

УДК 532.546

© 1991 г.

А. Р. Касимов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛИВА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Отыскивается экстремум площади сечения области подтопления или осушения в задаче инфильтрационного притока на свободную поверхность грунтового потока. Находится контур совершенной дрены максимальной емкости при питании с затопленной поверхности грунта. Строится управление границей канала для течения вязкой жидкости.

В теории фильтрации для оценки характеристик потоков используются изопериметрические неравенства, основанные на решении задач оптимизации формы области течения [1]. Ниже такие задачи решены методом [2] для трех схем: инфильтрация над напорным горизонтом, приток к горизонтальной совершенной дрене, течение продольного сдвига в ячейке Тейлора — Ричардсона.

Рассмотрим следующие схемы двумерного установившегося течения с вертикальной осью симметрии: 1) инфильтрация с неравномерной интенсивностью и расходом $2q$ в полосе BC ширины $2L$ при наличии под депрессионной кривой напорного горизонта на глубине H (фиг. 1), 2) питание с дебитом $2q$ при действующем напоре H одиночной дрены BC на водоупоре, залегающем на глубине T под затопленной поверхностью грунта (фиг. 2), 3) течение вязкой жидкости в канале ширины $2L$ над криволинейным дном BC под действием движущейся со скоростью U_0 границы AD , которая испытывает сопротивление F_0 (фиг. 3). Если в схемах 1, 2 фильтрацию считать линейной, грунт однородным и изотропным, а в схеме 3 использовать допущения [3, 4], то потенциал $\varphi(x, y)$ для схем 1, 2 и скорость течения $u(x, y)$ для 3 будут удовлетворять уравнению Лапласа в соответствующей области течения G_2 .

Сформулируем задачи оптимизации границы G_2 .

Задача 1. При заданных q, L, H определить форму BC , обеспечивающую экстремум площади S зоны подтопления под полосой питания.

Задача 2. При заданных q, T, H определить контур дрены экстремальной емкости S .

Задача 3. При заданных F_0, U_0, L определить форму дна BC , такую, чтобы площадь S ячейки была экстремальной.

Положим коэффициент фильтрации равным единице и введем характеристические функции: 1) функцию Жуковского $\omega = z + iw$, 2) комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$, 3) комплексный потенциал $p = u + iv$. В плоскости ω, w, p областям G_1, G_2, G_3 будут соответствовать: 1) полоса, 2, 3) прямоугольники, которые обозначим G_1, G_2, G_3 . Отобразим G_i на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ функциями

$$\omega = -\frac{H}{\pi} \ln \frac{a + \zeta}{a - \zeta}, \quad a = \text{cth} \frac{\pi(L - q)}{2H} \quad (1)$$

$$w = iqF(\arcsin \zeta, \lambda)/K, \quad q/H = K/K', \quad a = 1/\lambda$$

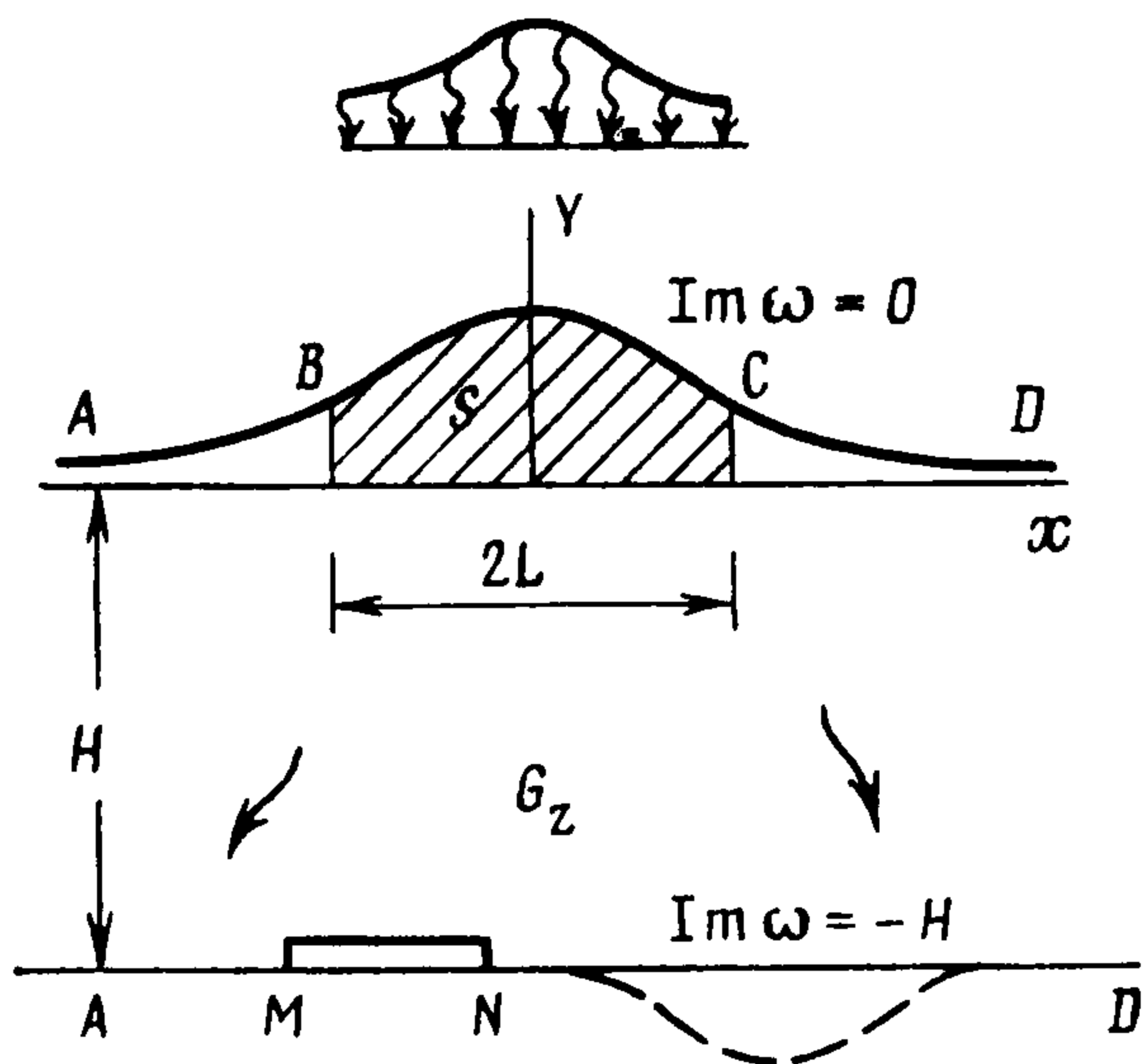
$$p = -iF_0F(\arcsin \zeta, \lambda)/(2K), \quad F_0/U_0 = 2K/K'$$

$$K = F(\pi/2, \lambda), \quad K' = F(\pi/2, \lambda'), \quad \lambda' = \sqrt{1 - \lambda^2}$$

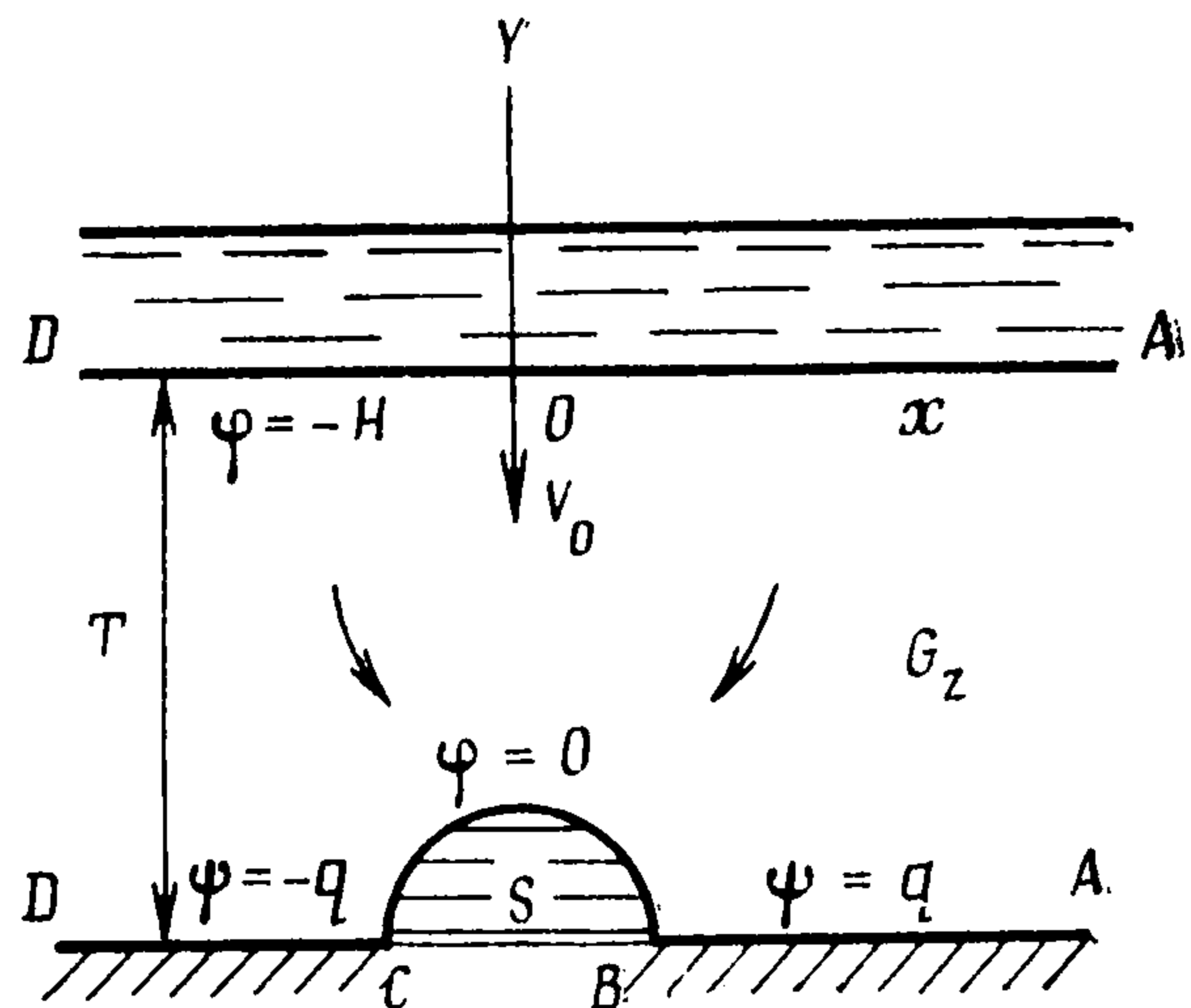
где F — эллиптический интеграл первого рода с модулем λ .

В схеме 1 функция $w^* = -iw$, в схемах 2, 3 функция $z = x + iy$ являются аналитическими в полуплоскости $\text{Im } \zeta = 0$, а краевые условия для них имеют вид:

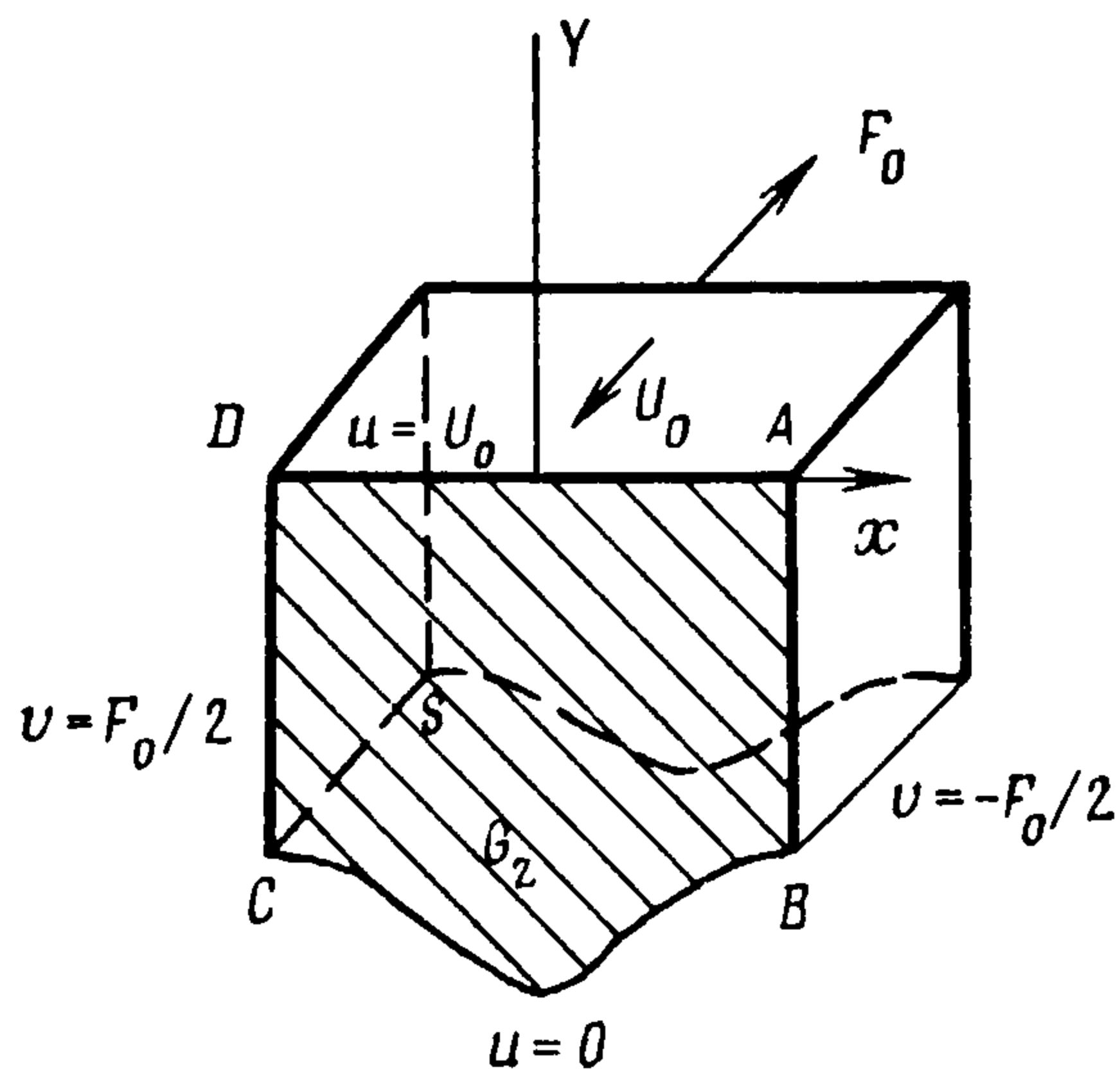
1) $\Psi = \text{Im } w^* = 0$ при $|\xi| \geq a$, $\Phi = \text{Re } w^* = q$ при $-a \leq \xi \leq -1$, $\Phi = -q$ при $1 \leq \xi \leq a$, $\Phi = f[\text{Re } \omega(\xi)]$ при $-1 \leq \xi \leq 1$; 2) $y = 0$ при $|\xi| > a$, $y = -T$ при $1 \leq |\xi| < a$, $y = -T + y[\psi(\xi)]$ при $|\xi| \leq 1$; 3) $y = 0$ при $|\xi| \geq a$, $x = \pm L$ при $1 \leq |\xi| \leq a$, $x = x[v(\xi)]$ при $|\xi| \leq 1$. Тогда решение смешанной краевой



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

задачи для схемы 1 и функция управления таковы:

$$w^* = -\frac{q}{\pi} \sqrt{\zeta^2 - a^2} \left[\int_{-a}^{-1} R(\tau, \zeta) d\tau - \int_1^a R(\tau, \zeta) d\tau - \int_{-1}^1 \tau R(\tau, \zeta) d\tau + \int_{-1}^1 \Omega(\tau) R(\tau, \zeta) d\tau \right] \quad (2)$$

$$R(\tau, \zeta) = 1/[\sqrt{a^2 - \tau^2} (\tau - \zeta)], \quad f[\operatorname{Re} \omega(\xi)] = -q\xi + q\Omega(\xi), \quad \Omega(\pm 1) = 0$$

где из ветвей $\sqrt{\zeta^2 - a^2}$ выбрана положительная при $\zeta > a$.

Решение записанной выше задачи Дирихле для схемы 2 имеет вид

$$z = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y[\psi(\tau)]}{\tau - \zeta} d\tau - \frac{T}{\pi} \ln \frac{a - \zeta}{a + \zeta} + x(\infty) \quad (3)$$

где $x(\infty) = 0$ в силу симметрии относительно оси y .

Для схемы 3 интегральное представление совпадает с (2), если заменить w^* на z , q на L , Ω на X , а управление записать так: $x[v(\xi)] = L\xi - LX(\xi)$, $X(\pm 1) = 0$.

Решение задачи 1—3 будем отыскивать в классе функций $f[\operatorname{Re} \omega]$ и $y[\psi]$, $x[v]$, удовлетворяющих условию Гельдера. Представим управления в (2), (3) в виде таких рядов, чтобы функционалы площади записывались в виде квадратичных форм коэффициентов этих рядов, а возможные ограничения — в виде линейных форм. Так, если в (2) осуществить предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi \in [-1, 1]$, сделать замену [5] $\xi = a \cos \theta / \sqrt{a^2 - \sin^2 \theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ и записать $\Omega[\xi(\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sin 2n\theta$ (суммирование по n от 1 до ∞), то из параметрических уравнений участка BC кривой депрессии получим

$$\frac{S}{q^2} = - \int_{-1}^1 y(\xi) x'(\xi) d\xi = \pi \sum n a_{2n}^2 + S_0 + a(1 - a^2) \sum a_{2n} (J_{2n} + P_{2n}) \quad (4)$$

$$S_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 y_0(\xi) x_0'(\xi) d\xi, \quad P_{2n} = \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta \sin \theta}{(a^2 - \sin^2 \theta)^{3/2}} \left[1 + \frac{2H}{\pi q} \frac{a^2 - \sin^2 \theta}{a(a^2 - 1)} \right] d\theta$$

$$x_0(\xi) = -\xi - \frac{H}{\pi q} \ln \frac{a + \xi}{a - \xi}, \quad y_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \left[2 \arcsin \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - \xi^2} + \ln \frac{A_1 A_2}{a^2 (1 - \xi^2)} - \right. \\ \left. - \xi \ln \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \right], \quad A_{1,2} = \sqrt{a^2 - 1} \sqrt{a^2 - \xi^2} + a^2 \mp \xi$$

Невырожденный экстремум функционала площади в (4) — минимум, и для него аналогично [2] можно записать

$$(S/q^2)_{\min} = S_0 - a^2 (1 - a^2)^2 \sum (P_{2n} + J_{2n})^2 / (4\pi n) \quad (5)$$

Решение задачи 3 отличается от (5) заменой J_{2n} на $-J_{2n}$, причем в этом случае

$$S_0 = \int_{-1}^1 y_0(\xi) d\xi, \quad P_{2n} = \int_0^\pi \cos 2n\theta \sin \theta / (a^2 - \sin^2 \theta)^{3/2} d\theta$$

В схеме 2 управление представим в виде ряда

$$y[\psi(\xi)] = \sum b_n U_n(\xi), \quad U_n = \sin(n \arccos \xi)$$

Тогда

$$S = \int_{-1}^1 \{y[\psi(\xi)] + T\} x'(\xi) d\xi = -\frac{\pi}{2} \sum n b_n^2 + \frac{2Ta}{\pi} \sum b_{2n-1} E_{2n-1}$$

$$E_{2n-1} = \int_0^\pi \sin(2n-1)x \sin x (a^2 - \cos^2 x)^{-1} dx$$

Отсюда следует, что невырожденный экстремум — максимум задачи 2, и для него

$$(S/T^2)_{\max} = 2a^2 \pi^{-3} \sum E_{2n-1}^2 / (2n-1) = \pi^{-1} \ln(a/\sqrt{a^2-1}) \quad (6)$$

Оценка (5) может использоваться при исследовании затухания бугров грунтовых вод, поскольку объем или площадь зоны возмущения естественного уровня грунтовых вод определяет скорость затухания как в гидродинамической [6], так и в гидравлической модели [7]. Площадь этой зоны входит и в выражение для скорости фильтрации на подошве пласта AD , получаемое из формул конформного отображения близких областей — полос [8].

Исходные задачи 1–3 могут быть видоизменены как за счет рассмотрения иных схем течения, так и за счет введения дополнительных ограничений или изменения целевого функционала. Например, если в схеме 1 линия AD — контур питания, а не стока, т. е. если рассматривать испарение с BC , то в (1) необходимо поменять L — q на $L + q$, а в (4) — знак у S/q^2 . Если в схеме 2 область G_z повернуть на угол π относительно точки $(0, -T)$ и заменить линии тока на эквипотенциалы и наоборот, то соотношение (6) даст оценку площади подземной части непроницаемого флютбета плотины.

Если в задаче 1 отыскивать экстремум площади S_1 под всей кривой $ABCD$, то, осуществив в (2) предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi$, $1 \leq |\xi| \leq a$ и записав уравнение участков AB и CD , получим

$$S_1/q^2 = S/q^2 + 4H(\pi q)^{-1} \sum a_{2n} W_{2n} + S_0^*$$

$$S_0^* = \frac{4aH}{\pi q} \int_1^a \frac{y_0(\xi)}{a^2 - \xi^2} d\xi, \quad W_{2n} = \int_0^\infty \frac{\exp(-2n\theta_0) \operatorname{sh} \theta_0}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sh}^2 \theta_0}} d\theta_0$$

а экстремум выражается рядом

$$(S_1/q^2)_{\min} = S_0 + S_0^* - \sum [2HW_{2n}(\pi q)^{-1} + 1/2 a(1-a^2)(J_{2n} + P_{2n})]^2 / (\pi n) \quad (7)$$

В задачах промывки засоленных пластов дренажем или переноса загрязнений в скважины водозабора существенное значение имеют скорости фильтрации, в соответствии с чем введем в постановку задачи 2 дополнительное ограничение — скорость V_0 в точке O над дренажем. Поскольку $V_0 = \lim \psi'(\xi)/x'(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, то $\psi'(\xi)$ выпишем из (1), а для $x'(\xi)$ на AD запишем согласно (3) степенной ряд

$$x' = 2a\pi^{-1}T/(a^2 - \xi^2) - \sum n b_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n / \sqrt{\xi^2 - 1}$$

В результате $b_1 = 2aq/(KV_0) - 4Ta/\pi$, а экстремум выражается в виде

$$\left(\frac{S}{T^2}\right)_{\max} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} - 2\pi a^2 \left(\frac{H}{TK'V_0} - \frac{2}{\pi} - \frac{E_1}{\pi^2}\right)^2$$

Полученные оценки могут применяться для более сложных схем потоков, если воспользоваться вариационными теоремами [1]. Если, например, в схеме I выдвинуть границу (фиг. 1, штриховая линия) или часть этой границы MN считать непроницаемой, то кривая депрессии поднимется, площади S , S_1 увеличатся, а соответствующие величины (5), (7) будут минорантами, хотя и нестрогими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
2. Ильинский Н. Б., Касимов А. Р. Фильтрационная оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 76—80.
3. Taylor G. I. A model for the boundary condition of a porous material. P. I. // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt. 1. P. 319—326.
4. Richardson S. A model for the boundary condition of a porous material. // J. Fluid Mech. 1971. V. 49. Pt. 2 P. 327—336.
5. Пыхтеев Г. Н. К задаче о стройном обтекании криволинейной дуги в ограниченном и безграничном потоке идеальной несжимаемой жидкости. // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 4. С. 421—432.
6. Dagan G. Two solutions of free-surface flow in porous media. // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1967. V. 93. № 4. P. 1—8.
7. Рудаков В. К. Растекание произвольно расположенных в плане бугров грунтовых вод при наличии дренажа. // Водн. ресурсы. 1989. № 4. С. 55—70.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Казань

Поступила в редакцию
1.III.1990

УДК 539.3

© 1991 г.

С. Д. Клячко

ОБ УСЛОВИЯХ РАВЕНСТВА НУЛЮ РЕШЕНИЙ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

Рассматриваются квазистационарные антиплоская деформация цилиндра (АДЦ) и кручение тела вращения (КТВ) в сочетании с электрическим или магнитным полем для нелинейных материалов. Анализируются условия, гарантирующие равенство нулю напряжений, перемещений, индукций и потенциала при любых граничных условиях.

Для квазистационарной АДЦ кругового сечения из линейного однородного трансверсально изотропного пьезоэлектрика при механически ненагруженном контуре, задании на части контура постоянного электрического потенциала и на части — условия сопряжения с вакуумом, а также для некоторых других задач подобного типа известно [1], что механические напряжения всюду равны нулю, а деформации и перемещения пропорциональны напряженности и потенциалу электрического поля. Ниже анализируются наличие этого свойства у определенного класса задач и некоторые сопутствующие вопросы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим квазистационарную (производные по времени равны нулю) АДЦ в сочетании с плоским электрическим полем для непроводящего нейтрального пьезоэлектрика. На основании известной аналогии все приводимые далее результаты справедливы и для КТВ в сочетании с осесимметричным электрическим полем. Для краткости изложения выкладки будут проводиться только применительно к АДЦ. Поперечное сечение цилиндра одно- или многосвязно и произвольно.

Пусть x_1, x_2, x_3 — ортонормированные координаты и ось x_3 параллельна образующей. Далее $i = 1, 2$; обозначения общепринятые. Пусть материал таков, что возмож-