решения при выполнении условий 1, 4 получаются из (2.3) поворотом осей  $x, y$ .

Условие 5.  $X = X(\omega), Y = Y(\omega)$ .

Пусть справедливы условия 1, 5. Тогда

$$\sigma > 0, \quad dG_2/d\omega = \sigma^{-1} F_2, \quad g = g(\omega), \quad YdX - XdY = 0 \quad (2.4)$$

$$aX + bY = 0, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a\omega_x + b\omega_y = 0$$

$$\omega = \omega(ay - bx)$$

Из (2.3), (2.4) следует, что справедливо

**Утверждение 2.** При выполнении условий 1, 5 уравнения (1.1) имеют решения такие и только такие, как и при выполнении условий 1, 4 и все эти решения имеют вид (2.3) или могут быть получены из (2.3) поворотом осей  $x, y$ .

**3. О течениях в двугранном угле с пористыми стенками при наличии вдува и отсоса.** Сделаем в (1.1) замену функций и переменных вида

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad \omega = \omega$$

Тогда (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \omega = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = R \left[ u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] \quad (3.2)$$

Ищем решения при наличии условия 1, которое эквивалентно условию:  $g \equiv u_r \partial \omega / \partial r + u_\theta r^{-1} \partial \omega / \partial \theta \neq 0$ . При наличии условия  $g \equiv 0$  все локальные решения найдены в [1].

Пусть выполнено

Условие 6.  $u_\theta = B(r)$

Тогда из (3.1), (3.2) следует, что

$$\frac{4A'(\theta)}{r^4} - \frac{1}{r} \left( r \left( \frac{1}{r} (rB)' \right)' \right) + \frac{A'''}{r^4} = R \left\{ \frac{BA''}{r^3} - \frac{A}{r} \left[ \frac{2A'}{r^3} - \frac{1}{r} (rB)' \right] \right\} \quad (3.3)$$

Возможны два случая.

**Случай 1:**  $A''(\theta) \neq 0$ . Тогда  $u_\theta = C_1/r$ .

$$4A' + A''' + 2RAA' - C_1RA'' = 0, \quad A'' \neq 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) преобразуется к виду

$$4A + A'' + RA^2 - C_1RA' = C_2, \quad A'' \neq 0 \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) при  $C_1 = 0$  — уравнение Джеффри — Гамеля, возникающее при течениях в диффузоре и конфузоре. Подробный анализ уравнения (3.5) при  $C_1 = 0$  имеется в [5], [6]. Дополним результаты из [5], [6], приведя все решения в элементарных функциях при  $C_1 = 0$ ,

Они имеют вид

$$A(\theta) = -C_5^2 \operatorname{tg}^2 [(1/6R)^{1/2} C_5 (\theta + C_4)] - 2R^{-1} - 2/3 C_5^2, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$A(\theta) = C_6^2 \operatorname{ch}^{-2} [(1/6R)^{1/2} C_6 (\theta + C_4)] - 2R^{-1} - 1/3 C_6^2, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

$$A(\theta) = -[6(\theta + C_4)^{-2} + 2]/R, \quad \theta \in [0, 2\pi); \quad C_5 \neq 0, \quad C_6 \neq 0$$

В случае двух последних решений по лучу  $\theta = 0$  имеется разрез в плоскости  $x, y$ . Среди указанных решений имеются удовлетворяющие условиям прилипания на лучах  $\theta = \pm \theta_*$ . Они имеют вид

$$A(\theta) = 2R^{-1} [3\alpha^2 \operatorname{ch}^{-2}(\alpha\theta) - (1 + \alpha^2)], \quad \alpha^2 \in (1/2, \infty)$$

$$|\theta| \leq \theta_*(\alpha), \quad \theta_*(\alpha) = \ln \left[ \left( \frac{3}{\alpha^{-2} + 1} \right)^{1/2} - \left( 2 - \frac{3}{1 + \alpha^2} \right)^{1/2} \right]$$

Условие прилипания выполнено на лучах  $\theta = \pm \theta_*(\alpha)$ . Функция  $\theta_*(\alpha)$  монотонно возрастает от 0 при  $\alpha = 2^{-1/2}$  до  $\ln(3^{1/2} + 2^{1/2})$  при  $\alpha = \infty$ .

Течения при  $C_1 \neq 0$  также представляются интересными. В рамках этих течений рассмотрим задачу о плоском стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя пористыми стенками  $\theta = 0, \theta = 2\beta$ . На стенке  $\theta = 0$  ( $\theta = 2\beta$ ) задано условие вдува (отсоса) со скоростью  $C_1/r \geq 0$ . В сечении  $r = \text{const}$  задан расход жидкости  $Q$ . Краевые условия к (3.4) имеют вид

$$A(0) = A(2\beta) = 0, \quad \rho \int_0^{2\beta} A(\theta) d\theta = Q$$

Случай  $C_1 = 0$  при  $Q > 0$  соответствует течению Джеффри — Гамеля в диффузоре и при  $Q < 0$  — в конфузоре. Линии тока при  $Q < 0, C_1 > 0$  изображены на фиг. 3.

Анализ пограничного слоя у стенки  $\theta = 2\beta$  не является целью настоящей статьи. Отметим, что среди течений, описываемых уравнением (3.4), есть течения, имеющие на некоторых лучах бесконечную радиальную скорость ( $|A(\theta_*)| = \infty$ ). Таким образом, при  $C_1 > 0$  не исключена возможность существования течений с замкнутыми линиями тока.

Итак, в случае 1 течения имеют вид

$$u(\theta) = C_1/r, \quad u_r = A(\theta)/r, \quad p = (2Rr^2)^{-1} \rho [4A(\theta) - C_2 - C_1^2 R] + C_3 \quad (3.6)$$

где  $A, C_1, C_2$  из (3.5).

Случай 2:  $A = C_6\theta + C_1$ . Тогда из (3.3) находим, что  $C_6 = 0$ , и следовательно, при наличии условия 1

$$u_\theta = -[d(d+2)]^{-1} C_2 r^{d+1} - 1/2 C_3 r + C_4 r^{-1}, \quad d = C_1 R \neq -2$$

$$u_\theta = -(dr)^{-1} C_2 \ln r - 1/2 C_3 r + C_4 r^{-1}, \quad d = -2; \quad u_r = C_1 r^{-1} \quad (3.7)$$

$$p = -\frac{C_1^2 \rho}{2r^2} + \rho \int_1^r \frac{u_\theta^2(s)}{s} ds + C_1 C_3 \rho \theta + C_5, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0$$

При  $C_3 \neq 0$  имеется разрез по лучу  $\theta = 0$ .

Утверждение 3. При наличии условий 1, 6 все решения уравнений (1.1) имеют вид (3.6), (3.7).

4. О течениях между пористыми коаксиальными цилиндрами при наличии вдува и отсоса. Пусть выполнено.

Условие 7.  $u_r = u_r(r)$ .

Из (3.1)—(3.3) следует, что

$$u_r = A(r)/r, \quad u_\theta = -A'\theta + B(r)/r, \quad \omega = r^{-1} [(rA')'\theta - B'] \quad (4.1)$$

$$(r(r^{-1}(rA')'))' + R[r^{-1}A'(rA')' - A(r^{-1}(rA')'))] = 0 \quad (4.2)$$

$$(r(r^{-1}B'))' + R[r^{-2}B(rA')' - A(r^{-1}B')] = 0$$

Давление имеет вид

$$p = -\frac{1}{2}\rho [(A')^2 - r^{-1}A(rA')' + R^{-1}r(r^{-1}(rA')'))] \theta^2 + \rho [A'B - AB' + R^{-1}(rB'' - B')] r^{-1}\theta - \rho \int [r^{-2}AA' - r^{-3}(A^2 + B^2) - R^{-1}r^{-2}(rA')'] dr + C_9$$

Если  $A' \neq 0$  или  $B' \neq C_8(1 + RA)r$ , то при  $\theta = \pi$  имеется разрез.

**Утверждение 4.** При выполнении условия 7 все решения уравнений (3.1), (3.2) представляют собой семипараметрическое семейство вида (4.1), где функции  $A, B$  удовлетворяют (4.2).

Течения (4.1) аналогичны течениям (1.2). Отметим, что течения (1.2) — это все течения при наличии условия  $v = v(y)$ .

В квадратурах удастся найти следующее семейство решений уравнений (4.2):

$$B = \int_1^r C_3 t \int_1^t s^c \exp[1/2 C_1 R (\ln s)^2] ds dt + 1/2 C_4 r^2 + C_5$$

$$A = C_1 \ln r + C_2; \quad c = C_2 R - 1$$

Если  $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$  и  $C_3 \neq 0$ , то условие 1 выполнено (решение зависит от  $R$ ).

В классе течений (1.2) рассмотрим задачу о течениях между пористыми коаксиальными цилиндрами  $r = r_\pm$  с условием вдува или отсоса со скоростями  $V_\pm$ ,  $V_+ r_+ \neq V_- r_-$ . При этом на луче  $\theta = \pi$  имеется разрез, на котором при одних  $r$  имеет место сток, а при других  $r$  — источник. Краевые условия для системы уравнений (4.2) имеют вид

$$A(r_\pm) = V_\pm r_\pm, \quad A'(r_\pm) = B(r_\pm) = 0, \quad \int_{r_-}^{r_+} \frac{B(r)}{r} dr = Q \quad (4.3)$$

где интегральное условие — аналог расхода жидкости в сечении  $\theta = 0$ .

Линии тока течения при  $V_- = 0$ ,  $V_+ < 0$ ,  $Q < 0$  изображены на фиг. 4. Двумя близлежащими отрезками прямых на фиг. 4, 5 изображены разрезы. Структура течения на фиг. 4 подобна структуре течения на фиг. 1.

Рассмотрим случай

$$V_+ r_+ = V_- r_- \equiv \gamma \neq 0, \quad \infty > r_+ > r_- > 0 \quad (4.4)$$

Тогда краевые условия к (4.2) имеют вид (4.3), (4.4). При  $\gamma = 0$  имеем известное течение Куэтта. Решение задачи (4.2)—(4.4) находится в элементарных функциях:

$$A(r) \equiv \gamma, \quad B(r) = Q \delta^{-1}(\alpha) \left[ \chi(r, \alpha) - \frac{\chi(r_+) - \chi(r_-)}{r_+^2 - r_-^2} r^2 - \frac{\chi(r_+) r_+^{-2} - \chi(r_-) r_-^{-2}}{r_+^{-2} - r_-^{-2}} \right]$$

$$\alpha = R\gamma \neq 0, \quad \chi(r, \alpha) = r^m, \quad \alpha \neq -2, \quad \chi(r, -2) = \ln r$$

$$\delta(\alpha) = 1/2 r_-^m [a^m - 1] v(a^2, 1/2\alpha), \quad \alpha \neq -2, \quad m = \alpha + 2$$

$$v(z, \beta) = [(z - 1)^{-1} - (z^q - 1)^{-1}] \ln z - q^{-1}\beta, \quad q = \beta + 1$$

$$\delta(-2) = \ln a [1/2 (\ln a - 1) + (a^2 - 1)^{-1}], \quad a = r_+/r_-, \quad \chi(r_\pm) = \chi(r_\pm, \alpha)$$

Можно доказать, что  $\delta(\alpha) \neq 0$ , и тогда решение задачи (4.2)—(4.4) существует.

Докажем неравенство  $v(z, \beta) \neq 0$  при  $z > 1$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\beta \neq -1$ .  
 При  $z > 1$  справедливы неравенства  $v(z, 1) < 0$ ,  $v(z, -2) > 0$ .  
 При фиксированном  $\beta$  справедливо соотношение

$$v(z, \beta) = -\frac{1}{12} \beta (z-1)^2 + O((z-1)^3), \quad z \rightarrow 1$$

При фиксированном  $z > 1$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v(z, \beta) &= \beta [z \ln^2(z) (z-1)^{-2} - 1] + O(\beta^2), \quad \beta \rightarrow 0 \\ v(z, \beta) &= \ln(z) (z-1)^{-1} - 1 + \beta^{-1} + O(\beta^{-2}), \quad \beta \rightarrow +\infty \\ v(z, \beta) &= (z-1)^{-1} z \ln(z) - 1 + \beta^{-1} + O(\beta^{-2}), \quad \beta \rightarrow -\infty \\ v(z, \beta) &< 0, \quad \beta \geq [(z-1) \ln^{-1}(z) - 1]^{-1} \end{aligned}$$

Теперь для доказательства неравенства  $\delta(\alpha) \neq 0$  достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \partial v / \partial \beta &= \eta^{-2} [\ln^2(z^\eta) (z^\eta - z^{-\eta})^{-2} - 1/4] < 0, \quad \eta \neq 0, \quad z > 1, \quad \eta = 1/2 (\beta + 1) \\ \delta(-2) &\geq 1/2 \ln a [1/2 \ln(3 + 8^{1/2}) - (1 + 2^{-1/2})^{-1}] > 0,1478 \ln a \end{aligned}$$

Итак, решение существует при любых  $R, \gamma, r_+, r_-$ .

Давление в соответствии с (3.7) имеет вид

$$p(r, \theta) = -\frac{\rho \gamma^2}{2r^2} + \rho \int_{r_-}^r \frac{B^2(s)}{s^3} ds + 2\rho \gamma Q \frac{\chi(r_+) - \chi(r_-)}{\delta(\alpha)(r_+^2 - r_-^2)} \theta + C_5$$

При  $\gamma Q \neq 0$  на луче  $\theta = \pi$  имеется разрез.

При  $r \in [r_-, r_*]$ ,  $r_* = r_+ \alpha^{-2/\alpha}$ ,  $\alpha = R\gamma > 0$  справедливы оценки

$$B(r) = b(r) + O(\alpha^{-2}), \quad b(r) = 1/2 Q a_* r_+^{\alpha+2} [2a_* \ln(a) - 1 + 2/\alpha] (1 - r_-^{-2} r^2)$$

$$p(r, \alpha) = -\frac{\rho \gamma^2}{2r^2} + \rho \int_{r_-}^r \frac{b^2(s)}{s^3} ds - \rho \gamma b'' \theta + C_5 + O(\alpha^{-2}),$$

$$\alpha \rightarrow +\infty, \quad a_* = (a^2 - 1)^{-1}$$

Итак, в этой области при  $\gamma > 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  решение с точностью  $O(\alpha^{-2})$  совпадает с соответствующим решением уравнений Эйлера. При  $[r_*, r_+]$  имеет место пограничный слой. Его структура не анализируется в виду отсутствия места. Аналогично, при  $\gamma < 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  пограничный слой возникает лишь у стенки, где имеется отсос, при  $r \in [r_-, r_- |\alpha|^{-2/\alpha}]$ . Вне этой области решение с точностью  $O(\alpha^{-2})$  совпадает с решением уравнений Эйлера.

На фиг. 5 изображены линии тока при  $Q < 0$ ,  $\gamma > 0$ .

**5. Первый класс нестационарных течений.** Уравнения, описывающие плоские нестационарные течения несжимаемой вязкой жидкости имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = \omega, \quad R[\omega_t + u\omega_x + v\omega_y] = \Delta \omega \quad (5.1)$$

Уравнения (5.1) допускают решения в виде

$$v = S(y, t), \quad u = A(y, t)x + T(y, t), \quad \omega = B(y, t)x + \Omega(y, t)$$

Функции  $S, A, T, B, \Omega$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} A &= -S_y, \quad B = A_y, \quad \Omega = T_y \\ S_{yyy} + R[-S_{yt} - SS_{yy} + (S_y)^2] &= g(t), \quad T_{yy} - R[T_t - S_y T + ST_y] = \xi(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $g(t), \xi(t)$  — произвольные функции.

Давление в данном случае имеет вид

$$p(x, y, t) = -\frac{\rho g(t) x^2}{2R} + \frac{\rho \xi(t) x}{R} + \frac{\rho S_y}{R} - \frac{\rho S^2}{2} - \int_0^y S_t(s, t) ds + \mu(t)$$

В квадратурах удалось найти следующие семейства нестационарных решений уравнений (5.2).

*Первое семейство*

$$S = ay + b, \quad \{a, b\} = \text{const}, \quad a \neq 0, \quad T = \int_{y_0(t)}^y \eta(s, t) ds$$

$$\eta = \exp(nat) L_n(ay + b, C_1, C_2), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$L_{-n}(\xi, C_1, C_2) = M_+(\xi) N_n^+, \quad n = 1, 2, \dots; \quad L_{n+1}(\xi, C_1, C_2) = N_n^-, \\ n = 0, 1, \dots$$

$$N_n^\pm = \frac{d^n}{d\xi^n} \left[ M_\mp(\xi) \left( C_1 + C_2 \int_0^\xi M_\pm(s) ds \right) \right], \quad M_\pm(\xi) = \exp\left(\pm \frac{R\xi^2}{2a}\right)$$

$L_{-n}(\xi, (-1)^n, 0)$  — полином Чебышева — Эрмита. Первое семейство решений получено на основе известных результатов ([7], с. 377, 378) и с использованием метода Зборника ([7], с. 568—570) (в [7] имеются не все указанные решения).

*Второе семейство.* Если  $S = a(t)y + b(t)$ , тогда функция  $\eta = Ty$  удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\eta_t = R^{-1}\eta_{yy} - [a(t)y + b(t)]\eta_y \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) допускает решения в виде

$$\eta = \exp(\delta(t)y^2 + \beta(t)y) \sum_{k=0}^n \alpha_k(t) y^k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.4)$$

В этом случае приходим к нелинейной системе  $(n+3)$  обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $(n+3)$  коэффициентов  $\delta, \beta, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . В квадратурах удалось найти решения этой системы в случае  $\delta = \beta \equiv 0$  и в случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \equiv 0$ . Отметим, что среди решений (5.4) имеются обращающиеся в бесконечность за конечное время.

*Третье семейство.* Если  $S = b(t)$ , то замена переменных

$$\tau = t, \quad \xi = R^{1/2}y - R^{1/2} \int_0^t B(s) ds$$

приводит (5.3) к уравнению теплопроводности  $\eta_\tau = \eta_{\xi\xi}$ .

*Четвертое семейство.* Если  $S = -6/(Ry)$ , то второе из уравнений (5.2) заменой функции и одной из переменных

$$U(s, t) = s^3 T(R^{-1/2}s, t), \quad s = R^{1/2}y$$

преобразуется к неоднородному уравнению теплопроводности

$$U_t - U_{ss} = -R^{-1}s^3\xi(t)$$

Другие нестационарные решения могут быть получены поворотом осей  $x, y$ .

**6. Второй класс нестационарных течений.** Та же, что и в разд. 3 замена функций и переменных, приводит уравнения (5.1) к уравнениям (3.1) и уравнению

$$-R \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = R \left[ u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] \quad (6.1)$$

Уравнения (3.1), (6.1) допускают решения в виде

$$u_r = \frac{A(t, r)}{r}, \quad u_\theta = -\theta \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{B(t, r)}{r}, \quad \omega = \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r}, \\ \theta \in [0, 2\pi)$$

Функции  $A, B$  удовлетворяют системе уравнений

$$-\frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right) \right) +$$

$$+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - A \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right) \right] = 0 \quad (6.2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \right) + \left[ \frac{B}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (6.3)$$

Давление в данном случае имеет вид

$$p(t, r, \theta) = -\frac{\rho}{2} \left[ -r \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial r} + \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 - \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \right.$$

$$+ \left. \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right) \right] \theta^2 + \left[ -r \frac{\partial B}{\partial t} + B \frac{\partial A}{\partial r} - A \frac{\partial B}{\partial r} + \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{R} \left( r \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{\partial B}{\partial r} \right) \right] \frac{\rho \theta}{r} - \rho \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A}{r^2} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A^2 + B^2}{r^3} - \right.$$

$$\left. - (Rr^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) \right] dr + \Phi(t), \quad \rho = \text{const} > 0$$

где  $\Phi(t)$  — произвольная функция.

Частными решениями уравнения (6.2) являются функции  $A = D(t) \ln r + E(t)$ . В этом случае (6.3) преобразуется к уравнению теплопроводности

$$U_t - R^{-1} U_{rr} + [R^{-1} + E(t) + D(t) \ln r] (r^{-1} U_r - r^2 U) = 0, \quad U = B_r \quad (6.4)$$

Таким образом, при  $D \equiv 0, E \equiv -1/R$  все ограниченные решения уравнения (6.4) находятся методом интегрального преобразования Фурье. Приведем одно из таких решений

$$u_r = -(Rr)^{-1}, \quad u_\theta = \exp(-R^{-1}\pi^2 t) (\pi r)^{-1} \sin(\pi r)$$

$$\omega = -\exp(-R^{-1}\pi^2 t) r^{-1} \cos(\pi r)$$

$$p(r, t) = -\rho (2R^2 r^2)^{-1} + \rho \pi^{-2} \exp(-R^{-1}\pi^2 t) \int_1^r s^{-3} \sin^2(\pi s) ds + \Phi(t)$$

Оно является решением задачи о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя пористыми цилиндрами  $r_1 = 1, r_2 = n$  при наличии вдува и отсоса, где  $n = 2, 3, \dots$

Автор благодарит Ю. Д. Шмыглевского за внимание к работе и О. В. Трошкина за обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. О течениях вязкой жидкости, не зависящих от числа Рейнольдса // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30. № 6. С. 951—955.
2. Batchelor G. K. An introduction to fluid dynamics, Cambridge: Univ. Press, 1967. 615 p.
3. Proudman I. An example of steady laminar flow at large Reynolds number // J. Fluid. Mech. 1960. V. 9. Pt 4. P. 593—602.
4. Terrill R. M. Laminar flow in a uniformly porous channel with large injection // Aeronaut. Quart. 1965. V. 16. Pt 4. P. 323—332.
5. Пухначев В. В. Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1979. 74 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.