Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 539.3 : 534.1

О. Ю. Жарий

МОДОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Дается обобщение метода собственных функций (МСФ) в задачах динамической электроупругости [1], допускающее большее разнообразие физически реализуемых граничных условий.

На основе МСФ разрабатывается так называемая модовая теория электромеханического преобразования энергии. Ее основная идея состоит в установлении связи между динамическим коэффициентом электромеханической связи (КЭМС) заданного поля перемещений и модовыми, или парциальными, КЭМС отдельных мод колебаний. Последние, являясь нелинейными интегральными характеристиками нормальных мод, играют такую же фундаментальную роль по отношению к первому, как собственные функции (нормальные моды) — по отношению к полному решению задачи электроупругости.

В явном виде находятся коэффициенты разложения по собственным функциям (СФ) поля перемещений, реализующего мексимально достижимое для данной геометрии, расположения электродов и способа подвода — съема электрической энергии значение КЭМС.

1. Для системы уравнений движения пьезоэлектрической среды [2, 3]

$$c_{ijkl}^{E}u_{k,lj}+e_{kij}\psi_{,kj}+F_i-\rho u_i^{\cdot\cdot}=0,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\varepsilon_{ik}^{S}\psi_{,ki}=0 \tag{1.1}$$

отыскивается решение $u_i(x,t)$, $\psi(x,t)$ в объеме V, удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i(x,0)=u_{i0}(x),\ u_i^{\cdot}(x,0)=v_{i0}(x),\ x\in V \tag{1.2}$$

и в каждой точке границы $S=S_1+S_2=S_3+S_4$ — одному из механических и электрических граничных условий

$$u_i=f_i(x,t),\ x\in S_1;\ n_j\tau_{ij}=g_i(x,t),\ x\in S_2 \tag{1.3}$$

$$\psi=\psi_\nu(t),\quad x\in S_\nu,\quad \bigcup_{\nu=1}^{N}S_\nu=S_3;\quad n_iD_i=0,\quad x\in S_4$$

Каждый из N электродов S_ν ($\nu=1,2,\ldots,N$) может быть подключен к генератору напряжения — в этом случае соответствующее ψ_ν известно. Если же задано значение тока через электрод, в частности, ток может быть равным нулю (пассивный электрод), неизвестный потенциал $\psi_\nu(t)$ определяется по данным (равным нулю для пассивных электродов) величинам полных зарядов

$$Q_\nu\equiv-\int_{S_\nu}n_iD_i\,dS=Q_\nu(t) \tag{1.4}$$

В зависимости от способов подключения электродов для решения задачи (1.1)—(1.3) удобно использовать различные системы СФ. Однако во всех случаях, следуя работе [1], имеем один и тот же вид представлений решения по МСФ

$$u_i=\sum_{m=1}^{\infty}U_i^{(m)}(x)q_m(t),\quad \psi=\varphi(x,t)+\sum_{m=1}^{\infty}\Psi^{(m)}(x)q_m(t) \tag{1.5}$$

где $U_i^{(m)}$, $\Psi^{(m)}$ — решения задачи на собственные значения

$$c_{ijkl}^E U_{k,lj}^{(m)} = e_{kij}\Psi_{,kj}^{(m)} + \rho\Omega_m{}^2 U_i^{(m)} = 0, \quad e_{ikl}U_{k,li}^{(m)} - \varepsilon_{ik}^S \Psi_{,ki}^{(m)} = 0$$

$$U_i^{(m)} = 0, \ x \in S_1; \ n_j\tau_{ij}^{(m)} = 0, \ x \in S_2 \tag{1.6}$$

$$\Psi_\nu^{(m)} = 0 \text{ или } \Psi_\nu^{(m)} = \mathrm{const}, \quad Q_\nu^{(m)} \equiv -\int\limits_{S_\nu} n_i D_i\, dS = 0, \quad x \in S_\nu$$

$$n_i D_i^{(m)} = 0, \ x \in S_4$$

соответствующие собственным частотам Ω_m, а φ — несвязанный потенциал, определяемый из задачи

$$\varepsilon_{ik}^S \varphi_{,ki} = 0, \quad x \in V; \quad \varphi = \psi_\nu(t), \quad x \in S_\nu; \quad n_i\varepsilon_{ik}^S\varphi_{,k} = 0, \quad x \in S_4 \tag{1.7}$$

причем для тех же номеров электродов ν, для которых заданы $Q_\nu(t)$ (1.4) и соответственно нулевые $Q_\nu^{(m)}$ в (1.6), следуют условия на несвязанные заряды $Q_\nu{}^u$:

$$Q_\nu{}^u \equiv \int\limits_{S_\nu} n_i \varepsilon_{ik}^S \varphi_{,k}\, dS = Q_\nu(t) \tag{1.8}$$

Выше в дополнение к принятым в [1] обозначениям введены следующие: $\Psi_\nu^{(m)}$ и $Q_\nu^{(m)}$ — потенциал и собственный связанный (поляризационный) заряд, индуцируемые m-й СФ на ν-м электроде,

$$\tau_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^E U_{k,l}^{(m)} + e_{kij}\Psi_{,k}^{(m)}, \quad D_i^{(m)} = e_{ikl}U_{k,l}^{(m)} - \varepsilon_{ik}^S \Psi_{,k}^{(m)}$$

— напряжения и индукция в объеме, соответствующие m-й СФ.

Функции времени $q_m(t)$ в (1.5) определяются начальными и граничными условиями

$$q_m(t) = q_m(0)\cos\Omega_m t + q_m{}^\cdot(0)\frac{\sin\Omega_m t}{\Omega_m} + \frac{1}{\Omega_m}\int\limits_0^t \Phi_m(\tau)\sin\Omega_m(t-\tau)\, d\tau$$

$$q_m(0) = \int\limits_V \rho u_{i0} U_i^{(m)}\, dV, \quad q_m{}^\cdot(0) = \int\limits_V \rho v_{i0} U_i^{(m)}\, dV \tag{1.9}$$

$$\Phi_m(t) = \int\limits_V F_i U_i^{(m)}\, dV - \int\limits_{S_1} n_j\tau_{ij}^{(m)} f_i\, dS + \int\limits_{S_2} U_i^{(m)} g_i\, dS + $$

$$+ \sum_{\nu=1}^N [\psi_\nu(t)Q_\nu^{(m)} - \Psi_\nu^{(m)}Q_\nu(t)]$$

Из (1.6) и (1.9) видно, что при выборе соответствующей системы СФ неизвестные потенциалы $\psi_\nu(t)$ умножаются на нулевые $Q_\nu^{(m)}$ и не входят в выражения для $q_m(t)$.

Для дальнейшего важно отметить, что описанная схема МСФ сохраняется и в случае, когда несколько электродов короткозамкнуты, например $\psi_1 = \psi_2$. Неизвестная величина ψ_1 выпадает из-под знака суммы в (1.9), если система СФ удовлетворяет условиям

$$\Psi_1^{(m)} = \Psi_2^{(m)}, \ Q_1^{(m)} + Q_2^{(m)} = 0 \tag{1.10}$$

Все системы СФ, построенные для различных способов электрического нагружения, обладают описанными в [1] свойствами. Выбор той или иной из них в конкретной задаче определяется способом подвода и съема электрической энергии.

Если пьезоэлектрическая связанность исчезает, т. е. все пьезомодули e_{ikl} стремятся к нулю, то и первоначальная задача и задача на собственные значения распадаются на несвязанные механическую и электростатическую задачи. Механическая задача по-прежнему имеет собственные значения, и решение для u_i сохраняет свой вид, аналогичный представлению из чистой теории упругости. Между тем электростатическая «задача на собственные значения» не содержит спектрального параметра и не имеет СФ, вследствие чего все $\Psi^{(m)}$ обращаются в ноль. Таким образом, по своему физическому смыслу и в соответствии с названием, а также и по способу отыскания в схеме МСФ функция $\varphi(x, t)$ есть полное решение несвязанной электростатической задачи.

Приведенная формулировка МСФ справедлива и в случае, если часть электродов расположена в объеме пьезоэлектрического тела — необходимо лишь заменить формулы для зарядов (1.4), (1.6), (1.8), вычисляя их по скачку электрической индукции при переходе через электрод [2, 4].

Подставив разложения (1.5) в формулу для потенциальной энергии пьезоэлектрической среды [2, 3]

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\tau_{ij}\varepsilon_{ij} + E_k D_k)\, dV$$

с использованием ортогональности СФ перемещений [1] и обозначив φ_ν значение несвязанного потенциала φ на ν-м электроде, после необходимых преобразований получим

$$U = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m^2 q_m^2 + \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu Q_\nu^u - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu Q_\nu^u \tag{1.11}$$

Выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T \equiv \frac{1}{2}\int_V \rho u_i^{\boldsymbol{\cdot}} u_i^{\boldsymbol{\cdot}}\, dV = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} q_m^{\boldsymbol{\cdot}2}$$

2. При вычислении динамических КЭМС на основе МСФ необходимо иметь соотношения между величинами несвязанных зарядов Q_ν^u и значениями φ_ν. Поскольку поле несвязанного потенциала электростатическое, эти соотношения имеют вид

$$Q_\mu^u = \sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu}\varphi_\nu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, N$$

где $\| c_{\mu\nu} \|$ — симметричная $(N \times N)$-матрица статических емкостей [5], компоненты которой отыскиваются из задачи электростатического нагружения пьезоэлектрического тела при постоянных деформациях и считаются известными.

Сумма несвязанных зарядов на электродах всегда равна нулю

$$\sum_{\mu=1}^{N} Q_\mu^u = 0 \tag{2.1}$$

Это вытекает из проинтегрированного по объему V уравнения Лапласа (1.7) и имеет место в рамках используемого предположения об отсутствии электрических полей рассеяния вне тела [2, 4]. Так как условие (2.1) справедливо при любых φ_ν, отсюда следует вырожденность матрицы емкостей

$$\sum_{\nu=1}^{N} c_{\mu\nu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, N$$

Например, для двухэлектродного тела ($N = 2$) симметричная вырожденная матрица содержит один независимый элемент, называемый ем_ костью C:

$$\|c_{\mu\nu}\| = \begin{Vmatrix} C & -C \\ -C & C \end{Vmatrix}$$

а несвязанные заряды пропорциональны разности потенциалов:

$$Q_1^u = -Q_2^u = C\,(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{2.2}$$

3. Рассмотрим двухэлектродное пьезоэлектрическое тело, распределение перемещений в котором полностью определено коэффициентами разложения q_m по системе СФ $U_i^{(m)}$, найденной для короткозамкнутых электродов, т. е. при удовлетворении для всех m равенствам (1.10). Следуя энергетическому определению [2], для электроупругого поля с перемещениями

$$u_i = \sum U_i^{(m)} q_m \tag{3.1}$$

найдем потенциальную энергию при разомкнутых (U^{oc}) и короткозамкнутых (U^{sc}) электродах, а затем — динамический КЭМС k_d^2 по формуле

$$k_d^2 = (U^{oc} - U^{sc})/U^{oc} \tag{3.2}$$

Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется по m от $m = 1$ до ∞.

Согласно МСФ, решение для электрического потенциала ψ дается вторым равенством (1.5) и, коль скоро $\Psi^{(m)}$ и q_m известны, полностью определяется значениями φ для разомкнутого и короткозамкнутого состояний. Однако для вычисления k_d^2 необходимо знать лишь разность $\varphi_1 - \varphi_2$. Перепишем формулу (1.11) с учетом (2.2)

$$U = \frac{1}{2}\sum \Omega_m^2 q_m^2 + (\psi_1 - \psi_2)\,Q_1^u - \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\,Q_1^u \tag{3.3}$$

При разомкнутых электродах ($Q_1 = Q_2 = 0$) из второго равенства (1.5) и (1.10) следует

$$\psi_1 - \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{3.4}$$

а получаемое из (1.5) соотношение

$$Q_\nu = Q_\nu^u + \sum Q_\nu^{(m)} q_m \tag{3.5}$$

дает

$$Q_1^u = -\sum Q_1^{(m)} q_m \tag{3.6}$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и используя (2.2), (3.6), имеем

$$U^{oc} = \frac{1}{2}\sum \Omega_m^2 q_m^2 + \frac{1}{2} C^{-1}\left(\sum Q_1^{(m)} q_m\right)^2 \tag{3.7}$$

Считая теперь электроды короткозамкнутыми ($\psi_1 - \psi_2 = 0$), из (1.5), (1.10) находим $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, и (3.3) приводит к равенству

$$U^{sc} = \frac{1}{2}\sum \Omega_m^2 q_m^2 \tag{3.8}$$

Из (3.2), (3.7), (3.8) получим

$$k_d^2/(1 - k_d^2) = \left(\sum Q_1^{(m)} q_m\right)^2 \left(C \sum \Omega_m^2 q_m^2\right)^{-1} \tag{3.9}$$

Значения КЭМС на m-й моде колебаний k_m^2 найдем, считая в разложении (3.1) все q_m, кроме одного, равными нулю. Эти парциальные, или модовые КЭМС, определяются равенствами

$$k_m^2/(1 - k_m^2) = Q_1^{(m)2}\,(C\Omega_m^2)^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Исключая из последних двух равенств значения собственных зарядов $Q_1^{(m)}$, получаем искомую связь между КЭМС произвольной деформации и КЭМС отдельных нормальных мод:

$$k_d^2/(1-k_d^2) = \left(\sum \Omega_m q_m k_m/\sqrt{1-k_m^2}\right)^2 \left(\sum \Omega_m^2 q_m^2\right)^{-1} \qquad (3.11)$$

Последняя формула позволяет оценить максимальный КЭМС, достижимый при данном расположении электродов: по неравенству Коши

$$k_d^2/(1-k_d^2) \leqslant \sum k_m^2/(1-k_m^2) \qquad (3.12)$$

Знак равенства в (3.12) достигается при $\Omega_m q_m = A k_m/\sqrt{1-k_m^2}$, где A — произвольная не зависящая от m постоянная. Соответствующее максимальное значение КЭМС (левая часть (3.12) — возрастающая функция k_d^2) достигается на перемещениях

$$u_i = A \sum \Omega_m^{-1} (k_m/\sqrt{1-k_m^2}) U_i^{(m)}(x) \qquad (3.13)$$

Как следует из разд. 1, поле перемещений может быть представлено и в виде разложения по другой системе СФ — найденных для разомкнутых электродов, когда (1.10) заменяются равенствами

$$Q_1^{(m)} = 0,\ Q_2^{(m)} = 0 \qquad (3.14)$$

Пусть (3.1) представляет собой такое разложение, тогда при разомкнутых электродах ($Q_1 = Q_2 = 0_{oc}$) из (3.14) и (3.5) следует $Q_1^u = 0$ и (3.3) дает для U^{oc} выражение, совпадающее по виду с (3.8), но с другими значениями Ω_m и q_m.

Для короткозамкнутых электродов, составляя разность $\varphi_1 - \varphi_2$, исходя из второго равенства (1.5), при $\psi_1 - \psi_2 = 0$ получим соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\sum (\Psi_1^{(m)} - \Psi_2^{(m)}) q_m$$

подстановка которого в комбинации с (2.2) в (3.3) дает значение U^{sc}, и вычисленный из (3.2) КЭМС равен

$$k_d^2 = C\left[\sum (\Psi_1^{(m)} - \Psi_2^{(m)}) q_m\right]^2 \left(\sum \Omega_m^2 q_m^2\right)^{-1}$$

Составив теперь аналогично (3.10) выражение для парциального КЭМС k_m^2 и исключив $\Psi_1^{(m)} - \Psi_2^{(m)}$, получаем связь между k_d^2 и КЭМС нормальных мод, соответствующих разомкнутым электродам

$$k_d^2 = \left(\sum \Omega_m q_m k_m\right)^2 \left(\sum \Omega_m^2 q_m^2\right)^{-1} \qquad (3.15)$$

Оценивая правую часть (3.15) по неравенству Коши, в данном случае имеем

$$k_d^2 \leqslant \sum k_m^2 \qquad (3.16)$$

а реализующие максимальный КЭМС перемещения (знак равенства в (3.16)) представляются разложением по СФ

$$u_i = A \sum \Omega_m^{-1} k_m U_i^{(m)}(x)$$

Основная идея энергетического метода определения динамических КЭМС состоит в том, что эта характеристика должна полностью определяться полем деформаций (перемещений) в объеме тела и характером расположения электродов [2]. Определение (3.2) является исчерпывающим в случае двух электродов благодаря тому, что здесь имеется лишь один способ перевода пьезоэлектрического тела из электрически разомкнутого в короткозамкнутое состояние. Использование же его для многоэлектродного тела дает неоднозначный результат. Так, для трехэлектродного тела к состоянию с тремя закороченными электродами можно придти, подсоединяя к двум ранее закороченным электродам третий, либо одновременно замыкая накоротко все три электрода. Вычисленные по формуле (3.2) k_d^2 окажутся при этом различными.

Определение КЭМС многоэлектродного тела, судя по литературе [2, 3], отсутствует, и при его введении автор руководствовался следующими соображениями. Для соответствующим образом вычисленных КЭМС желательно, чтобы структура формул

(3.11) и (3.15), содержащих лишь собственные частоты, коэффициенты разложений по СФ и парциальные КЭМС, сохранилась, т. е. не зависела от числа электродов. Но здесь следует отметить, что получить их удалось благодаря одновременному исключению, например, из (3.9) и (3.10) как связанных зарядов $Q_1^{(m)}$, так и емкости C. Для N-электродного тела ($N \geqslant 3$) при переходе от полностью разомкнутого к полностью короткозамкнутому состоянию в выражения для k_d^2 и k_m^2 войдут $^1/_2 N\,(N-1)$ независимых компонент матрицы емкостей и $N-1$ зарядов $Q_\nu^{(m)}$, что сделает такое одновременное исключение невозможным.

С другой стороны, в большинстве устройств пьезоэлектроники [3] съем энергии в каждый момент времени осуществляется с одной пары электродов, при этом понятие «электрод» включает в себя и несколько конструктивно закороченных электродов. Так, КЭМС $(2n+2)$-электродного цилиндра [2] вычисляется фактически в предположении, что не происходит перераспределения потенциалов при последовательном закорачивании электродов, т. е. они короткозамкнуты через один, как это имеет место в используемых на практике многослойных преобразователях. Поэтому такой преобразователь является по сути двухэлектродным. Кроме того, в определении КЭМС должно быть учтено, что способная к обращению энергия извлекается путем замыкания пары электродов, а возможное перераспределение энергии между телом и генераторами через остальные электроды следует исключить из рассмотрения.

Ориентируясь на физически реализуемые способы подвода (съема) электрической энергии, КЭМС многоэлектродного тела будем вычислять по формуле (3.2) для пары электродов, предполагаемых разомкнутыми или короткозамкнутыми при заданных перемещениях в объеме. При этом требуем сохранения нулевых значений потенциала на электродах, подключенных к генераторам напряжения и нулевых полных зарядов на питаемых генераторами тока или пассивных электродах. Записывая теорему об изменении полной энергии ([4], формула (25.6)), при нулевых скоростях, т. е. неизменных деформациях в объеме,

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \psi_\nu \dot{Q}_\nu$$

видно, что поток энергии через электроды с нулевыми ψ_ν или Q_ν равен нулю.

Рассмотрим N — электродное тело, в котором электроды с номерами $\nu = 3, 4, \ldots, M$ запитываются генераторами напряжения, а с номерами $\nu = M+1, M+2, \ldots, N$ — генераторами тока или являются пассивными, и найдем решение начально-граничной задачи (1.1)—(1.4) в виде (1.5). При этом используется система СФ, определенная из условий

$$\Psi_\nu^{(m)} = 0,\ \nu = 3, 4, \ldots, M;\ Q_\nu^{(m)} = 0,\ \nu = M+1, M+2, \ldots, N$$

На первых двух электродах, для которых вычисляется КЭМС, СФ удовлетворяют либо (1.10), либо (3.14).

Сохраняя в момент перевода тела из разомкнутого в короткозамкнутое состояние

$$\psi_\nu = 0,\ \nu = 3, 4, \ldots, M;\ Q_\nu = 0,\ \nu = M+1, M+2, \ldots, N$$

находим

$$\varphi_\nu = 0,\ \nu = 3, 4, \ldots, M;\ Q_\nu^{u} = 0,\ \nu = M+1, M+2, \ldots, N$$

и формула для энергии (1.11) приобретает вид

$$U = \frac{1}{2}\sum \Omega_m^2 q_m^2 + (\psi_1 Q_1^{u} + \psi_2 Q_2^{u}) - \frac{1}{2}(\varphi_1 Q_1^{u} + \varphi_2 Q_2^{u})$$

Полагая $Q_1 = Q_2 = 0$, находим U^{oc}. При вычислении U^{sc} кроме $\psi_1 - \psi_2 = 0$ необходимо использовать условие $Q_1 + Q_2 = 0$, означающее отсутствие привнесенных сторонних зарядов. Отметим, что для $N = 2$

последнее равенство выполняется автоматически и поэтому в явном виде не формулируется.

Как и для двухэлектродного тела величины Q_1^u и $\varphi_1 - \varphi_2$ оказываются связанными соотношениями (2.2) с той разницей, что C означает теперь некоторую положительную комбинацию элементов матрицы емкостей. Поэтому формулы для k_d^2, k_m^2 и соотношения между ними сохраняют свой вид.

Из двух возможных способов электрического возбуждения первого и второго электродов на практике обычно реализуется один. Соответственно этому в конкретных задачах предельно достижимый КЭМС можно определить либо из (3.12), либо из (3.16), но результат, разумеется, будет одним и тем же. Выбор условий для СФ на первом и втором электродах осуществляется из соображений простоты отыскания СФ (см. пример).

Формулы (3.12) или (3.16) позволяют оценить максимальные КЭМС и в случаях, когда число возбуждаемых мод ограниченно, а также определить отношение амплитуд отдельных мод, реализующее наиболее близкое к максимальному значение КЭМС, в том числе и в нестационарных задачах.

4. Применение предложенной теории к определению максимальных КЭМС и реализующих их распределений перемещений к продольно и поперечно поляризованному стержню, а также поляризованному по толщине пьезокерамическому диску подтвердило хорошо известные результаты: указанные КЭМС равны статическим значениям k_{33}^2, k_{31}^2, k_p^2 [2] и достигаются на однородных деформациях.

Более сложный пример, в котором результат заранее неизвестен, доставляет рассмотрение четырехэлектродного дискового пьезотрансформатора толщиной h и радиуса a со свободным контуром, сплошные электроды которого разрезаны по окружностям радиуса $b < a$. Пусть пьезотрансформатор возбуждается приложенной к центральным электродам $0 < r < b$ разностью потенциалов, а съем энергии производится с кольцевых электродов $b < r < a$. Определим парциальные (k_m^2) и максимальный КЭМС при постоянно короткозамкнутых центральных электродах.

Очевидно, в данной задаче более простой будет система СФ, найденная для закороченных внешних электродов: они совпадают с СФ диска со сплошными электродами. Собственные частоты $\Omega_m = \varkappa_m c$, c — пластиночная скорость ([2], с. 99) определяются положительными корнями уравнения

$$\varkappa a J_0(\varkappa a) - (1-\nu) J_1(\varkappa a) = 0 \tag{4.1}$$

а ортонормированные [1] СФ равны

$$U_m = (2\pi\rho h)^{-1/2} \varkappa_m \lambda_m J_1(\varkappa_m r)$$

$$\lambda_m = [{}^1/_2 (\varkappa_m a)^2 (J_0^2(\varkappa_m a) + J_1^2(\varkappa_m a)) - (1-\nu) J_1^2(\varkappa_m a)]^{-1/2}$$

Максимально достижимый КЭМС определяется суммой ряда

$$\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)_{\max} = \frac{1+\nu}{a^2-b^2} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \sum \lambda_m [aJ_1(\varkappa_m a) - bJ_1(\varkappa_m b)]^2 \tag{4.2}$$

члены которого равны $k_m^2/(1-k_m^2)$. Он достигается на перемещениях u, вычисленных по правилу (3.13) (несущественный постоянный множитель опущен)

$$u = \Sigma \lambda_m [aJ_1(\varkappa_m a) - bJ_1(\varkappa_m b)] J_1(\varkappa_m r) \tag{4.3}$$

Переписывая частотное уравнение (4.1) в виде $\varkappa a J_1'(\varkappa a) + \nu J_1(\varkappa a) = 0$, можно убедиться, что (4.3) есть разложение искомого перемещения в ряд Дини [6], сумма которого равна

$$u = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}(1-\varepsilon^2) r + \left(r - \varepsilon^2 \frac{a^2}{r}\right) H(r-b)\right], \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

где H — единичная функция Хевисайда.

Поле перемещений, доставляющее максимальный КЭМС, под внутренними электродами $(0 < r < b)$ является линейной функцией, а под кольцевыми $(b < r < a)$ — комбинацией линейной и обратно пропорциональной зависимостей от r. Предвидеть это на основе элементарных соображений было бы затруднительно.

Сравнивая (4.2) и (4.3), видно, что первая сумма пропорциональна $au(a)$ — — $bu(b)$, откуда получаем

$$k_{max}^2 = k_p^2 \left(1 - \frac{1-\nu}{2} \varepsilon^2\right)\left(1 - \frac{1-\nu}{2} k_p^2 \varepsilon^2\right)^{-1}$$

Правая часть последнего равенства — убывающая функция геометрического параметра ε. Предельное значение k_{max}^2 для материала PZT-4 [2], $\nu = 0{,}3$, $k_p^2 = 0{,}34$, при $\varepsilon = 0$ (однородная деформация диска с двумя сплошными электродами) равно k_p^2, для $\varepsilon = 1$ (бесконечно узкие кольцевые электроды), k_{max}^2 минимально и равно $0{,}74\, k_p^2$.

Автор благодарит А. Ф. Улитко за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жарий О. Ю.* Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 109—115.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
3. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
4. *Жарий О. Ю., Улитков А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. Киев: Вища шк., 1989. 184 с.
5. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 604 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. // Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 295 с.

Киев

Поступила в редакцию
10.XI.1989