В результате $b_1 = 2aq/(KV_0) - 4Ta/\pi$, а экстремум выражается в виде

$$\left(\frac{S}{T^2}\right)_{\max} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} - 2\pi a^2\left(\frac{H}{TK'V_0} - \frac{2}{\pi} - \frac{E_1}{\pi^2}\right)^2$$

Полученные оценки могут применяться для более сложных схем потоков, если воспользоваться вариационными теоремами [1]. Если, например, в схеме *1* выдавить границу (фиг. 1, штриховая линия) или часть этой границы MN считать непроницаемой, то кривая депрессии поднимется, площади S, S_1 увеличатся, а соответствующие величины (5), (7) будут минорантами, хотя и нестрогими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
2. *Ильинский Н. Б., Касимов А. Р.* Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 76—80.
3. *Taylor G. I.* A model for the boundary condition of a porous material. P. I. // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt. 1. P. 319—326.
4. *Richardson S.* A model for the boundary condition of a porous material. // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt. 2 P. 327—336.
5. *Пыхтеев Г. Н.* К задаче о стройном обтекании криволинейной дуги в ограниченном и безграничном потоке идеальной несжимаемой жидкости. // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 4. С. 421—432.
6. *Dagan G.* Two solutions of free-surface flow in porous media. // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1967. V. 93. № 4. P. 1—8.
7. *Рудаков В. К.* Растекание произвольно расположенных в плане бугров грунтовых вод при наличии дренажа. // Водн. ресурсы. 1989. № 4. С. 55—70.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Казань

Поступила в редакцию 1.III.1990

УДК 539.3

© 1991 г.

С. Д. Клячко

ОБ УСЛОВИЯХ РАВЕНСТВА НУЛЮ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

Рассматриваются квазистационарные антиплоская деформация цилиндра (АДЦ) и кручение тела вращения (КТВ) в сочетании с электрическим или магнитным полем для нелинейных материалов. Анализируются условия, гарантирующие равенство нулю напряжений, перемещений, индукций и потенциала при любых граничных условиях.

Для квазистационарной АДЦ кругового сечения из линейного однородного трансверсально изотропного пьезоэлектрика при механически ненагруженном контуре, задании на части контура постоянного электрического потенциала и на части — условия сопряжения с вакуумом, а также для некоторых других задач подобного типа известно [1], что механические напряжения всюду равны нулю, а деформации и перемещения пропорциональны напряженности и потенциалу электрического поля. Ниже анализируются наличие этого свойства у определенного класса задач и некоторые сопутствующие вопросы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим квазистационарную (производные по времени равны нулю) АДЦ в сочетании с плоским электрическим полем для непроводящего нейтрального пьезоэлектрика. На основании известной аналогии все приводимые далее результаты справедливы и для КТВ в сочетании с осесимметричным электрическим полем. Для краткости изложения выкладки будут проводиться только применительно к АДЦ. Поперечное сечение цилиндра одно- или многосвязно и произвольно.

Пусть x_1, x_2, x_3 — ортонормированные координаты и ось x_3 параллельна образующей. Далее $i = 1, 2$; обозначения общепринятые. Пусть материал таков, что возможно состояние, при котором отличны от нуля (и не зависят от x_3) только $u_3 = u$; $\gamma_3 = \gamma_i$; $\sigma_{i3} = \sigma_i$; φ; E_i; D_i, т. е. возможна рассматриваемая АДЦ в сочетании с плоским электрическим полем ([1—4] и др.).

Выпишем уравнения задачи:

$$\sigma_{i,i} = 0; \ \gamma_i = u_{,i}; \ D_{i,i} = 0; \ E_i = \varphi_{,i} \tag{1.1}$$

(φ отличается знаком от обычно используемого).

Представим контур Γ в виде $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u = \Gamma_D + \Gamma_\varphi$. На Γ заданы граничные условия — механические и, одновременно, электрические:

$$\Gamma_\sigma: \sigma_i n_i = s_\sigma; \quad \Gamma_u: u = s_u \tag{1.2}$$

$$\Gamma_D: D_i n_i = s_D; \quad \Gamma_\varphi: \varphi = s_\varphi \tag{1.3}$$

Условимся случаи появления в u, φ произвольных аддитивных постоянных специально не оговаривать и эти постоянные фиксировать тривиальным образом.

Рассмотрим в рамках АДЦ два класса нелинейных анизотропных неоднородных материалов (тел) — назовем их A и B. Пусть класс A описывается уравнением состояния (уже приведенным к плоскости x_1, x_2)

$$\gamma = f_\gamma(x, \sigma) + \alpha E, \quad D = f_D(x, E) + \alpha\sigma \tag{1.4}$$

и класс B — аналогично приведенным уравнением состояния

$$E = f_E(x, D) + \beta\gamma, \quad \sigma = f_\sigma(x, \gamma) + \beta D \tag{1.5}$$

В уравнениях (1.4), (1.5) $x = \{x_1, x_2\}$, $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}, \ldots, f_\gamma = \{f_{\gamma 1}, f_{\gamma 2}\}, \ldots$; α, β — скалярные константы, не зависящие от x_1, x_2. Условимся в дальнейшем под нелинейностью, анизо- и изотропией, неоднородностью и т. д. понимать свойства уже приведенного к плоскости x_1, x_2 уравнения состояния (например, трансверсально изотропный к x_3 материал далее именуется изотропным).

Наложим для краткости изложения на классы A и B некоторые слабые ограничения. Начнем с класса A. Потребуем, чтобы каждый материал, а также «ассоциированные» с ним материалы $\gamma = f_\gamma(x, \sigma)$ и $D = f_D(x, E)$ сохраняли типы краевых задач, традиционные для соответствующих линейных изотропных однородных материалов, т. е. тип (1.2) и (1.3), тип (1.2), тип (1.3).

Под сохранением типа здесь, в частности, понимается существование и единственность решения (не обязательно в исходном классе функций) и равенство всех искомых функций нулю в том и только в том случае, когда все задаваемые по этому типу краевой задачи величины равны нулю.

Аналогичное ограничение наложим на класс B. Можно считать, что A и B — это достаточно широкие классы нелинейных анизотропных неоднородных материалов (множество «обычных» линейных изотропных однородных материалов принадлежит пересечению классов A и B).

2. Упрощение решения. Для классов A и B при некоторых сочетаниях участков Γ_σ, Γ_u, Γ_D, Γ_φ возможно облегчение процесса решения, которое заключается в замене исходной связанной задачи двумя несвязанными. Запишем такое сочетание для класса A, параллельно вводя некоторые обозначения, и то же сделаем для класса B:

$$\begin{gathered} \Gamma_u \subseteq \Gamma_\varphi, \quad s_u{}^* = s_u - \alpha s_\varphi, \quad s_D{}^* = s_D - \alpha s_\sigma \\ u^* = u - \alpha\varphi, \quad \gamma^* = \gamma - \alpha E, \quad D^* = D - \alpha\sigma \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \Gamma_\varphi \subseteq \Gamma_u, \quad s_\varphi{}^* = s_\varphi - \beta s_u, \quad s_\sigma{}^* = s_\sigma - \beta s_D \\ \varphi^* = \varphi - \beta u, \quad E^* = E - \beta\gamma, \quad \sigma^* = \sigma - \beta D \end{gathered} \tag{2.2}$$

Рассмотрим, какие упрощения предоставляют ситуации (2.1), (2.2). Начнем с класса A. Для материала из класса A в ситуации (2.1) можно вместо решения исходной задачи решить параллельно (независимо) чисто упругую задачу (для граничных условий $s_u{}^*$, s_σ и упругого «ассоциированного» материала) и чисто электрическую (s_φ, $s_D{}^*$, соответствующий материал), а затем по (2.1) найти оставшиеся компоненты решения. Запишем это утверждение, а также соответствующее утверждение для класса B в ситуации (2.2) в виде схем (пусть $\Rightarrow$ означает очередность):

$$u^*, \gamma^*, \sigma, \varphi, E, D^* \Rightarrow u, \gamma, D \tag{2.3}$$

$$\varphi^*, E^*, D, u, \gamma, \sigma^* \Rightarrow \varphi, E, \sigma \tag{2.4}$$

Так как линейные однородные изотропные материалы принадлежат пересечению классов A и B, то для них: из (2.1) следует (2.3), из (2.2) следует (2.4), при $\Gamma_u = \Gamma_\varphi$ применимы оба алгоритма (2.3), (2.4).

3. **Равенство решений нулю.** Следствием изложенного является семейство теорем о равенстве решений нулю для классов материалов A, B.

Начнем с класса A. Для него в ситуации (2.1) справедливы два утверждения. Первое заключается в следующем. Если задаваемые на Г функции s_σ, s_u^* равны нулю, то всюду в области, занимаемой телом:

$$\sigma = 0,\ \gamma = \alpha E,\ u = \alpha\varphi$$

при любых граничных условиях электрической задачи s_D, s_φ, которая может быть решена для электрического «ассоциированного» материала. Запишем это утверждение, второе утверждение для класса A и два утверждения для класса B при ситуации (2.2) в виде следующих схем:

$$(s_\sigma,\ s_u^* = 0) \to (\forall s_D,\ s_\varphi\colon \sigma = 0;\ \gamma = \alpha E;\ u = \alpha\varphi) \tag{3.1}$$
$$(s_D^*,\ s_\varphi = 0) \to (\forall s_\sigma,\ s_u\colon D = \alpha\sigma;\ E = 0;\ \varphi = 0)$$
$$(s_\sigma^*,\ s_u = 0) \to (\forall s_D,\ s_\varphi\colon \sigma = \beta D;\ \gamma = 0;\ u = 0) \tag{3.2}$$
$$(s_D,\ s_\varphi^* = 0) \to (\forall s_\sigma,\ s_u\colon D = 0;\ E = \beta\gamma;\ \varphi = \beta u)$$

Для линейных изотропных однородных материалов при совпадении ситуаций (2.1), (2.2) справедливы обе схемы (3.1), (3.2).

Утверждения (3.1), (3.2) записаны для общего вида граничных условий (1.2), (1.3) смешанной задачи. В случае так называемых «основных» краевых задач формулировки теорем становятся лаконичнее.

Отметим очевидное положение. Аналогия между задачами АДЦ с уравнениями состояния (1.4) и (1.5) (при $f_\gamma \leftrightarrow f_E$, $f_\sigma \leftrightarrow f_D$, $\alpha \leftrightarrow \beta$) есть частный случай более общей аналогии между задачами АДЦ с любыми уравнениями состояния $F_\mu(x, \gamma, \sigma, E, D) = 0$ $(\mu = 1, \ldots, 4)$ и $F_\mu(x, E, D, \gamma, \sigma) = 0$.

4. **Применение изложенного.** В настоящее время, как известно, используются пьезоэлектрические свойства у различных типов материалов (монокристаллы, керамика, полимеры и др.). Некоторые из этих материалов входят в класс A.

Приведем пример. Пусть имеется бесконечный керамический цилиндр с кусочно-однородным поперечным сечением, т. е. тело, состоящее из нескольких бесконечных цилиндров, изготовленных из различных керамических материалов и идеально соединенных между собой по цилиндрическим поверхностям. Поперечное сечение и его разбиение на куски-подобласти произвольны. Характеристики керамики зависят, как известно, от степени предварительной поляризации вдоль оси x_3, поэтому при изготовлении цилиндров-составляющих степени поляризации могут быть приняты так, чтобы для всех материалов величина α оказалась одинаковой. После соединения цилиндров получим тело класса A.

В качестве другого примера рассмотрим пьезоэлектрики из армированных (композитных) керамик и полимеров (по этому вопросу есть много публикаций). Варьируя стандартным образом параметры данных сред (концентрацию, направление и материал волокон, материал матрицы и т. п.), можно получать анизотропные неоднородные тела класса A. Более детально примеры здесь не рассматриваются, так как основная цель настоящего сообщения только констатация того факта, что при всяких (в рамках класса A) нелинейности, анизотропии и неоднородности материала по сечению (а также форме самого сечения) в задаче АДЦ имеет место эффект В. З. Партона [1] (это касается существующих материалов и материалов, которые могут быть созданы). Равенство механических напряжений нулю в конструкции есть в определенном смысле рациональный признак, поэтому изложенное может использоваться в задачах оптимизации. Аналогичные соображения относятся к материалам класса B.

Замечания. 1°. Приведенные здесь условия расщепления задач и равенства решений нулю достаточны; их необходимость не обсуждается.

2°. Изложенное распространяется на случай магнитного поля в пьезомагнетике.

3°. Как отмечалось выше, все результаты для АДЦ обобщаются на случай КТВ в сочетании с осесимметричным электрическим (или магнитным) полем. Тело вращения может иметь произвольные неоднородность, анизотропию и нелинейность (в рамках уравнений состояния, являющихся образами (1.4), (1.5)) и одно- или многосвязное произвольное меридианное полусечение.

4°. Поперечное сечение цилиндра или меридианное полусечение тела вращения могут содержать криволинейные разрезы (трещины), по берегам которых задаются разрывы u (порождающие дислокацию Сомилианы, в частном случае — Вольтерры) и разрывы электрического или магнитного потенциалов.

5°. Уравнения (1.4)—(3.2) обобщаются на пластичность, ползучесть и соответствующие электрические (или магнитные) эффекты. Для краткости изложения рассмотрим только класс вязкоэлектроупругих материалов в следующей постановке. Заменим в (1.4), (1.5) нелинейные анизотропные функции нелинейными анизотропными операторами $f_{\gamma i}\,[x, t, \tau, \sigma(\tau)]_{\tau=-\infty}^{\tau=t}, \ldots$, а константы α, β — линейными операторами

$$\int_{-\infty}^{t} \alpha(t, \tau)\, E_i(\tau)\, d\tau, \ \ldots$$

Пусть справедливы уравнения механо- и электростатики и материалы настолько «хороши», что они не разрушают тот тип начально-краевой задачи, который присущ соответствующим линейным изотропным однородным материалам. Используя обозначения

$$\gamma_i^*(t) = \gamma_i(t) - \int_{-\infty}^{t} \alpha(t, \tau)\, E_i(\tau)\, d\tau, \ \ldots$$

можно для ситуаций, аналогичных (2.1), (2.2), получать соотношения, аналогичные (2.3), (2.4), (3.1), (3.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З.* Об одной задаче электроупругости // Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: Моск ин-т хим. машиностроения, 1980. С. 3—13.
2. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 С.
3. *Улитко А. Ф.* К теории колебаний пьезокерамических тел // Тепловые напряжения в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 15. С. 90—99.
4. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н., Гараков В. Г.* Распространение магнитоупругих волн в пьезомагнитном полупространстве // Теоретические вопросы магнитоупругости: 3-й Всесоюз. симп. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1984. С. 22—25.

Новосибирск

Поступила в редакцию
2.IV.1990

УДК 539.3

А. Н. Цветков, М. И. Чебаков

ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дается иллюстрация эффективности одного метода (см., например, [1, 2]) решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений первого рода с сингулярной матрицей коэффициентов, к которым сводятся многие задачи теории упругости и математической физики со смешанными граничными условиями (см., например, [3—9]). Метод основан на знании характера поведения решения систем при больших номерах, что может быть определено из анализа поведения решения исходных задач в особых точках. Это позволяет свести бесконечную систему к эффективно решаемой конечной системе. Метод не требует факторизации функций, позволяет найти главный член решения бесконечных систем, и вместе с этим найти в явном виде особенности решений задач в точках смены граничных условий. Предлагаемый подход практически не накладывает ограничений на параметры задач, а численная его реализация не требует больших затрат машинного времени ПЭВМ.

1. Задачи теории упругости со смешанными граничными условиями методами операционного исчисления для полубесконечных и ограниченных областей (полоса, слой, цилиндр, клин, конус, прямоугольник, круглая плита, кольцо и т. п.) могут быть сведены к решению парных (тройных и т. д.) интегральных уравнений или рядов-уравнений.