5°. Уравнения (1.4)—(3.2) обобщаются на пластичность, ползучесть и соответствующие электрические (или магнитные) эффекты. Для краткости изложения рассмотрим только класс вязкоэлектроупругих материалов в следующей постановке. Заменим в (1.4), (1.5) нелинейные анизотропные функции нелинейными анизотропными операторами $f_{\gamma i}\,[x,\,t,\,\tau,\,\sigma\,(\tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=t},\ \ldots$, а константы α, β — линейными операторами

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \alpha\,(t,\tau)\,E_i\,(\tau)\,d\tau,\ \ldots$$

Пусть справедливы уравнения механо- и электростатики и материалы настолько «хороши», что они не разрушают тот тип начально-краевой задачи, который присущ соответствующим линейным изотропным однородным материалам. Используя обозначения

$$\gamma_i^*\,(t) = \gamma_i\,(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} \alpha\,(t,\tau)\,E_i\,(\tau)\,d\tau,\ \ldots$$

можно для ситуаций, аналогичных (2.1), (2.2), получать соотношения, аналогичные (2.3), (2.4), (3.1), (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З.* Об одной задаче электроупругости // Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: Моск ин-т хим. машиностроения, 1980. С. 3—13.
2. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 С.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 15. С. 90—99.
4. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Гараков В. Г.* Распространение магнитоупругих волн в пьезомагнитном полупространстве // Теоретические вопросы магнитоупругости: 3-й Всесоюз. симп. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. С. 22—25.

Новосибирск

Поступила в редакцию 2.IV.1990

УДК 539.3

А. Н. Цветков, М. И. Чебаков

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дается иллюстрация эффективности одного метода (см., например, [1, 2]) решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов, к которым сводятся многие задачи теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями (см., например, [3—9]). Метод основан на знании характера поведения решения систем при больших номерах, что может быть определено из анализа поведения решения исходных задач в особых точках. Это позволяет свести бесконечную систему к эффективно решаемой конечной системе. Метод не требует факторизации функций, позволяет найти главный член решения бесконечных систем, и вместе с этим найти в явном виде особенности решений задач в точках смены граничных условий. Предлагаемый подход практически не накладывает ограничений на параметры задач, а численная его реализация не требует больших затрат машинного времени ПЭВМ.

1. Задачи теории упругости со смешанными граничными условиями методами операционного исчисления для полубесконечных и ограниченных областей (полоса, слой, цилиндр, клин, конус, прямоугольник, круглая плита, кольцо и т. п.) могут быть сведены к решению парных (тройных и т. д.) интегральных уравнений или рядов-уравнений.

Для определенности рассмотрим тройной ряд-уравнение [3, 4] вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k K(u_k)\, y(u_k, x) = f(x) \quad (c \leqslant x \leqslant a) \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k y(u_k, x) = 0 \quad (d \leqslant x \leqslant c, \ a \leqslant x \leqslant b)$$

Здесь Q_k — искомые постоянные, $y(u_k, x)$ и u_k соответственно система собственных функций и собственных чисел некоторой задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка на конечном интервале (см. [3—4]), свойства функции $K(u)$ описаны там же.

В частных случаях при рассмотрении задач, связанных с определенной системой координат, функциями $y(u_k, x)$ являются либо тригонометрические функции, либо функции Бесселя, либо функции Лежандра, либо другие известные специальные функции.

Парные ряды (1.1), в которых $f(x) = y(i\varepsilon, x)$, $d = c = 0$, что не нарушает общности, могут быть сведены к исследованию бесконечных систем линейных алгебраических уравнений вида

$$BX = D \tag{1.2}$$

где $B = \{b_{mn}\}$ — матрица, $X = \{x_n\}$, $D = \{d_m\}$ — векторы бесконечного порядка. Конкретный вид систем (1.2) можно найти в работах [3—9]. Характерной особенностью системы (1.2) является то, что матрица B может быть представлена в виде

$$B = A + B_1, \ A = \{(\delta_n - \gamma_m)^{-1}\} \tag{1.3}$$

где $i\delta_n$ и $i\gamma_m$ — соответственно нули и полюса функции $K(u)$.

В реальных случаях [8] при $n \to \infty$

$$\delta_n = \beta n + b \pm ic_1 \ln n + O(n^{-1} \ln n) \tag{1.4}$$
$$\gamma_n = \beta n + g \pm ic_2 \ln n + O(n^{-1} \ln n)$$

поэтому матрица A содержит неубывающие по диагонали элементы. Элементы матрицы $B_1 = \{b^1_{mn}\}$ убывают с ростом m, n, по крайней мере обратно пропорционально номеру.

Практическое значение при решении контактных задач имеет функция распределения контактных напряжений под штампом, выражаемая через решение бесконечной системы (1.2) соотношением [2—8]

$$q(x) = K^{-1}(i\varepsilon)\, y(i\varepsilon, x) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{y(i\delta_n, x)}{y(i\delta_n, a)} \tag{1.5}$$

2. Если, например, зона контакта фиксирована, трение между штампом и упругим телом отсутствует, то

$$q(x) \sim \chi (x - a)^{-1/2} \ (x \to a, \ \chi = \text{const}) \tag{2.1}$$

Учитывая, что в отмеченных выше случаях при $n \to \infty$

$$y(i\delta_n, x) = O(e^{\delta_n x}) \ (c \leqslant x \leqslant a) \tag{2.2}$$

то соотношение (2.1) позволяет определить характер поведения коэффициентов x_n при $n \to \infty$ исходя из известной суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k = (1-x)^{-1/2} \quad (0 \leqslant x < 1) \tag{2.3}$$

Сопоставляя соотношения (1.5), (2.1)—(2.3), получим, что

$$x_n = O\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right) \quad \text{или} \quad \left[x_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (n \to \infty)\right] \tag{2.4}$$

Отмеченный выше факт позволяет бесконечную систему (1.2) свести к конечной системе уравнений, если предположить, что

$$x_n = x_N \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n \geqslant N, \quad x_N = \text{const}) \tag{2.5}$$

Тогда бесконечная система (1.2) будет с некоторой погрешностью эквивалентна системе из N уравнений

$$\sum_{n=1}^{N} b_{mn}x_n + B_m x_N = d_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, N)$$
$$B_m = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} b_{mn} \tag{2.6}$$

При этом, как показывает опыт, погрешность решения соответствующих задач после замены системы (1.2) системой (2.6) будет тем меньше, чем больше значение N.

3. Получение теоретических оценок сходимости метода связано с большими трудностями, поэтому эффективность его продемонстрируем на задаче теории упругости со смешанными граничными условиями, имеющей точное решение.

Рассмотрим задачу теории упругости о чистом сдвиге вдоль образующей штампом упругого бруса бесконечной длины с прямоугольным сечением [10]. Предполагается, что между штампом, симметрично расположенным на одной из граней бруса, и брусом осуществляется полное сцепление, при этом противоположная грань бруса неподвижна, а боковые грани свободны от напряжений.

Такая задача отражает все особенности других более сложных задач, если для их решения использовать метод сведения парных рядов к бесконечным системам с сингулярной матрицей.

Поставленная задача сводится [10] к исследованию парных рядов (1.1), в которых

$$y(u_k, x) = \cos u_k x, \quad f(x) = 1 \tag{3.1}$$
$$K(u) = u^{-1}\,\mathrm{th}\, uh, \quad u_k = \pi k/b, \quad c = d = 0$$

Здесь h — высота прямоугольника, $2b$ — его ширина, $2a$ — ширина штампа.

Элементы матрицы B_1 и правой части D бесконечной системы (1.2) описаны в работе [10].

Распределение касательных напряжений под штампом в соответствии с соотношением (1.5) определяется по формуле

$$q(x) = G\delta\left[\frac{1}{h} + \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\mathrm{ch}\,\delta_n x}{\mathrm{ch}\,\delta_n a}\right] \qquad (|x| \leqslant a) \tag{3.2}$$
$$\delta_n = \pi n/h, \quad \gamma_m = \pi(2m-1)/(2h)$$

где G — модуль сдвига, δ — смещение штампа.

Связь между смещением штампа и приложенной к нему силой T дается соотношением

$$T = G\delta\left[\frac{2a}{h} + \frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\delta_n}\,\mathrm{th}\,\delta_n a\right] \tag{3.3}$$

Матрица и правая часть бесконечной системы (1.2) поставленной задачи обладает всеми необходимыми свойствами, описанными в разд. 1. Поэтому в соответствии с предложенной схемой контактные напряжения и величину T найдем по формулам

$$q(x) = \frac{G\delta}{h}\left[1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \frac{\mathrm{ch}\,\delta_n x}{\mathrm{ch}\,\delta_n a} + x_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\mathrm{ch}\,\delta_n x}{\mathrm{ch}\,\delta_n a}\right] \tag{3.4}$$

$$T = \frac{2G\delta}{h}\left[a + \sum_{n=1}^{N-1} x_n \frac{\mathrm{th}\,\delta_n a}{\delta_n} + x_n \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\mathrm{th}\,\delta_n a}{\delta_n}\right] \tag{3.5}$$

где коэффициенты x_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений (2.6). Основная проблема для численной реализации полученных соотношений заключается здесь в вычислении суммы плохо сходящихся бесконечных рядов в (2.6) и (3.5). Члены этих рядов ведут себя при больших номерах n как $n^{-3/2}$. Эту трудность здесь легко преодолеть при помощи известного приема улучшения сходимости рядов [11], что позволяет их вычислять с высокой точностью и быстро с помощью конечных сумм.

Ряд в (3.4) при $0 \leqslant x < a$ сходится как бесконечная убывающая геометрическая прогрессия, при $x = a$ он расходится, но главную часть ряда в окрестности $x = a$ легко просуммировать и тем самым выделить особенность в поведении напряжений при $x \to a$.

Используя сумму ряда (2.3), получим соотношения для контактных напряжений с явно выделенной особенностью

$$q(x) = \frac{G\delta}{h}\left[1 + \sum_{n=1}^{N-1}\left(x_n - x_N \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)\frac{\operatorname{ch}\delta_n x}{\operatorname{ch}\delta_n a} - x_N + x_N\left(1 - e^{-\pi(a-x)/h}\right)^{-1/2} + \right.$$

$$\left. + x_N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{e^{-2\delta_n x} - e^{-2\delta_n a}}{1 + e^{-2\delta_n a}}\right] \tag{3.6}$$

Из последнего выражения найдем коэффициенты при особенности

$$K_0 = \lim_{x \to a} \sqrt{a^2 - x^2}\, q(x) = G\delta x_N \sqrt{2a/(\pi h)} \tag{3.7}$$

Поставленная в разд. 3 задача имеет точное решение [12, 13].

4. С целью проверки эффективности предложенной схемы решения бесконечной системы (1.2) для поставленной в разд. 3 задачи был произведен расчет безразмерных контактных напряжений $q^*(x) = q(x)\, a/(G\delta)$, сдвигающей силы $T^* = T/(G\delta)$ и коэффициента при особенности $K_0^* = K_0/(\sqrt{2}G\delta)$ по формулам (3.4)—(3.7) в зависимости от параметров $\lambda = h/a$, $\beta = b/a$ и числа уравнений N системы (2.6). Расчеты показали хорошую сходимость предложенной схемы решения рассмотренной модельной задачи. Для достижения заданной точности при уменьшении параметра λ или увеличении параметра β число уравнений N уменьшается. Характер сходимости метода мало зависит от параметров и таков, что позволяет контролировать точность путем сравнения результатов счета при различных значениях числа уравнений N.

N	$10^3 \cdot T^*$		$10^3 \cdot q^*(0{,}9)$		$10^3 \cdot K_0^*$	
	$\lambda = 5$	10	5	10	5	10
2	1280	1266	942	973	300	334
6	1231	979	895	718	273	222
10	1231	970	895	708	274	216
[13]	1231	970	894	707	275	218

В таблице приведены величины T^*, $q^*(0{,}9)$ и K_0^* при $\beta = \infty$ и некоторых значениях λ и N. В последней строке таблицы представлены значения этих же величин, вычисленных по точным соотношениям работ [12, 13]. Видно, что решение задачи по предложенной схеме может быть эффективно получено с небольшими затратами при $\lambda \leqslant 10$. Увеличивая число уравнений в системе (2.6), решение задачи можно получить практически при любых значениях параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений //Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. Т. 3. С. 41—167.
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев.: Наук. думка, 1978. 264 с.
3. *Бабешко В. А.* Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 4. С. 732—741.
4. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 1. С. 80—89.
5. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1. С. 55—58.
6. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 6. С. 1087—1097.
7. *Александров В. М.* Об одном методе сведения парных интегральных уравнений и парных радов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 324—332.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

9. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
10. *Чебаков М. И.* Сдвиг штампом бруса прямоугольного сечения // Жесткость машиностроительных конструкций: Тез. докл. Всесоюз. научно-техн. конф. Брянск, 1976. М.: МИХМ, 1976. С. 88—92.
11. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1969. 800 с.
12. *Александров В. М., Чебаков М. И.* О методе однородных решений в смешанных задачах теории упругости для усеченного клина и кольцевого сектора // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 790—798.
13. *Коваленко Е. В., Тарасов Д. Г., Чебаков М. И.* Точное решение антиплоской контактной задачи для конечных канонических областей // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 837—841.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 28.III.1990

УДК 539.3

В. Н. Кутрунов, Л. Е. Мальцев

СПЕКТРАЛЬНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Известно, что сингулярные интегральные операторы пространственной задачи теории упругости имеют три точки существенного спектра. Регуляризация выполняется посредством преобразования исходного уравнения, совмещающего эти три точки в одну. Дается явная запись регуляризаторов, регуляризованных уравнений.

Доказательство применимости альтернатив Фредгольма к сингулярным интегральным уравнениям теории упругости [1, 2] опирается на доказательство принципиальной возможности регуляризации этих уравнений.

Для явного построения реуляризаторов и регуляризованных уравнений исследуем спектр соответствующих сингулярных операторов.

Для первой внутренней (1^+) и первой внешней (1^-) задач теории упругости интегральные уравнения имеют вид

$$(\mathbf{a}\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\varphi = \mathbf{V} \tag{1}$$

где $\mathbf{I}$ — тождественный, $\mathbf{A}$ — сингулярный операторы, $\mathbf{V}$ — вектор перемещания точек у поверхности $\mathbf{S}$ упругого тела, $\mathbf{a} = \pm 1$, причем $\mathbf{a} = +1$ для задачи 1^+, φ — вектор плотности некоторого потенциала, посредством которого вычисляются перемещения точек упругого тела [3].

Действие оператора $\mathbf{A}$ определяется соотношением

$$A\varphi = \int\limits_S \varphi(x)\,\Phi(x, y)\,dS_x$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\,|r|^3}\left[(1-2\nu)(n_x r - r n_x - n_x \cdot r I) - 3\frac{n_x r}{|r|^3}\,rr\right]$$

$\Phi(x, y)$ — тензор второго ранга, ν — коэффициент Пуассона, $r = x - y$, x, y — радиус-векторы точек поверхности S, n_x — внешняя нормаль к поверхности S в точке x. В тексте использована символика прямого тензорного исчисления [3] с тем отличием, что тензоры и векторы не выделяются специальным написанием, а определяются из контекста.

Ядро $\Phi(x, y)$ содержит особенность типа $1/|r|^2$, поэтому интегральный оператор A сингулярен. Для регуляризации уравнения (1) необходимо существование сингулярного оператора B, обеспечивающего равенство

$$B(aI - A)\,\varphi = (I - T)\,\varphi = -BV \tag{2}$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Оператор B называется регуляризатором уравнения (1). Если уравнения (1) и (2) эквивалентны, то B — эквивалентный регуляризатор.