

УДК 533.7

© 1991 г.

В. В. Струминский

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Рассматриваются возможности метода Чепмена — Энскога и автора для решения системы кинетических уравнений газовой смеси. Показано, что при исходных допущениях одного порядка предложенный метод дает значительно более полную информацию о системе.

Методы решения системы кинетических уравнений газовой смеси имеют большое научное и практическое значение. Первые приближенные решения были получены еще самим Больцманом. В начале нашего века для решения кинетического уравнения Больцмана был разработан асимптотический метод Чепмена—Энскога. Затем этот метод был применен к решению системы кинетических уравнений для газовых смесей, причем было сделано серьезное допущение о том, что в нулевом приближении вклад всех интегралов соударений в изменение функций распределения отдельных компонент газа равен нулю. Последнее применимо в крайне ограниченных случаях и лишь для газа, находящегося в состоянии, близком к состоянию термодинамического равновесия. Принятые допущения привели к значительному снижению информации о поведении динамической системы и, в частности, о движении отдельных компонент газовых смесей.

В связи с этим в начале 70-х годов автором был предложен новый, более общий асимптотический метод решения системы кинетических уравнений газовой смеси, который может позволить определить законы движения отдельных компонент газовой смеси для системы, находящейся в состоянии, довольно далеко от состояния равновесия, а затем определить среднемассовые параметры такой системы в целом. При разработке этого метода были также сделаны серьезные допущения о вкладе, вносимом различными интегралами соударений в изменение функций распределения.

В настоящей работе будут рассмотрены оба указанных метода и исходные допущения, лежащие в их основе; будет показано, что эти допущения одного порядка, хотя в методе автора получается более полная информация о поведении всей системы. Вопрос о целесообразном применении того или другого метода также будет рассмотрен.

Система кинетических уравнений газовой смеси в безразмерных переменных может быть записана в виде

$$\frac{d\bar{f}_s}{dt} = \sum_{\tau=1}^M \frac{1}{\varepsilon_{s\tau}} \iiint (\bar{f}_s^{(1)} \bar{f}_\tau^{(1)} - \bar{f}_s \bar{f}_\tau) q_{s\tau} b db d\varepsilon dV_\tau = \sum_{\tau=1}^M \frac{1}{\varepsilon_{s\tau}} J(\bar{f}_s \bar{f}_\tau) \quad (1)$$

где $\varepsilon_{s\tau}$ — совокупность малых параметров, определяющих частоту столкновений молекул, \bar{f}_s — безразмерные функции времени, координат и параметров системы, n_s — числа частиц в единице объема, m_s — массы молекул, T_s — температуры и U_s — средние скорости, характеризующие данную компоненту.

Параметры $\varepsilon_{s\tau} \ll 1$, появившиеся в уравнении (1) и удовлетворяющие приближенному равенству $\varepsilon_{s\tau} = l/\lambda_{s\tau}$, являются чисто оценочными. Истинный вклад интегралов соударения в изменение $d\bar{f}_s/dt$ определяется самими функциями распределения и законами взаимодействия молекул.

Согласно методу Чепмена — Энскога [1], допустимое состояние газовой смеси таково, что все $\varepsilon_{s\tau}$ примерно равны малому параметру ε . В этом случае из уравнения (1) получим

$$\varepsilon \frac{d\bar{f}_s}{dt} = \sum_{\tau=1}^M J(\bar{f}_s \bar{f}_\tau) \quad (2)$$

Полагая, как обычно,

$$\bar{f}_s = \bar{f}_s^{(0)} + \varepsilon \bar{f}_s^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{f}_s^{(2)} + \dots \quad (3)$$

найдем

$$\sum_{\tau=1}^M J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(0)}) = 0, \quad \frac{d\bar{f}_s^{(0)}}{dt} = \sum_{\tau=1}^M J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(1)}) + J(\bar{f}_s^{(1)} \bar{f}_\tau^{(0)}) \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{f}_s^{(1)}}{dt} = \sum_{\tau=1}^M J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(2)}) + J(\bar{f}_\tau^{(0)} \bar{f}_s^{(2)}) + J(\bar{f}_s^{(1)} \bar{f}_\tau^{(1)}), \dots$$

В нулевом приближении все $\bar{f}_s^{(0)}$ являются локально-максвелловскими функциями, определяемыми среднemasсовыми параметрами потока U_0 , T_0 , n_s , m_s , и вклад интегралов соударений в изменение $d\bar{f}_s^{(0)}/dt$ равен нулю. Из условий разрешимости неоднородных интегральных уравнений получим соответственно системы уравнений Навье — Стокса, Барнета и т. п. для определения среднemasсовых параметров потока. В первом приближении в системах уравнений Навье — Стокса получаютcя вполне определенные значения коэффициента вязкости и теплопроводности. Конечно, при принятых в методе допущениях эти значения коэффициентов не могут быть вполне точными, но могут быть уточнены в следующих приближениях.

По предложению автора было вычислено [2] следующее приближение. Было показано, что наряду с чисто барнеттовскими (нелинейными) членами в этом приближении появляются линейные по градиентам параметров потока члены, вносящие поправки в коэффициенты переноса. Величина этих поправок будет определяться состоянием газовой системы. Чем точнее в системе выполняются принятые в методе допущения, тем ближе она будет находиться к состоянию равновесия, тем меньше потребуются высших приближений и тем меньше будет величина поправок.

Как видно, метод Чепмена — Энскога определяет только среднemasсовые параметры потока, находящиеся в состоянии, близком к равновесию. Он совершенно не позволяет ничего сказать о законе движения отдельных компонентов газовой смеси.

В методе автора [3] принимается, что состояние газовой смеси достаточно сильно отклоняется от состояния равновесия и таково, что можно допустить, что при $\tau = s$ величина $\varepsilon_{s\tau}$ равна малому параметру ε , а для всех остальных $\varepsilon_{s\tau} \ll 1$. В этом случае система (1) может быть записана, в частности, в виде

$$\varepsilon \left(\frac{d\bar{f}_s}{dt} - \sum_{\tau \neq s}^M J(\bar{f}_s \bar{f}_\tau) \right) = J(\bar{f}_s \bar{f}_s) \quad (5)$$

После принятия основных допущений как в методе Чепмена — Энскога, так и в методе автора из системы (1) получается система (5), которой уже вполне достаточно (на что автор неоднократно указывал [4]) для получения всей дальнейшей информации о газодинамическом поведении системы.

Из (3) и (5) получим также рекуррентную систему уравнений

$$J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_s^{(0)}) = 0, \quad \left(\frac{d\bar{f}_s^{(0)}}{dt} - \sum_{\tau \neq s}^M J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(0)}) \right) = 2J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_s^{(1)}) \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{f}_s^{(1)}}{dt} - \sum_{\tau \neq s}^M (J(\bar{f}_s^{(1)} \bar{f}_\tau^{(0)}) + J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(1)})) = 2J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_\tau^{(2)}) + J(\bar{f}_s^{(0)} \bar{f}_s^{(1)}) + \dots, \dots$$

В нулевом приближении функция $f_s^{(0)}$ также будет локально-максвелловской, но теперь она определяется параметрами U_s , T_s и n_s , характеризующими данную компоненту газа. Из первого неоднородного уравнения системы уравнений (6) получим следующие газодинамические системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_s^\alpha}{\partial t} + U_s^\beta \frac{\partial U_s^\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \vec{P}_s^{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial r_\alpha} &= \frac{16}{3\rho_s} \sum_{\tau \neq s}^M \frac{\rho_s \rho_\tau \Omega_{s\tau}^{(1,1)}}{m_\tau + m_s} (U_\tau^\alpha - U_s^\alpha) \\ \frac{3}{2} n_s k \left(\frac{\partial T_s}{\partial t} + U_s^\alpha \frac{\partial T_s}{\partial r_\alpha} \right) + P_s \frac{\partial U_s^\alpha}{\partial r_\alpha} + \vec{P}_s^{\alpha\beta} \frac{\partial U_s^\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \vec{q}_s^\alpha}{\partial r_\alpha} &= \\ &= 16k \sum_{\tau \neq s}^M \frac{\rho_s \rho_\tau \Omega_{s\tau}^{(1,1)}}{(m_\tau + m_s)^2} ((T_\tau - T_s) + \omega_s (U_\tau - U_s)^2) \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial U_s^\alpha \rho_s}{\partial r_\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_s и $\Omega_{s\tau}$ — известные выражения и интегралы.

Эта обобщенная система уравнений Навье — Стокса подчеркивает еще раз, что структура классической системы уравнений Навье — Стокса однозначно определяется принятым при выводе выражения (2) допущением. Точно так же структура обобщенной системы уравнений Навье — Стокса (7) однозначно определяется допущениями, сделанными при выводе выражения (5). В обоих случаях при переходе от одной газовой системы к другой, близкой к исходной, могут меняться только коэффициенты переноса. При этом следует иметь в виду следующее: чем лучше газовая система удовлетворяет исходным допущениям, тем точнее коэффициенты переноса в первом приближении будут соответствовать действительности. Необходимость прибегать к высшим приближениям будет излишней, хотя всегда представляется возможность уточнить коэффициент переноса с использованием высших приближений.

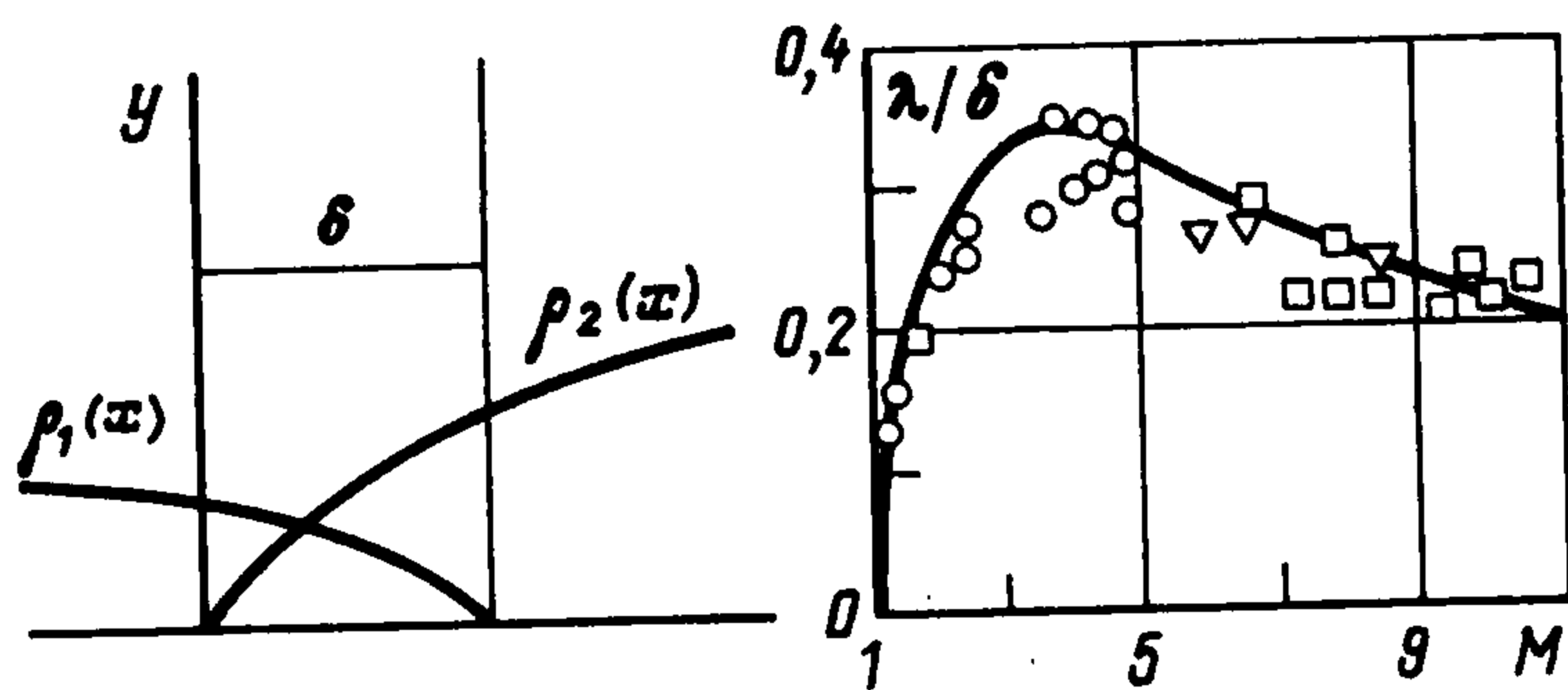
Для метода Чепмена — Энскога такая возможность доказана в работе [2]. Для метода автора также было показано [5], что высшие приближения содержат слагаемые, линейные по градиентам параметров потока, и были приближенно определены их величины.

Таким образом, кинетические уравнения для газовой смеси намного сложнее, чем для однокомпонентного газа. В газовой смеси существует огромное множество совершенно различных состояний.

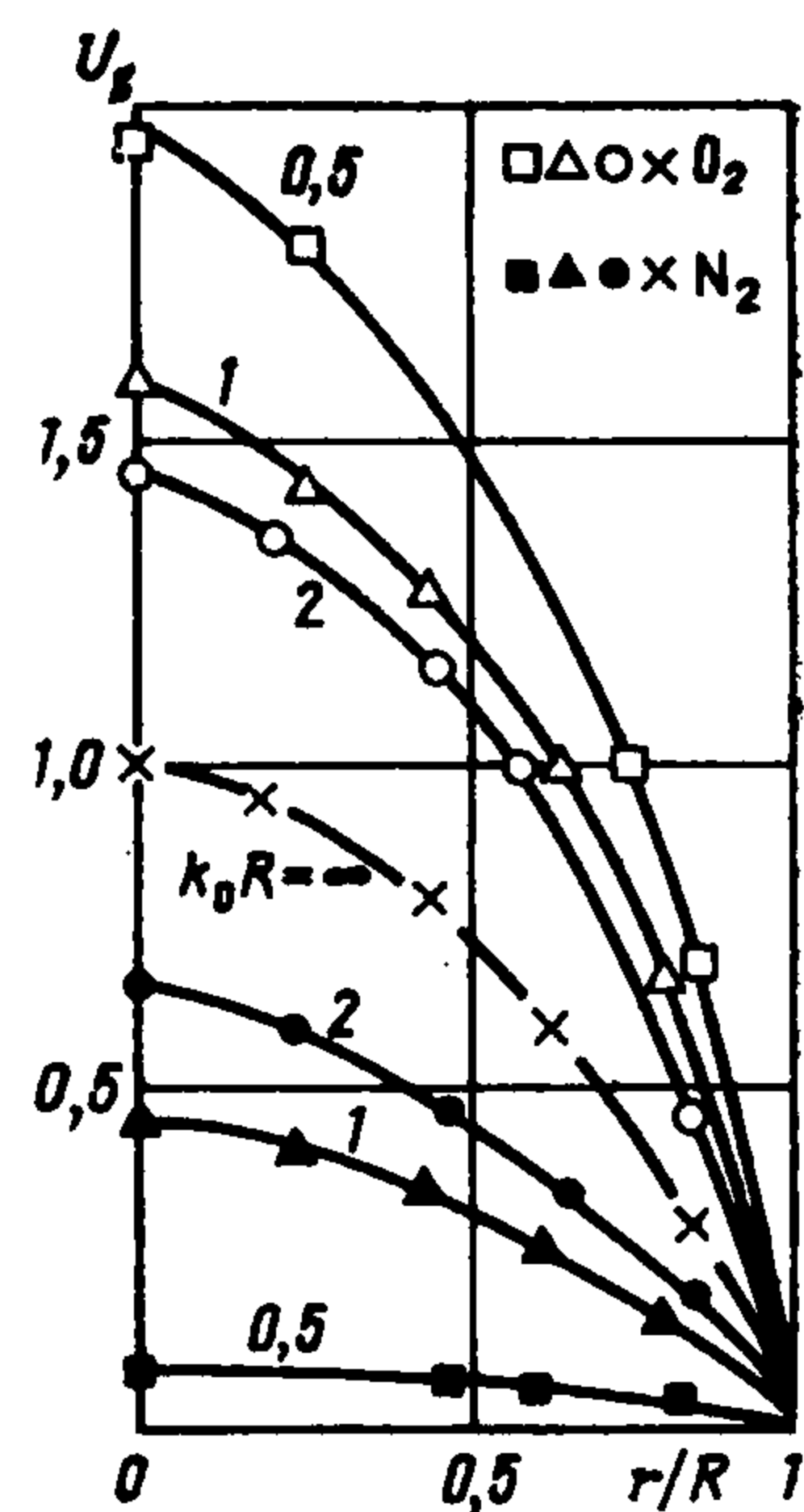
Методом Чепмена — Энскога в первом приближении может быть описано сравнительно небольшое число состояний газовых смесей, близких к состоянию термодинамического равновесия. Во втором приближении структура газодинамических уравнений Навье — Стокса остается неизменной, если не учитывать барнеттовские члены, и можно будет уточнить коэффициент переноса. К сожалению, этим методом не могут быть определены законы движения компонентов газовой смеси.

Методом автора в первом приближении может быть описано большое число газовых смесей, не находящихся в состоянии термодинамического равновесия. Обобщенная автором система уравнений Навье — Стокса не изменится и во втором, и в последующих приближениях, если не учитывать квадратичные барнеттовские члены. В последующих приближениях могут быть уточнены только коэффициенты переноса.

Рассмотрим ряд конкретных примеров, иллюстрирующих возможности метода автора.



Фиг. 1



Фиг. 2

Применим новый метод для описания структуры сильных ударных волн. Прежде всего отметим, что был выполнен ряд работ по построению теории ударных волн с использованием уравнений Навье — Стокса, причем сходимость с экспериментом была только для малых чисел Маха. Начиная с работ Мот-Смита, в теории использовалось исходное кинетическое уравнение с дополнительными предположениями и эмпирическими данными. Но и это не позволило существенно продвинуться в область больших скоростей. В ряде работ автором было предпринято дальнейшее обобщение кинетической теории.

При отказе от предположения о симметрии функции распределения [6, 7] для описания отдельных групп молекул была получена система кинетических уравнений, подобная системе уравнений для газовых смесей. К этой системе был применен изложенный выше метод автора, и при учете только диффузионных членов без учета вязкости и теплопроводности газа (нулевое приближение) удалось получить решение в аналитическом виде.

Сравнение теории с экспериментом приведено на фиг. 1. Толщина ударной волны по Прандтлю определяется выражением $\delta = (\rho_+ - \rho_-) / ((dp/dx)_{\max})$, M — число Маха. Используются наиболее достоверные эксперименты для аргона при температуре 300°C .

В качестве второго примера рассмотрим течение бинарной газовой смеси в тонких каналах и капиллярах. Исходя из уравнений (7), получим систему двух взаимно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{d}{\mu} (U_1 - U_2) = \frac{1}{\mu_1} \frac{dp_1}{dx}, \quad \frac{d^2 U_2}{dx^2} + \frac{d}{\mu} (U_2 - U_1) = \frac{1}{\mu_2} \frac{dp_2}{dx} \quad (8)$$

Здесь

$$k^2 = d \left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right), \quad \omega_s^2 = \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)$$

Точное решение будет иметь вид

$$U_s = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2}{k_0^2} \left(\frac{\text{ch } ky}{\text{ch } kh} - 1 \right) \quad (9)$$

и показывает, что эффект существенно определяется интенсивностью взаимодействия компонентов газа, характеризующейся параметром $k_0 R$ (фиг. 2). При слабом взаимодействии, когда величина этого параметра невелика ($k_0 R = 0,5; 1; 2$), компоненты бинарной смеси ведут себя как

независимые. Любопытно отметить, что при сильном взаимодействии ($k_0 R = \infty$) течение вновь приобретает вид пуазейлевского с суммарной вязкостью компонент и суммарным градиентом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 929 с.
2. Шавалиев М. Ш. Барнеттовское приближение и функции распределения и супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 656—660.
3. Струминский В. В. Влияние диффузионной скорости на течение газовых смесей // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 203—210.
4. Струминский В. В. О методах решения систем кинетических уравнений газовой смеси // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 3. С. 533—536.
5. Струминский В. В., Турков В. Е. О высших приближениях асимптотического метода решения системы кинетических уравнений Больцмана // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 3. С. 574—578.
6. Струминский В. В. К теории систем одинаковых частиц // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 6. С. 1345—1349.
7. Струминский В. В. Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985. 240 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1990