9. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
10. *Чебаков М. И.* Сдвиг штампом бруса прямоугольного сечения // Жесткость машиностроительных конструкций: Тез. докл. Всесоюз. научно-техн. конф. Брянск, 1976. М.: МИХМ, 1976. С. 88—92.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
12. *Александров В. М., Чебаков М. И.* О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 790—798.
13. *Коваленко Е. В., Тарасов Д. Г., Чебаков М. И.* Точное решение антиплоской контактной задачи для конечных канонических областей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 837—841.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 28.III.1990

УДК 539.3

В. Н. Кутрунов, Л. Е. Мальцев

СПЕКТРАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Известно, что сингулярные интегральные операторы пространственной задачи теории упругости имеют три точки существенного спектра. Регуляризация выполняется посредством преобразования исходного уравнения, совмещающего эти три точки в одну. Дается явная запись регуляризаторов, регуляризованных уравнений.

Доказательство применимости альтернатив Фредгольма к сингулярным интегральным уравнениям теории упругости [1, 2] опирается на доказательство принципиальной возможности регуляризации этих уравнений.

Для явного построения реуляризаторов и регуляризованных уравнений исследуем спектр соответствующих сингулярных операторов.

Для первой внутренней (1^+) и первой внешней (1^-) задач теории упругости интегральные уравнения имеют вид

$$(a\mathrm{I} - \mathrm{A})\,\varphi = \mathrm{V} \tag{1}$$

где I — тождественный, A — сингулярный операторы, V — вектор перемещания точек у поверхности S упругого тела, $a = \pm 1$, причем $a = +1$ для задачи 1^+, φ — вектор плотности некоторого потенциала, посредством которого вычисляются перемещения точек упругого тела [3].

Действие оператора A определяется соотношением

$$A\varphi = \int\limits_S \varphi(x)\,\Phi(x, y)\,dS_x$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\,|r|^3}\left[(1-2\nu)\,(n_x r - r n_x - n_x \cdot r I) - 3\,\frac{n_x r}{|r|^3}\,rr\right]$$

$\Phi(x, y)$ — тензор второго ранга, ν — коэффициент Пуассона, $r = x - y$, x, y — радиус-векторы точек поверхности S, n_x — внешняя нормаль к поверхности S в точке x. В тексте использована символика прямого тензорного исчисления [3] с тем отличием, что тензоры и векторы не выделяются специальным написанием, а определяются из контекста.

Ядро $\Phi(x, y)$ содержит особенность типа $1/|r|^2$, поэтому интегральный оператор A сингулярен. Для регуляризации уравнения (1) необходимо существование сингулярного оператора B, обеспечивающего равенство

$$B\,(aI - A)\,\varphi = (I - T)\,\varphi = -BV \tag{2}$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Оператор B называется регуляризатором уравнения (1). Если уравнения (1) и (2) эквивалентны, то B — эквивалентный регуляризатор.

Для явного построения регуляризатора B и регуляризованного уравнения (2) по схеме, предложенной в данной статье, необходимо сначала исследовать точки непрерывного спектра оператора A.

Теорема 1. Спектр интегрального оператора A теории упругости содержит три точки непрерывного спектра

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm b; \; b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{3}$$

Доказательство основывается на рассмотрении символической матрицы оператора $\lambda I - A$. Следуя С. Г. Михлину [1], символическую матрицу этого оператора для любого θ можно записать в виде [1]

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & \mathbf{b}i\cos\theta \\ 0 & \lambda & \mathbf{b}i\sin\theta \\ -\mathbf{b}i\cos\theta & -\mathbf{b}i\sin\theta & \lambda \end{Vmatrix}$$

Приравнивание нулю соответствующего символического определителя приводит к уравнению $\lambda(\lambda^2 - b^2) = 0$, откуда и получаются три значения λ.

Для таких λ невозможна регуляризация уравнения $(\lambda \mathrm{I} - A)\,\varphi = \mathbf{f}$ (теорема 1.40 [1]), кроме того, эти числа относятся к спектру оператора A (теорема 3.24 [1]). Следовательно, выделились три особые точки. Они могут быть только точками сгущения спектра и не могут быть точками бесконечной кратности. Конечная кратность точек спектра оператора A доказана в [2].

Наличие не одной, а трех точек сгущения спектра у сингулярного интегрального оператора является его отличительной особенностью по сравнению с произвольным вполне непрерывным оператором. Это отличие позволяет подойти к регуляризации уравнения (1) как к такому его преобразованию, при котором три точки непрерывного спектра преобразуются в одну, совпадающую с нулем.

Теорема 2. Оператор

$$B = \frac{1}{\mathrm{a}} I + \frac{1}{1-\mathbf{b}^2} A + \frac{1}{\mathrm{a}(1-\mathbf{b}^2)} a^2 \tag{4}$$

является регуляризатором уравнения (1); регуляризованное уравнение имеет вид

$$\varphi - \frac{1}{\mathrm{a}(1-\mathbf{b}^2)} A(A^2 - b^2 I)\,\varphi = -BV \tag{5}$$

Для доказательства применяется теорема об отображении спектров [4], верная для линейных ограниченных операторов в банаховых пространствах. Пусть $\mathrm{P_n}(x)$ — полином степени n и A оператор, спектр которого определяется множеством $\{\lambda\}$, тогда спектр оператора $\mathrm{P_n}(A)$ определяется множеством $\{P_n(\lambda)\}$.

Исходя из этого, в равенстве (2) за регуляризатор B следует взять полином второй степени с произвольными коэффициентами c, d, e

$$B = \mathrm{c}\mathrm{I} + \mathrm{d}A + \mathrm{e}A^2$$

Подстановка этого оператора в (2) дает

$$\mathrm{B}\,(\mathrm{aI} - \mathrm{A})\,\varphi = (\mathrm{acI} - \mathrm{T})\,\varphi$$
$$\mathrm{T} = (\mathrm{c} - \mathrm{ad})\,\mathrm{A} + (\mathrm{d} - \mathrm{ae})\,\mathrm{A}^2 + \mathrm{eA}^3$$

Из сопоставления с равенством (2) видно, что для выполнения регуляризации необходимо потребовать, чтобы $\mathrm{ac} = 1$ и оператор T имел единственную точку сгущения спектра, равную нулю. В соответствии с теоремой об отображении спектров для этого необходимо, чтобы полином третьей степени

$$\mathrm{P}_3(\lambda) = (\mathrm{c} - \mathrm{ad})\,\lambda + (\mathrm{d} - \mathrm{ae})\,\lambda^2 + \mathrm{e}\lambda^3$$

обращался в нуль в трех точках $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{2,3} = \pm b$.

Условие будет выполнено, если положить

$$c = 1/a, \; d = 1/(1 - b^2), \; e = d/a$$

Такой подбор коэффициентов и определяет регуляризатор (4).

Применение регуляризатора (4) к уравнению (1) приводит к регуляризованному уравнению (5).

---

[1] *Мальцев Л. Е., Куриленко Е. Ю.* Спектральное представление сингулярного интегрального оператора теории упругости. 1985. 10 с. — ДЕП. в ВИНИТИ 5.02.86, № 841—В86.

Интегральные уравнения второй внутренней (2^+) и второй внешней (2^-) задач теории упругости записываются через оператор A^*, сопряженный с A

$$(hI - A^*)\,\varphi = -F \tag{6}$$

где $h = \pm 1$, причем $h = +1$ для задачи 2^-, F — вэктор напряжения в точках границы S упругого тела.

Оператор A^* действует по правилу

$$A^*\varphi = \int\limits_S \Phi(x, y)\cdot\varphi(x)\,dS_x$$

Теорема 3. Для упругих тел, ограниченных ляпуновской поверхностью S, операторы A и A^* различаются на вполне непрерывный оператор.

Доказательство дано в работе [5].

Теорема 4. Непрерывные спектры операторов A и A^* совпадают.

Доказательство следует из того факта, что символы операторов, отличающихся на вполне непрерывный оператор, совпадают [1].

Теорема 5. Оператор

$$B^* = \frac{1}{h}\,I + \frac{1}{1-b^2}\,A^* + \frac{1}{h(1-b^2)}\,A^{*2} \tag{7}$$

является регуляризатором уравнения (7). Регуляризованное уравнение имеет вид

$$\varphi - \frac{1}{h(1-b^2)}\,A^*(A^{*2} - b^2 I)\,\varphi = -B^*F \tag{8}$$

Доказательство аналогично теореме 2. Используется теорема [4].

Теорема 6. В регуляризаторах (4) и (7) операторы A и A^* взаимозаменяемы.

Для доказательства заменим в (5) оператор A на оператор A^* и учтем теорему 3. Полученное равенство будет отличаться от равенства (5) на вполне непрерывное слагаемое. Как известно [1], добавка к оператору произвольного вполне непрерывного оператора не нарушает свойства оператора быть регуляризатором, что и доказывает теорему 6.

Теорема 7. Регуляризаторы (4) и (7) являются эквивалентными регуляризаторами.

Для доказательства достаточно показать, что регуляризаторы B и B^* не имеют нулей, кроме тривиального [1].

Пусть, например, $B\varphi = 0$. Это значит, что число $\beta = 0$ принадлежит спектру оператора B. Так как оператор B полином второй степени от оператора A, то на основании теоремы об отображении спектров получим

$$\beta = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-b^2}\,\lambda + \frac{1}{a(1-b^2)}\,\lambda^2$$

$\{\lambda\}$ и $\{\beta\}$ — спектры операторов A и B. Полагая $\beta = 0$ и решая квадратное уравнение, можно получить $\lambda = (-a \pm \sqrt{4b^2 - 3})/2$.

Для реальных коэффициентов Пуассона $0 \leqslant \nu \leqslant {}^1/_2$ число λ оказывается комплексным, что противоречит известному факту о действительности спектра оператора A [2]. Поэтому $\beta \neq 0$ и уравнение $B\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений. Аналогично доказывается эквивалентность регуляризатора B^*.

Как следует из изложенного, трудности построения регуляризатора сместились в область детального исследования спектра. Кроме упрощения техники регуляризации представляет интерес и явная запись регуляризованных уравнений. Например, она использовалась [6] для обоснования метода механических квадратур применительно к интегральным уравнениям теории упругости.

Отметим, что регуляризатор (4) и регуляризованное уравнение (5) были построены ранее [7] без использования информации о спектре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
2. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. Функциональный анализ / Под ред. Крейна С. Г. М.: Наука, 1972. 544 с.

5. *Перлин П. И.* Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 366—371.
6. *Кустов Ю. А.* Метод механических кубатур для системы граничных сингулярных интегральных уравнений теории упругости // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Тез. докл. 4-го Всесоюз. симпоз. Харьков, 1989. С. 310—311.
7. *Мазья В. Г., Сапожникова В. Д.* Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости // Вестн. ЛГУ. Сер. Мат., мех., астрон. 1964. № 7. С. 165—167; поправка Вестн. ЛГУ. Сер. Физ., Хим. 1977. № 19. 160с.

Тюмень

Поступила в редакцию 5.VI.1990