

УДК 532.5.011 : 536.24

© 1991 г.

Г. Г. Черный

ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ В ТВЕРДОЙ ПЛАВЯЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассматривается задача о движении полубесконечной плоской нагретой пластины сквозь твердую среду с образованием слоя расплава у поверхности пластины. Решение о течении расплава получено в приближении теории тонкого слоя с учетом инерционных членов в уравнении движения и диссипативного слагаемого в уравнении теплопроводности. Описана процедура нахождения точного автомодельного решения задачи и развит асимптотический метод, позволяющий приближенно представить результаты решения в виде простых формул. Для пластины конечной длины получены простые оценочные выражения для длины жидкой полости за пластиной.

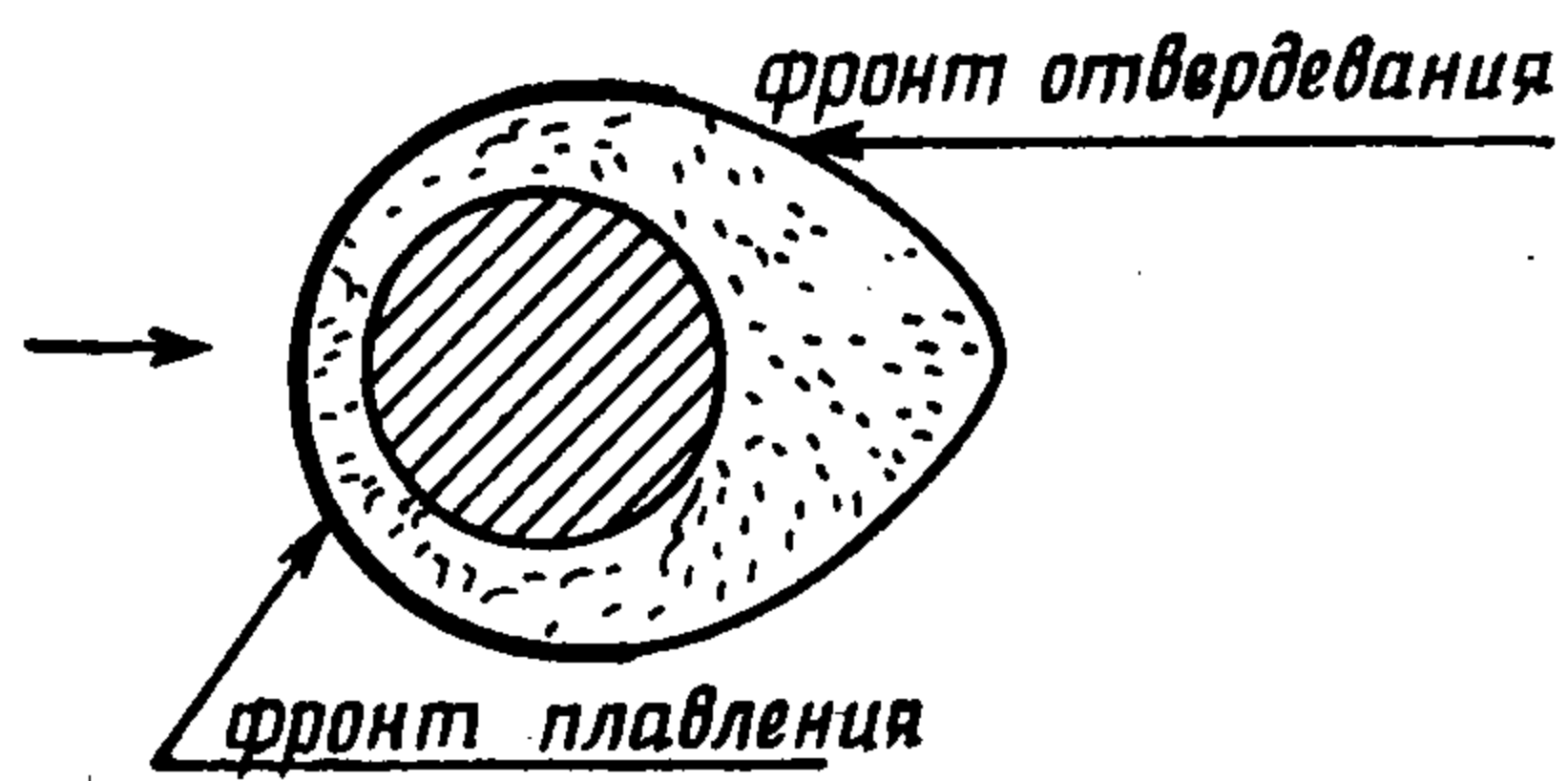
Твердое тело, полностью или частично погруженное в твердую же среду, может двигаться в ней под влиянием приложенных к нему внешних сил или по инерции, если температура тела превышает температуру перехода твердой среды в жидкое или газообразное состояние и тело перемещается вместе с образующейся вблизи него полостью с жидкостью или газом. На переднем фронте полости твердая среда плавится (испаряется), на заднем — вновь переходит в твердое состояние. Полость может иметь свободную границу или простирается в среде за телом в бесконечность. Примеры движений описанного типа изображены на фиг. 1 и 2.

Так как внутри полости жидкость или газ находятся в движении, то источником тепла, необходимого для плавления или испарения среды, будет служить не только нагретое тело, но и жидкость, в которой тепло генерируется при вязкой диссипации части механической энергии, сообщаемой телом жидкости (или газу). При некоторых условиях движения тела (большая скорость тела относительно твердой среды, малая толщина жидкого или газообразного слоя) количество выделяющегося при вязкой диссипации тепла может стать равным или даже превзойти величину, затрачиваемую на плавление или испарение среды. В таких условиях суммарный тепловой поток, идущий от тела, может стать нулевым или даже отрицательным; тепло, генерируемое в полости, передается в этом случае и твердой среде, и движущемуся телу.

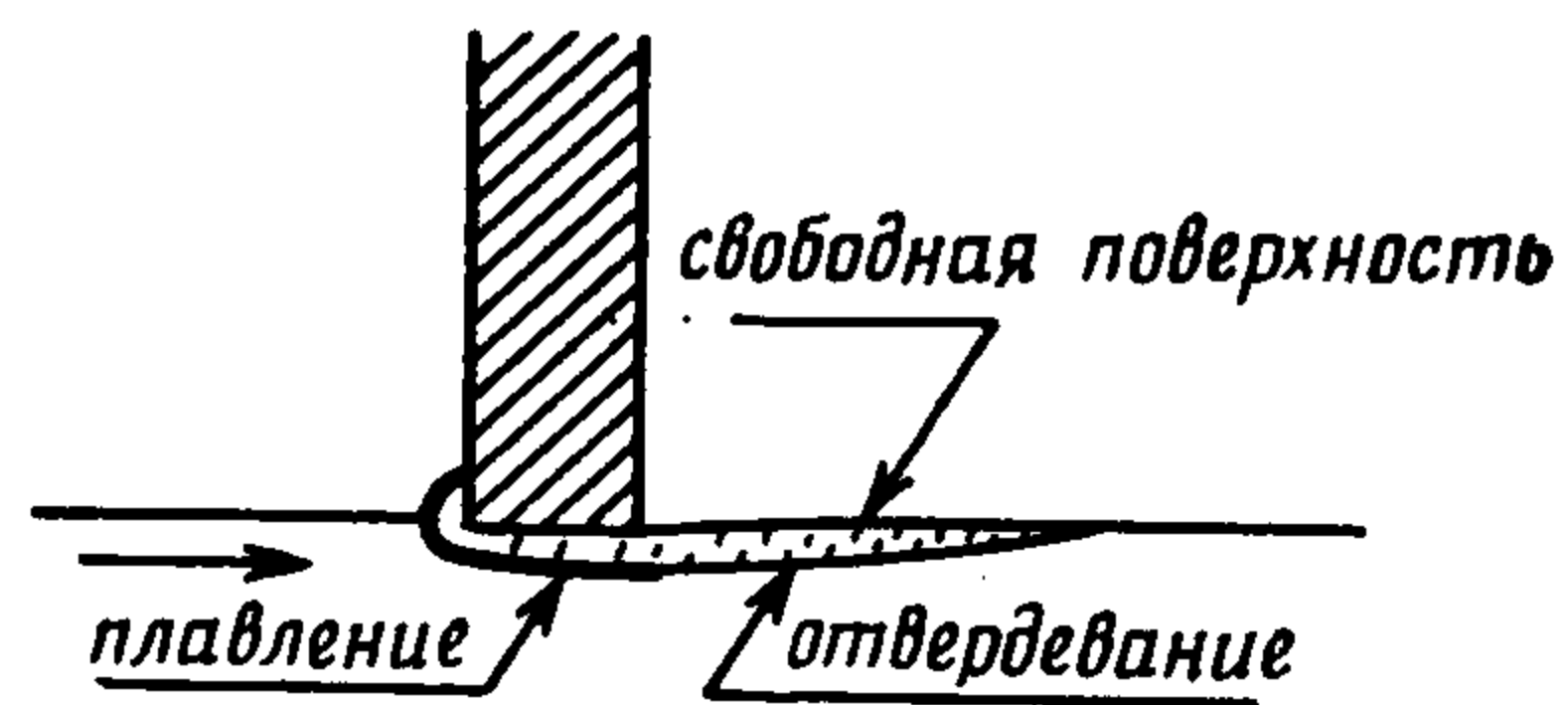
Ранее в ряде теоретических работ ([1—3] и др.) уже рассматривались некоторые задачи о движении нагретых твердых тел в плавящейся среде. При этом в основном изучались медленные движения в условиях, когда можно пренебречь инерционными эффектами в жидкой фазе («ползущие» течения) и не учитывать тепловыделение, вызванное вязкой диссипацией. Не оценивалась в этих работах и длина заполненного жидкой (или газовой) фазой следа за движущимся горячим телом конечного размера.

В последние годы в связи с рядом технологических приложений, а также в связи с изучением некоторых новых физических явлений [4, 5], возник интерес и к движениям в условиях, в которых инерционными эффектами и в особенности вязкой диссипацией пренебрегать нельзя. Автором [6] была решена задача о движении полубесконечной нагретой пластины в плавящейся или испаряющейся среде с учетом обоих упомянутых эффектов. В настоящей работе¹ развиты полученные в [6] результаты, что может служить основой общего асимптотического подхода к решению задач о движении твердых тел с плавлением в зоне контакта.

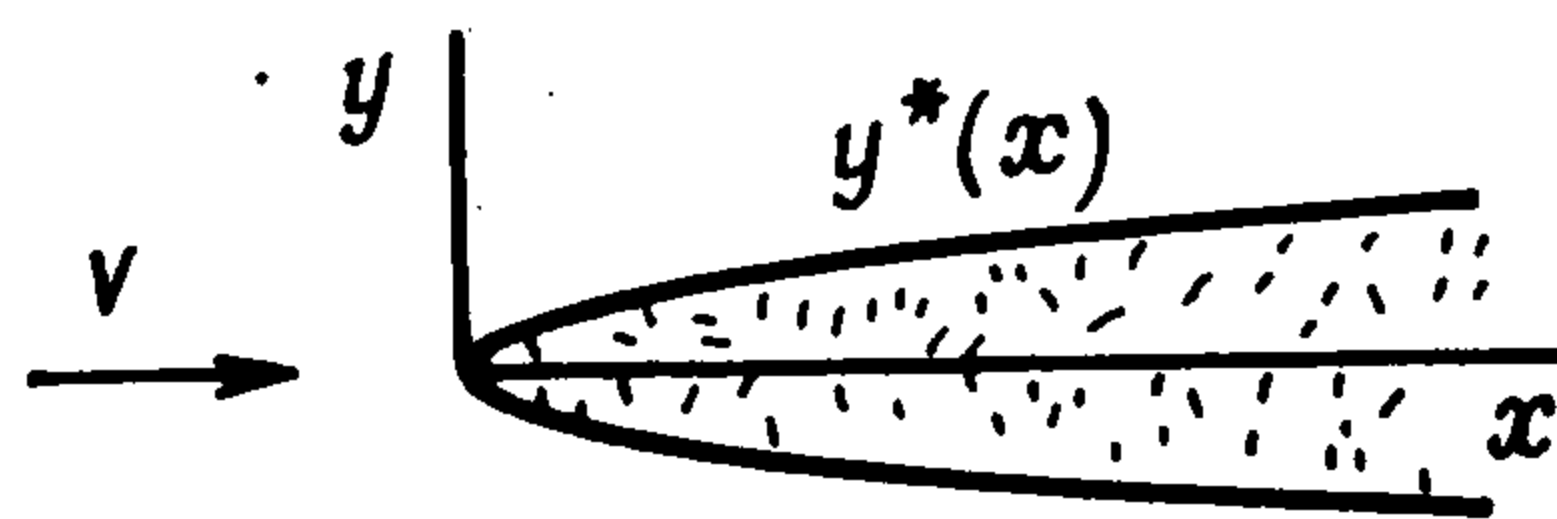
¹ Работа представляет собой часть доклада, прочитанного автором на 19 Международном симпозиуме по механике жидкости (Козубник, ПНР, сентябрь, 1989 г.).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть в неограниченной однородной твердой среде с температурой T_∞ в бесконечности движется в своей плоскости с постоянной скоростью V полубесконечная плоская пластина нулевой толщины (фиг. 3), имеющая одинаковую по всей длине температуру T_w , превышающую температуру плавления T_m твердой среды ($T_w \geq T_m$). Вблизи пластины образуется слой расплава, имеющего плотность ρ , вязкость μ , теплопроводность λ и удельную теплоемкость c . Все эти величины, как и соответствующие величины ρ_s , λ_s и c_s для твердой среды, будем для простоты считать постоянными, не зависящими от давления p и температуры T . Поглощаемую при плавлении твердой среды скрытую удельную теплоту h_f и температуру T_m также примем за постоянные.

Будем считать, что при изучении движения жидкости в слое деформацией твердой среды можно пренебречь (напряженно-деформированное состояние среды, если это требуется, может быть определено по найденному из решения задачи о движении жидкости распределению напряжений на границе твердой фазы; из дальнейшего следует, что при некоторых условиях при больших скоростях движения или малой толщине слоя расплава — нагрузки, приложенные к границе области твердого состояния, могут быть значительными.)

Обратим движение, считая пластину неподвижной, а твердую среду — движущейся поступательно в направлении вдоль пластины.

Предполагая толщину слоя небольшой, можно для описания движения расплава использовать обычные уравнения движения в тонком слое [7]:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u и v — составляющие скорости вдоль пластины и перпендикулярно ей, x и y — координаты в этих направлениях, отсчитываемые от передней кромки пластины. Уравнения (1) непригодны в окрестности передней кромки пластины, где не выполнено условие о разном порядке величин, составляющих скорости u и v ($v \ll u$).

В отличие от известной постановки задачи о течениях в пограничном слое при обтекании тел жидкостью функция dp/dx в первом уравнении (1) не задана, а должна быть найдена, подобно тому, как это делается в задачах гидродинамической теории смазки [7]. Очевидно, что в принятом предположении о постоянстве плотности ρ давление $p(x)$ в слое опреде-

ляется с точностью до постоянной. (Это же справедливо и при движении тел более общей формы при нахождении распределения давления в замкнутой полости, занятой расплавом.)

Примем, что, как и в третьем уравнении (1), при описании распределения температуры T_s в твердой среде можно пренебречь тепловым потоком в направлении вдоль пластины. Тогда соответствующее уравнение будет иметь вид

$$\rho_s c_s V \frac{\partial T_s}{\partial x} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (2)$$

Строго говоря, это уравнение справедливо тоже лишь в тонком слое твердой среды, прилегающем к слою расплава. Вне этого слоя «внутреннее» решение уравнения (2) должно сопрягаться с «внешним» решением полного уравнения теплопроводности в движущейся среде. По-иному, уравнение (2) можно считать справедливым, если твердая среда термически анизотропна и обладает теплопроводностью лишь в поперечном к пластине направлении.

Система четырех уравнений (1), (2) имеет седьмой порядок. Кроме подлежащих определению из этих уравнений зависимостей от x и y величин u , v , T , T_s нужно найти распределение давления $p(x)$ и форму границы раздела твердой и жидкой фаз $y^*(x)$. Таким образом, для решения поставленной задачи необходимы девять краевых условий. Ниже приведены эти условия.

На пластине при $y = 0$, $x \geq 0$:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w \quad (3)$$

На границе раздела фаз при $y = y^*(x)$, $x \geq 0$ [8]:

$$\rho_s V dy^* = \rho u dy - \rho v dx \quad (\text{уравнение неразрывности}) \quad (4)$$

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial y} dx = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} dx + \rho_s V h_f dy^* \quad (\text{уравнение энергии}) \quad (5)$$

$$u = V, \quad T = T_s = T_m \quad (6)$$

Использование уравнения импульсов на границе раздела фаз в принятой постановке задачи о движении в слое не является необходимым; это уравнение определяет компоненты напряжений в твердой среде на границе $y = y^*(x)$: $\sigma_{yy} = p$, $\sigma_{xy} = -\mu \partial u / \partial y$.

В бесконечности — при $y \rightarrow \infty$:

$$T_s = T_\infty \quad (7)$$

Все выписанные краевые условия являются точными, кроме условия $u = V$ и формул для напряжений σ_{yy} и σ_{xy} при $y = y^*(x)$, которые имеют ту же точность, что и уравнения (1).

Введем согласно второму уравнению (1) функцию тока $\psi(x, y)$ и перейдем в уравнениях (1), (2), краевых условиях (3)–(7) и в выражении для ψ к новым переменным:

$$u = Vu', \quad v = \frac{V}{\sqrt{\text{Re}}} v', \quad p = \rho V^2 p', \quad T = T_m T', \quad T_s = T_m T_s' \quad (8)$$

$$x = Lx', \quad y = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} y'$$

Здесь L — величина с размерностью длины, $\text{Re} = \rho VL / \mu$ — число Рейнольдса. Опустив у этих переменных штрихи, получим преобразованную систему уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \quad (10)$$

и краевых условий

$$y = 0, \quad x \geq 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w$$

$$y = y^*, \quad x \geq 0, \quad \rho_s dy^* = \rho (dy^* - v dx)$$

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} \frac{\partial T_s}{\partial y} dx = \frac{\partial T}{\partial y} dx + \kappa dy^*, \quad u = 1, \quad T = T_s = 1 \quad (11)$$

$$y = \infty, \quad T_s = T_\infty$$

Здесь

$$\text{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda}, \quad m^2 = \frac{V^2}{cT_m}, \quad \kappa = \frac{\rho_s}{\rho} \text{Pr} \frac{h_f}{cT_m}, \quad a^2 = \frac{\lambda_s}{\rho_s c_s} \frac{\rho}{\mu}$$

(Pr — число Прандтля жидкости в слое).

То, что параметр a^2 в уравнении теплопроводности для твердой среды (10) содержит характеристики жидкой фазы ρ и μ , объясняется единообразным для всех уравнений выбором новых независимых переменных согласно последним двум формулам (8).

Функция тока $\psi(x, y)$ и соответствующая ей безразмерная функция $\psi'(x', y')$ связаны соотношением

$$\psi = \sqrt{vVL} \psi'$$

($v = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости).

Пользуясь теми же соображениями, что и при решении задачи Блазиуса о пограничном слое на полубесконечной пластине в однородном потоке вязкой жидкости [9], покажем, что решение уравнений (1), (2) для u, v, T, T_s с краевыми условиями (3)–(7) автомодельно и зависит от единственной переменной $y \sqrt{V/(vx)}$, а функции $y^*(x)$ и $p(x)$ определяются теми же соображениями с точностью до постоянного множителя.

Пусть решение уравнений (9) с краевыми условиями (11) найдено. Тогда решение системы (1), (2) в исходных переменных будет иметь вид

$$\psi = \sqrt{vVL} \psi' \left(\frac{x}{L}, \quad y \sqrt{\frac{V}{vL}} \right), \quad T = T_m T', \quad T_s = T_m T_s'$$

где функции T' и T_s' зависят от тех же аргументов, что и ψ' (зависимость от постоянных безразмерных параметров не указана), причем

$$y^* = \sqrt{\frac{vL}{V}} y^* \left(\frac{x}{L} \right), \quad p = \rho V^2 p' \left(\frac{x}{L} \right) + \text{const}$$

Так как введенный при переходе к новым переменным линейный размер L в действительности, т. е. в соотношениях (1)–(7) в формулировку задачи не входит, то выписанное решение не должно зависеть от этого параметра (функция p может содержать этот параметр аддитивно). Отсюда и следует, что единственным безразмерным переменным параметром, от которого зависят функции ψ', T' и T_s' является $\eta = y \sqrt{V/(vx)} = y'/\sqrt{x'}$. Тогда

$$\psi = \sqrt{vVx} \phi(\eta), \quad T = T_m T'(\eta), \quad T_s = T_m T_s'(\eta) \quad (12)$$

Для зависимостей y^* и p от x получим

$$y^* = \eta^* \sqrt{vx/V}, \quad p = -\rho V^2 k \ln(x/L).$$

Здесь η^* и k — безразмерные постоянные, а L — произвольная постоянная с размерностью длины.

В действительности фронт плавления отходит от передней кромки пластины вперед на расстояние L_T , которое по порядку величины равно

$$L_T \sim \lambda (T_w - T_m) / (\rho_s V h_f)$$

Таким образом, автомодельное решение справедливо лишь на расстояниях от передней кромки пластины, значительно превосходящих L_T .

После подстановки в уравнения (9), (10) и краевые условия (11) функции тока в виде $\sqrt{x}\varphi(\eta)$, функций $T(\eta)$, $T_s(\eta)$ и выражений $y^* = \eta^* \sqrt{x}$ и $p = -k \ln x$ (вновь штрихи над преобразованными переменными опущены) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых условий:

$$\varphi''' + 1/2\varphi\varphi'' + k = 0 \quad (13)$$

$$\text{Pr}^{-1} T'' + 1/2\varphi T' + m^2\varphi''^2 = 0 \quad (14)$$

$$T_s'' + (2a^2)^{-1}\eta T_s' = 0 \quad (15)$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad T(0) = T_w \quad (16)$$

$$\varphi(\eta^*) = \rho_s/\rho, \quad \varphi'(\eta^*) = 1, \quad T(\eta^*) = 1$$

$$T'(\eta^*) + 1/2\kappa\eta^* = (\lambda_s/\lambda) T_s'(\eta^*) \quad (17)$$

$$T_s(\eta^*) = 1, \quad T_s(\infty) = T_\infty \quad (18)$$

Выписанные девять краевых условий служат для определения семи постоянных интегрирования уравнений (13)–(15) и постоянных η^* и k .

Уравнение (15) для T_s интегрируется независимо от двух других. Опуская стандартные выкладки, запишем его решение, удовлетворяющее условиям (18)

$$T_s = 1 - (1 - T_\infty) \int_{\eta^*}^{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a^2}\right) d\eta \left[\int_{\eta^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a^2}\right) d\eta \right]^{-1}. \quad (19)$$

Отсюда находим величину $T_s'(\eta^*)$, входящую в правую часть последнего краевого условия (17)

$$T_s'(\eta^*) = -(1 - T_\infty) \exp\left(-\frac{\eta^{*2}}{4a^2}\right) \left[\int_{\eta^*}^{\infty} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a^2}\right) d\eta \right]^{-1}. \quad (20)$$

Уравнение (13) не интегрируется в конечной форме (при $k = 0$ оно переходит в известное уравнение Блазиуса). Обозначим через $\varphi(\eta, k, \alpha)$ функции, представляющие его решения с начальными данными

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = \alpha \quad (21)$$

Отметим, что эти функции можно записать в однопараметрическом виде, полагая

$$\varphi = |k|^{1/4} \bar{\varphi}(|k|^{1/4} \eta, \alpha |k|^{-3/4})$$

где $\bar{\varphi}(\zeta, \beta)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\bar{\varphi}''' + 1/2\bar{\varphi}\bar{\varphi}'' \pm 1 = 0; \quad \bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}'(0) = 0, \quad \bar{\varphi}''(0) = \beta$$

(знак плюс при $k > 0$, минус — при $k < 0$).

Эта возможность может быть полезной при численном решении сформулированной задачи, но не дает преимуществ при получении аналитических результатов, и поэтому в дальнейшем не используется.

Для каждой функции $\varphi(\eta, k, \alpha)$ решение уравнения (14) с начальными данными

$$T(0) = T_w, \quad T'(0) = \tau$$

имеет вид

$$T = T_w + \int_0^{\eta} \exp\left(-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} \varphi d\eta\right) \left(\tau - m^2 \text{Pr} \int_0^{\eta} \varphi''^2 \exp\left(\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^{\eta} \varphi d\eta\right) d\eta \right) d\eta \quad (22)$$

Обозначим эти решения через $T(\eta, \alpha, k, \tau)$; зависимость от задаваемых параметров T_w , Pr и m^2 здесь не указана.

Полученные таким образом решения для φ и T удовлетворяют условиям (16) при $\eta = 0$. Первые три условия (17) при $\eta = \eta^*$ позволяют выразить α , k и τ через η^* . После этого последнее условие (17) при $\eta = \eta^*$ (являющееся, напомним, уравнением баланса тепла на поверхности фазового перехода) представит собой уравнение для определения η^* через все задаваемые параметры сформулированной задачи. Нахождением η^* и завершается ее решение.

Функция $\varphi(\eta, \alpha, k)$, т. е. решение уравнения (13) с начальными условиями (21), может быть представлена в виде ряда

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} \eta^n \quad (23)$$

первые коэффициенты которого даются формулами

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \alpha, \quad A_3 = -k, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = -\frac{1}{2}\alpha^2 \\ A_6 &= 2\alpha k, \quad A_7 = -2k^2, \quad A_8 = \frac{11}{4}\alpha^3, \quad A_9 = -\frac{45}{3}\alpha^2 k, \\ A_{10} &= 64\alpha k^2 \end{aligned}$$

а для последующих справедливо рекуррентное соотношение (при $n \geq 8$):

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+3}}{n!} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{2!} \frac{A_n}{(n-2)!} + \frac{A_3}{3!} \frac{A_{n-1}}{(n-3)!} + \frac{A_5}{5!} \frac{A_{n-3}}{(n-5)!} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{A_{n-3}}{(n-3)!} \frac{A_5}{3!} + \frac{A_{n-1} A_3}{(n-1)!} + \frac{A_n A_2}{n!} \right] \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, установим следующую структуру ряда (23):

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{A_{3j-1}}{(3j-1)!} \eta^{3j-1} + \frac{A_{3j}}{(3j)!} \eta^{3j} + \frac{A_{3j+1}}{(3j+1)!} \eta^{3j+1} \right] \\ A_{3j-1} &= \sum_{l=0} c_l^{(3j-1)} \alpha^{j-4l} k^{3l}, \quad A_{3j} = k \sum_{l=0} c_l^{(3j)} \alpha^{j-1-4l} k^{3l}, \\ A_{3j+1} &= k^2 \sum_{l=0} c_l^{(3j+1)} \alpha^{j-2-4l} k^{3l} \end{aligned}$$

Численные коэффициенты c_l отличны от нуля лишь для тех $l = 0, 1, 2, \dots$ (и тех j), для которых показатель степени у α неотрицателен.

При $k = 0$ ряд для φ переходит в полученный ранее Блазиусом:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_0^{(3j-1)}}{(3j-1)!} \alpha^j \eta^{3j-1}$$

Таким образом, используя для нахождения функций $\varphi(\eta, k, \alpha)$ численное интегрирование уравнения (13) или представляя их конечным отрезком ряда (23), можно в конкретных случаях определить все зависимости, дающие решение поставленной задачи.

Применим для решения задачи (13)–(18) асимптотический метод, предполагая малой величину η^* ; при этом будут выяснены и условия, которым должны удовлетворять определяющие параметры (Pr , m^2 , κ , a^2 , ρ_s/ρ , λ_s/λ) для того, чтобы условие малости η^* было выполнено.

Представим функцию $\varphi(\eta, k, \alpha)$ в виде $\varphi = \eta^* \Phi(\zeta, k, \alpha, \eta^*)$, где $\zeta = \eta/\eta^*$. Уравнение (13) для φ преобразуется тогда к следующему виду (штрих означает производную по ζ):

$$\Phi''' + \frac{1}{2}\eta^{*2}\Phi\Phi'' + k^\circ = 0 \quad (24)$$

где новая постоянная k° связана с прежней соотношением $k^\circ = k\eta^{*2}$. Очевидно, что $\Phi''(0) = \alpha\eta^*$; обозначим $\alpha^\circ = \alpha\eta^*$.

Условия для определения $\Phi(\zeta, k^\circ, \alpha^\circ, \eta^*)$ будут иметь вид

$$\zeta = 0, \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi''(0) = \alpha^\circ,$$

а условия для нахождения зависимостей k° и α° от η^* станут такими:

$$\zeta = 1, \quad \Phi(1) = N, \quad \Phi'(1) = 1$$

Представим функцию Φ и постоянные k° и α° в виде рядов по степеням малого параметра η^{*2} :

$$\Phi = \varphi_0 + \eta^{*2} \varphi_1 + \dots, \quad k^\circ = k_0 + \eta^{*2} k_1 + \dots, \quad \alpha^\circ = \alpha_0 + \eta^{*2} \alpha_1 + \dots,$$

Тогда для определения последовательных членов ряда для Φ получим уравнения с краевыми условиями

$$\varphi_0''' + k_0 = 0, \quad \varphi_k''' + k_k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i \varphi_{k-1-i}'' = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \alpha_0; \quad \varphi_0(1) = N, \quad \varphi_0'(1) = 1 \quad (N = \rho_s/\rho) \\ \varphi_k(0) = \varphi_k'(0) = 0, \quad \varphi_k''(0) = \alpha_k; \quad \varphi_k(1) = \varphi_k'(1) = 0 \end{aligned}$$

Легко показать, что функции φ_k — многочлены степени $3 + 4k$; их коэффициенты — степенные функции параметра N степени $k + 1$. Приведем выражения для первых двух членов рядов для Φ и для постоянных α° и k° :

$$\varphi_0 = \frac{\alpha_0}{2} \zeta^2 - \frac{k_0}{6} \zeta^3, \quad \varphi_1 = \frac{\alpha_1}{2} \zeta^2 - \frac{k_1}{6} \zeta^3 - \frac{\alpha_0^2}{240} \zeta^5 + \frac{\alpha_0 k_0}{360} \zeta^6 - \frac{k_0^2}{2520} \zeta^7$$

$$\alpha_0 = 2(3N - 1), \quad \alpha_1 = -\frac{1}{60} \alpha_0^2 + \frac{1}{60} \alpha_0 k_0 - \frac{1}{315} k_0^2$$

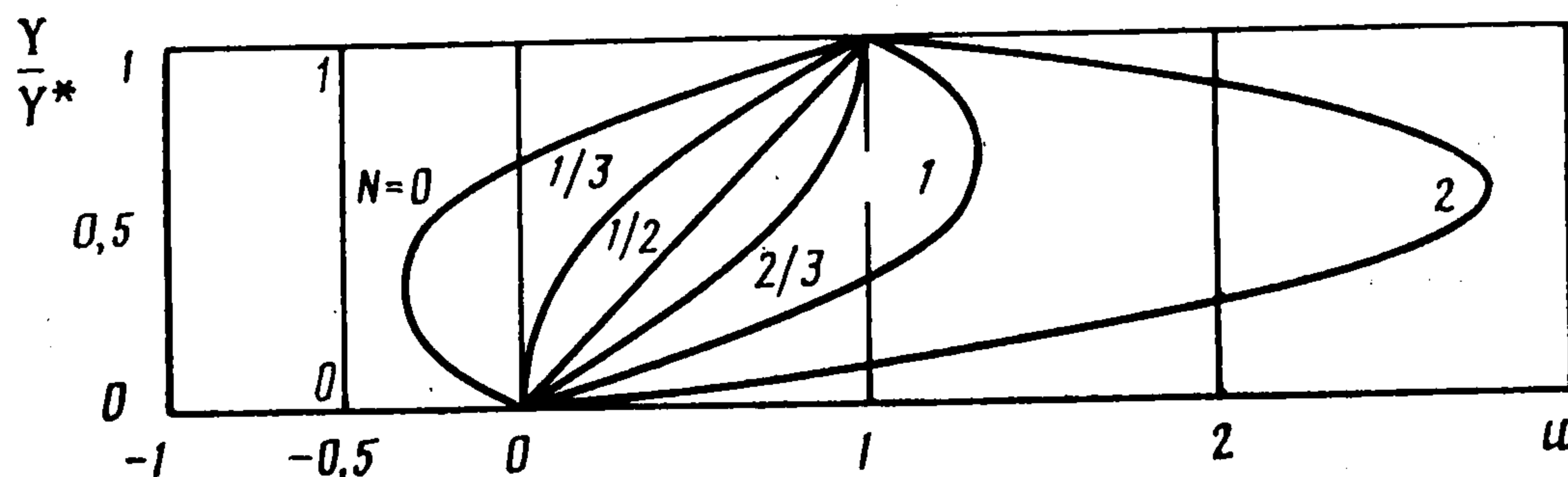
$$k_0 = 6(2N - 1), \quad k_1 = -\frac{3}{40} \alpha_0^2 + \frac{1}{15} \alpha_0 k_0 - \frac{1}{84} k_0^2$$

Таким образом, в главном приближении профиль скорости $u = \Phi'(\zeta)$ параболический и связан с соответствующим ему градиентом давления, как в напорном течении Пуазейля — Куэтта между параллельными пластинами. То, что этот градиент зависит только от N , показывает, что он определяется в главном приближении лишь изменением плотности среды на поверхности фазового перехода.

На фиг. 4 приведен профиль скорости в главном приближении

$$u = 2(3N - 1) y/y^* - 3(2N - 1) (y/y^*)^2 \quad (25)$$

при некоторых значениях N . Значению $N = 1/2$ соответствует линейный профиль скорости; при таком N в том же приближении обращается в нуль



Фиг. 4

градиент давления. При дальнейшем уменьшении N градиент давления становится положительным. При $N < 1/2$ профиль скорости обращен выпуклостью против направления движения, при $N < 1/3$ в слое появляется область возвратного течения.

Подчеркнем, что при $N > 2/3$ максимальная скорость превосходит единицу и при больших значениях N быстро растет; так же быстро растет и градиент давления. Поэтому при больших N (что может соответствовать фазовому переходу в газовое состояние) необходимо учитывать сжимаемость среды в слое.

Зависимость профиля скорости (в безразмерных переменных) от всех остальных параметров задачи (кроме N) проявляется лишь в следующем приближении по η^{*2} через саму эту величину, стоящую множителем перед многочленом шестой степени $\varphi_1(\zeta)$. Для безразмерного градиента давления зависимость от всех параметров задачи, кроме N , тоже проявляется в главном приближении только через η^{*2} согласно простой формуле

$$-x dp/dx = k_0/\eta^{*2} + k_1$$

Уравнение (14) для определения функций $T(\eta, k, \alpha, \tau, \eta^*)$ после подстановки в него функции $\varphi = \eta^* \Phi(\zeta, k, \alpha, \eta^*)$ примет вид (штрихами вновь обозначено дифференцирование по ζ)

$$T'' + 1/2 \eta^{*2} \text{Pr} \Phi T' + m^2 \text{Pr} \Phi'' = 0 \quad (26)$$

с условиями

$$\zeta = 0, \quad T = T_w, \quad T' = \tau^\circ \quad (\tau^\circ = \tau \eta^*)$$

Для определения зависимости τ° от η^* служит краевое условие

$$\zeta = 1, \quad T = 1$$

Представив $T(\zeta)$ и τ° в виде

$$T = T_0 + \eta^{*2} T_1 + \dots, \quad \tau^\circ = \tau_0 + \eta^{*2} \tau_1 + \dots$$

для определения последовательных членов этих рядов найдем уравнения с условиями

$$T_0'' + m^2 \text{Pr} \Phi_0'' = 0, \quad T_k'' + \frac{\text{Pr}}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i T_{k-1-i}' +$$

$$+ m^2 \text{Pr} \sum_{i=0}^k \Phi_i'' \Phi_{k-i}'' = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$T_0(0) = T_w, \quad T_0'(0) = \tau_0; \quad T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = \tau_k$$

Таким образом, последовательные члены T_k ряда для T представляют собой многочлены степени $4(k+1)$:

$$T_0 = T_w + \tau_0 \zeta - m^2 \text{Pr} \left(\frac{\alpha_0^2}{2} \zeta^2 - \frac{\alpha_0 k_0}{3} \zeta^3 + \frac{k_0^2}{12} \zeta^4 \right) \quad (27)$$

$$T_0' = \tau_0 - m^2 \text{Pr} \left(\alpha_0^2 \zeta - \alpha_0 k_0 \zeta^2 + \frac{k_0^2}{3} \zeta^3 \right) \quad (28)$$

Многочлен восьмой степени $T_1(\zeta)$ ради экономии места не выписан. Зависимость τ° от η^* находится из условия $T(1) = 1$, которое для последовательных членов ряда для T примет вид

$$T_0(1) = 1, \quad T_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда находим

$$\tau_0 = 1 - T_w + m^2 \text{Pr} \left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{\alpha_0 k_0}{3} + \frac{k_0^2}{12} \right) \quad (29)$$

Выражение для τ_1 вновь не выписано.

Согласно формуле (27), профиль температуры в главном приближении линеен по ζ ($T = T_w + (1 - T_w) \zeta$) без учета диссипации, а при учете

диссипации представляется многочленом четвертой степени по ζ , коэффициенты которого зависят от N , T_w и $m^2 \text{Pr}$.

Остальные параметры, в частности тепловой эффект фазового превращения, влияют на безразмерный профиль температуры только в следующем приближении по η^{*2} через саму эту величину.

Очевидно, что распределение температуры (27) с τ_0 , определенным формулой (29), такое же, как в течении Пуазейля — Куэтта с профилем скорости (25).

Из полученных формул можно, не решая пока задачу далее, найти равновесную температуру пластины $T_w^{(e)}$, т. е. температуру, при которой поток тепла от пластины обращается в нуль: $T'(0) = 0$. Так как $T'(0) = \tau^\circ = \tau_0 + \eta^{*2}\tau_1 + \dots$, то, используя выражение для τ_0 из (29), получим

$$T_w^{(e)} = 1 + m^2 \text{Pr} \left(\frac{\alpha_0^2}{2} - \frac{\alpha_0 k_0}{3} + \frac{k_0^2}{12} \right) + \eta^{*2}\tau_1 + \dots \quad (30)$$

или, ограничиваясь главным членом,

$$T_w^{(e)} = 1 + m^2 \text{Pr} (6N^2 - 4N + 1)$$

Выражение в скобках правой части положительно и имеет минимум при $N = 1/3$.

Если с ростом m^2 (т. е. с ростом скорости) равновесная температура пластины превзойдет ее действительную температуру, то поток тепла на пластине будет направлен к пластине, а в профиле температуры появится максимум. Положение этого максимума ζ_m и величина $T_{\max} = T(\zeta_m)$ могут быть найдены из формул (28) и (27), если приравнять нулю правую часть (28) для нахождения ζ_m и подставить затем это значение в формулу (27). Соответствующие выкладки довольно громоздки (нужно выписать корень уравнения третьей степени); численный же анализ конкретных случаев несложен, так как уравнение для ζ_m имеет лишь один действительный корень.

Для завершения решения задачи определим η^* из последнего условия (17), выражающего уравнение баланса тепла на поверхности фазового перехода. Перейдя в правой части этого условия в выражении $T'(\eta^*)$ от дифференцирования по η к дифференцированию по ζ , получим

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} \eta^* T_s'(\eta^*) = T_\zeta'(1) + \frac{\kappa}{2} \eta^{*2}$$

где $T_s'(\eta^*)$ — функция, определенная формулой (20).

Сохраним в этом выражении главный член разложения по η^* ; величину $T_s'(1)$ заменим главным членом ее разложения по η^{*2} согласно формулам (28) и (29). В результате получим

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_s}{\lambda} (1 - T_\infty) \eta^* + \frac{\kappa}{2} \eta^{*2} = T_w - 1 + m^2 \text{Pr} (6N^2 - 8N + 3) \quad (31)$$

Это уравнение, выражая величину η^* через определяющие параметры задачи, тем самым завершает ее решение.

Как следует из уравнения (31), при определении толщины слоя учет влияния вязкой диссипации эквивалентен повышению температуры пластины T_w до значения

$$T_w^{\text{eff}} = T_w + m^2 \text{Pr} (6N^2 - 8N + 3)$$

(величина в скобках всегда положительна; ее минимальное значение при $N = 2/3$ равно $1/3$).

Из уравнения (31) следует необходимое условие малости η^* . Разрешив уравнение относительно η^* , получим это условие в виде

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_s}{\lambda} (1 - T_\infty) + \frac{\kappa}{2} \gg T_w^{\text{eff}} - 1$$

Если поток тепла, идущий от жидкого слоя, расходуется в основном на скрытую теплоту плавления твердой среды (более существенно второе слагаемое в левой части равенства (31)), то должно быть

$$\frac{\kappa}{2} \gg T_w^{\text{eff}} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{\rho_s}{2\rho} \text{Pr} \frac{h_f}{c(T_w^{\text{eff}} - T_m)} \gg 1$$

В последнем соотношении T_w и T_m — размерные величины.

Если, наоборот, поглощенное при плавлении тепло невелико (более существенно первое слагаемое в левой части равенства (31)), то должно быть

$$\frac{\lambda_s}{a\sqrt{\pi}} (T_m - T_\infty) \gg \lambda (T_w^{\text{eff}} - T_m)$$

Здесь вновь температура — размерная величина.

Определим силу сопротивления X движению пластины (одной ее стороны) на участке длиной L :

$$x = \int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = 2\mu V \sqrt{\text{Re}} \varphi''(0) = \frac{2\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \alpha$$

Ограничиваясь первыми членами разложения для α , получим

$$X = \frac{2\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\alpha_0 + \eta^{*2}\alpha_1 + \dots}{\eta^*} = \frac{4\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{3N-1}{\eta^*} \left(1 + \frac{3N-2}{30} \eta^{*2} \dots\right) \quad (32)$$

В решении Блазиуса $\alpha = 0,332$, поэтому можно написать

$$X = 6,02 X_f \frac{3N-1}{\eta^*} \left(1 + \frac{3N-2}{30} \eta^{*2}\right)$$

где X_f — сила сопротивления пластины, обтекаемой неограниченным потоком вязкой жидкости со скоростью V в бесконечности и с теми же ρ и μ , что и жидкость в слое.

Как следует из равенстве (32), сила сопротивления X может быть очень большой при малых значениях η^* (так, для плавящегося льда $\kappa \approx 1$ и при $T_w - T_m = 2^\circ$ получим $\eta^* = 0,08$; следовательно, в этом случае $X \approx 150 X_f$).

Вычислим еще силу давления, действующую на пластину на участке длиной L (при $x = L$ будем считать $p = 0$):

$$Y = \int_0^L p dx = -\rho V^2 L k \int_0^1 \ln x dx = \rho V^2 L k$$

Отсюда, ограничиваясь первыми двумя членами разложения для k , найдем

$$Y = \frac{\rho V^2 L}{\eta^{*2}} (k_0 + \eta^{*2} k_1 + \dots) = \frac{\rho V^2 L}{\eta^{*2}} [6(2N-1) + \eta^{*2} k_1(N) + \dots]$$

Определим, наконец, продольную силу, действующую на твердую среду (считаем эту силу положительной в отрицательном направлении оси x):

$$X^* = \int_0^L p \frac{dy^*}{dx} dx + \int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y^*} dx = \frac{\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} [2k\eta^* + 2\varphi''(\eta^*)]$$

С принятой всюду ранее точностью

$$X^* = \frac{2\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{1}{\eta^*} \left[\alpha_0 + \eta^{*2} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0^2}{12} + \frac{\alpha_0 k_0}{12} - \frac{k_0^2}{60} \right) \right]$$

Таким образом, в главном приближении силы X и X^* имеют порядок $1/\eta^*$ и совпадают по величине (но противоположны по направлению). Их различие порядка η^* связано с отличием потока импульса жидкости в сечении слоя $x = L$ от потока импульса твердой среды, подходящей к фронту плавления до этого сечения.

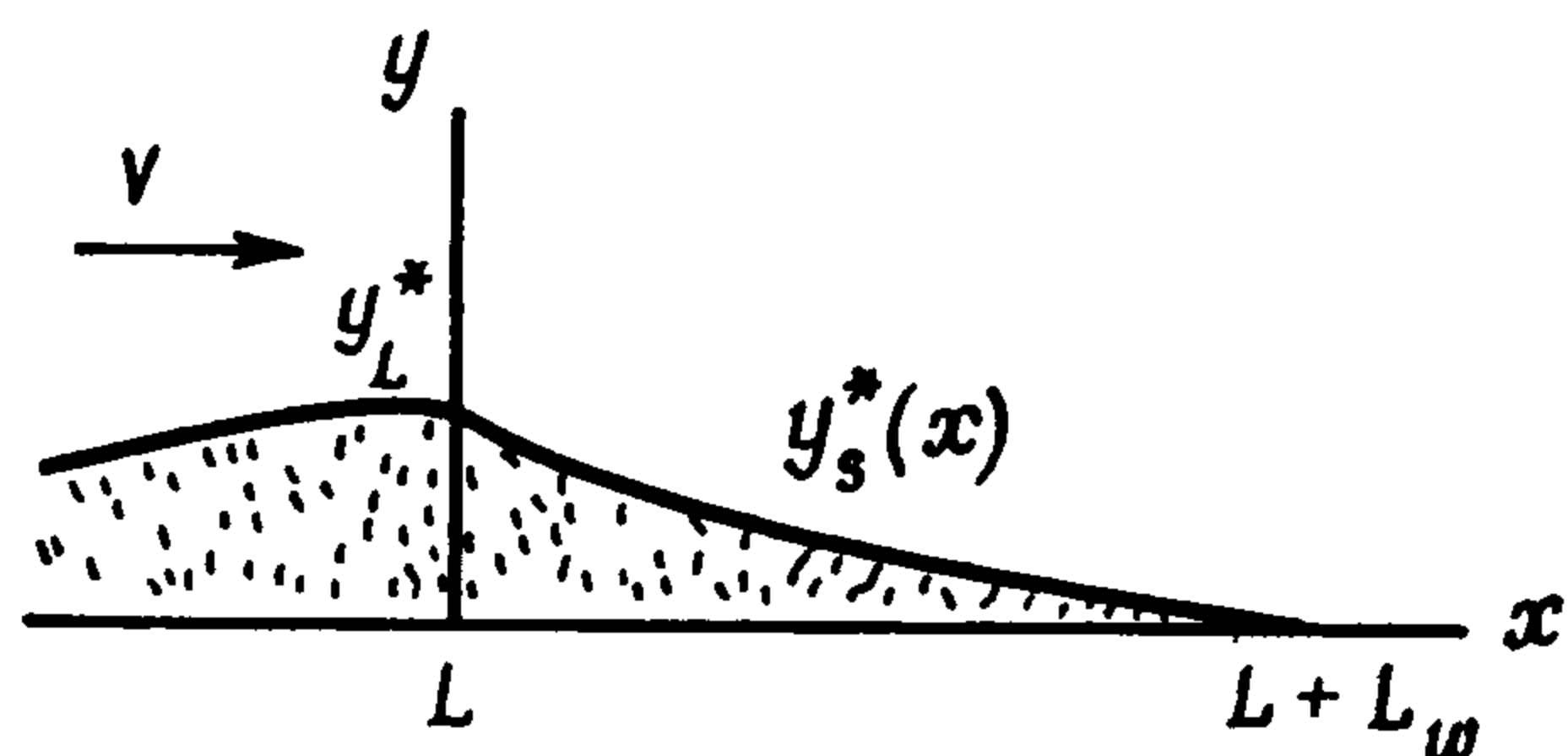
Действительно,

$$X^* - X = \frac{\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \eta^* \left(-\frac{\alpha_0^2}{6} + \frac{\alpha_0 k_0}{6} - \frac{k_0^2}{30} \right)$$

Разность потоков импульсов равна

$$\int_0^{y^*} \rho u^2 dy - \rho_s V^2 y^* = \frac{\rho V^2 L}{\sqrt{\text{Re}}} \eta^* \left(\frac{\alpha_0^2}{3} - \frac{\alpha_0 k_0}{4} + \frac{k_0^2}{20} - N \right)$$

Выражения в круглых скобках в последних двух формулах после подстановки в них α_0 и k_0 становятся тождественными одно другому и равными величине $2/5(3N^2 - 3N + 1/3)$. Можно отметить, что выписанная разность импульсов отрицательна в диапазоне значений N между нулями этого многочлена, т. е. при $0,13 < N < 0,87$; в этом диапазоне $X^* < X$.



Фиг. 5

Пусть движущаяся пластина имеет конечную длину L , которую примем за единицу. Возникший при обтекании пластины расплав образует за ней жидкий след (фиг. 5), ограниченный с обеих сторон фронтами затвердевания. (На некотором расстоянии за пластиной может все еще продолжаться плавление твердой фазы вследствие тепловыделения, обусловленного вязкой диссипацией в жидком слое.) При некотором $x = L_w + L$ оба фронта сливаются (если $T_\infty < T_m$), замыкая полость с расплавом; полость может простираться в бесконечность (если $T_\infty = T_m$).

Не должно смущать то, что при $N \neq 1$ масса расплава в полости не равна соответствующей по объему массе твердого тела, так как рассматриваемое стационарное движение может быть пределом нестационарного, в котором и устанавливается необходимый баланс массы (например, при входе пластины в твердое тело через свободную поверхность); в противном случае необходимо учитывать деформацию твердого тела, т. е. рассматривать связанную задачу.

Оставаясь по-прежнему в рамках теории тонкого слоя, для определения движения жидкости за пластиной и формы заполняемой ею полости необходимо продолжить решение системы уравнений (9), (10) в область $x > L$. При этом в системе краевых условий (11) условия при $y = 0$ следует заменить, очевидно, следующими:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

и к этой системе нужно добавить начальные условия:

при $x = 1$ (длину L принимаем за единицу)

$$0 < y < y_L^*, \quad u = u_L(y), \quad T = T_L(y); \quad y > y_L^*, \quad u = 1, \quad T_s = T_{sL}(y) \quad (33)$$

где функции $u_L(y)$, $T_L(y)$, $T_{sL}(y)$ соответствуют полученным ранее автомодельным распределениям составляющей скорости u и температуры жид-

кости и твердого тела при $x = 1$. Кроме того, входящая в параметр κ величина h_f есть в этом случае выделяющаяся при затвердевании скрытая теплота h_s .

Решение поставленной неавтономной задачи достаточно сложно и может быть получено в конкретных случаях лишь численными методами. Поэтому ограничимся простым приближенным ее решением, позволяющим дать нижнюю оценку длины жидкого следа L_w . Для этого, во-первых, пренебрежем длиной возможного участка фронта плавления за задней кромкой пластины, о котором говорилось выше. Во-вторых, в общем потоке тепла, которое должно быть отведено в твердую фазу из области жидкого следа, равном сумме избыточного теплосодержания втекающей в след жидкости, тепла, выделяющегося при вязкой диссипации в жидком следе, и скрытой теплоты отвердевания

$$\left(\int_0^{y^*} \rho u [c(T - T_m) + h_s] dy \right)_{x=1} + \int_1^{L_w} \int_0^{y^*} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy dx$$

учтем лишь скрытую теплоту отвердевания, т. е. только слагаемое с h_s в первом интеграле. Наконец, в-третьих, функцию $T_{sL}(y)$ в условиях (33) заменим ее наименьшим значением, равным T_∞ .

Очевидно, что все три предположения уменьшают истинную длину следа.

В сформулированном приближении распределение температуры в твердой фазе и форму фронта отвердевания при $x > 1$ можно найти независимо, без рассмотрения одновременно движения жидкости. При этом очевидно, что решение для T_s автономно и представляется прежней формулой (19), где

$$\eta = (y - y_L^*) / \sqrt{x - 1} \quad (34)$$

Второе условие (11) для нахождения η^* примет вид

$$\frac{\lambda_s}{\lambda} T_s'(\eta^*) = \frac{\kappa}{2} \eta^* \quad (35)$$

где $T_s'(\eta^*)$ выражается согласно (20).

Найдя из (35) η^* и полагая в (34) $\eta = \eta^*$, получим уравнение для формы поверхности отвердевания: $y = y_L^* + \eta^* \sqrt{x - 1}$. При $y = 0$ найдем отсюда координату слияния фронтов затвердевания и, следовательно, длину L_w жидкого следа:

$$\sqrt{L_w} = -y_L^* / \eta^* \quad (36)$$

Упростим соотношение (35) при малых η^* , пользуясь выражением (20) для $T_s'(\eta^*)$. В результате получим

$$\frac{\kappa}{2} \eta^* = - \frac{\lambda_s}{\lambda} \frac{1 - T_\infty}{a\sqrt{\pi}}$$

(Малость величины η^* , определяемой соотношением (35), обеспечивается при выполнении условия $c_s(T_m - T_\infty)/h_s \ll \pi/4$.)

Подставив отсюда значение η^* в соотношение (36), найдем формулу для длины жидкого следа (в исходных размерных переменных)

$$L_w = \frac{\pi}{4} \left[\frac{h_s}{c_s(T_m - T_\infty)} \right]^2 \frac{\rho_s c_s V}{\lambda_s} y_L^{*2}$$

Величина y_L^* находится из решения задачи об образовании слоя расплава по выражению (31).

В предельном случае, пренебрегая при формировании расплава отводом тепла в твердую среду (т. е. не учитывая в (31) первое слагаемое в левой части), получим

$$L_w = \frac{\pi}{2} \left[\frac{h_s}{c_s (T_m - T_\infty)} \right]^2 \frac{c (T_w^{\text{eff}} - T_m)}{h_f} \frac{c_s}{c} \frac{\lambda}{\lambda_s} L$$

В другом предельном случае, когда поглощением тепла при плавлении можно пренебречь (т. е. не учитывая в (31) второе слагаемое слева), найдем

$$L_w = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{\lambda_s}{\lambda} \frac{(T_w^{\text{eff}} - T_m) h_s}{c_s (T_m - T_\infty)^2} \right]^2 L$$

Автор благодарит А. А. Шугая за замечания, улучшившие содержание статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Emerman S. H., Turcotte D. L. Stokes's problem with melting // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. V. 26. No. 11. P. 1625—1630.
2. Saito A., Utaka Y., Akiyoshi M., Katayama K. On the contact heat transfer with melting // Bull. JSME. 1985. V. 28. No. 242. P. 1703—1709.
3. Moallemi M. K., Viskanta R. Analysis of close-contact melting heat transfer // Intern. J. Heat. and Mass Transfer. 1986. V. 29. No. 6. P. 855—867.
4. Черный Г. Г. Движение плавящегося твердого тела между двумя упругими полупространствами // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 813—818.
5. Черный Г. Г. Механизм аномально низкого сопротивления при движении тел в твердых средах // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1324—1328.
6. Черный Г. Г. Испарение движущегося твердого тела при контакте с нагретой пластиной // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 3. С. 35—41.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
8. Черный Г. Г. Ламинарные движения газа и жидкости в пограничном слое с поверхностью разрыва // Изв. АН СССР. 1954. ОТН. № 12. С. 38—67.
9. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 430 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1990