Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 539.3

В. А. Еремеев

УСТОЙЧИВОСТЬ В МАЛОМ СОСТОЯНИИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ НЕЛИНЕЙНО ТЕРМОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В динамической постановке исследуется устойчивость в малом по Ляпунову гидростатически напряженного состояния (ГНС) изотропного однородного нелинейно термовязкоупругого тела дифференциального типа сложности n, начальная температура которого постоянна. Учитывается связанность температурных и механических полей. В качестве специального случая исследуется модель несжимаемого нелинейно вязкоупругого тела. Формулируются условия, обеспечивающие существование и единственность обобщенных решений линеаризованных уравнений движения и теплопроводности и их стремление к нулю с ростом времени. На примере показывается, что нарушение полученных условий может приводить к экспоненциальному росту решений.

При исследовании устойчивости в малом ГНС нелинейно упругих тел статическим методом [1, 2] отсутствие смежных форм равновесия выдвигалось в качестве необходимого требования, накладывающего ограничения на форму закона состояния материала. Изучалась [3—5] устойчивость решений уравнений равновесия нелинейно вязкоупругих тел с интегральным определяющим соотношением. Получены [4] условия устойчивости ГНС вязкоупругого тела. Учитывалось [5] влияние поля температур. На основе теории, развитой в [6], исследовалось [7] поведение с ростом времени решений уравнений движения линейных вязкоупругих тел дифференциального типа.

1. Основные соотношения, описывающие однородное изотропное нелинейно термовязкоупругое тело дифференциального типа сложности n, имеют вид [8]

$$\psi = \psi(\mathbf{G}, \Theta), \quad \eta = -\partial\psi/\partial\Theta(\mathbf{G}, \Theta), \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_0(\Theta, \mathbf{F}) + \mathbf{T}_1(\Theta, \mathbf{F}, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{T}_0 = 2\rho\mathbf{C}^T\cdot\partial\psi/\partial\mathbf{G}\cdot\mathbf{C}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(\Theta, \nabla\Theta, \mathbf{F}), \quad \mathbf{G} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C}^T, \quad \mathbf{F} = \mathbf{C}^T\cdot\mathbf{C}$$

Здесь ψ и η — массовые плотности свободной энергии и энтропии, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{T}_1$ — равновесный и диссипативный тензоры напряжений, $\mathbf{h}$ — вектор потока тепла, Θ — температура, $\mathbf{C}$ — градиент деформации, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ — меры деформации Коши — Грина и Фингера, ρ — плотность тела в актуальной конфигурации, ∇ — оператор градиента в актуальной конфигурации, $\mathbf{A}_k$ ($k = 1, \ldots, n$) — тензоры Ривлина — Эриксена, определяемые формулой [9]

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{C}^{-1}\cdot(d^k\mathbf{G}/dt^k)\cdot\mathbf{C}^{-T}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Вместо тензоров $\mathbf{A}_k$ в соотношениях (1.1) могут участвовать другие индифферентные тензоры, характеризующие скорости деформации. Тензор $\mathbf{T}_1$ обращается в нуль при $\mathbf{A}_k = 0$ ($k = 1, \ldots, n$).

При рассмотрении чисто механической теории используется модель несжимаемого вязкоупругого материала с определяющим соотношением для тензора напряжений Коши вида

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{E} + \mathbf{T}_0(\mathbf{F}) + \mathbf{T}_1(\mathbf{F}, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \tag{1.3}$$

где p — неизвестная функция, определяемая из уравнений движения и условия несжимаемости $\det \mathbf{G} = 1$, $\mathbf{E}$ — единичный тензор.

Назовем (p, Θ°)-конфигурацией состояние равновесия тела, в котором реализуется ГНС и однородное поле температур. В (p, Θ°)-конфигурации изотропного тела выполняются соотношения $T = -pE$, $\Theta = \Theta^\circ$, $\mathbf{C} = l\mathbf{Q}$, $\mathbf{G} = \mathbf{F} = l^2\mathbf{E}$, $\mathbf{A}_k = 0$, $\mathbf{h} = 0$, где $\mathbf{Q}$ — собственно ортогональный тензор, $0 < l \leqslant 1$. Для несжимаемого материала $l = 1$.

Для исследования устойчивости этого состояния составляются линеаризованные в окрестности (p, Θ°)-конфигурации уравнения движения и теплопроводности. Линеаризованные уравнения движения в метрике деформированного состояния имеют вид [1, 9]

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\mathbf{\Pi} = \rho\partial_t^2\mathbf{w}, \quad \mathbf{\Pi} = \delta\mathbf{T} + \mathbf{T}\operatorname{tr}\mathbf{L} - \mathbf{L}^T\cdot\mathbf{T}, \quad \mathbf{L} = \nabla\mathbf{w} \\ \delta\mathbf{T} = \frac{d}{d\xi}\,\mathbf{T}(\mathbf{R} + \xi\mathbf{w}, \Theta^\circ + \xi\theta)\,|_{\xi=0}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор в (p, Θ°)-конфигурации, $\mathbf{w}$ — вектор малых добавочных перемещений, θ — добавочная температура. Символом δ обозначаются линейные приращения, обусловленные наложением добавочных перемещений и температуры.

Линеаризация тензоров Ривлина — Эриксена в окрестности (p, Θ°)-конфигурации дает

$$\delta\mathbf{A}_k = 2\partial_t^k\boldsymbol{\varepsilon}, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \tag{1.5}$$

Следуя [2], линеаризованные в окрестности (p, Θ°)-конфигурации уравнения движения преобразуем в виду

$$\nabla\cdot\mathrm{S} = \rho\partial_t^2\mathbf{w}, \; \mathrm{S} = \delta\mathbf{T} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\mathbf{\Omega}, \; 2\mathbf{\Omega} = \mathbf{L}^T - \mathbf{L} \tag{1.6}$$

Учитывая соотношения (1.1), (1.5) и условие изотропности, можно показать, что S — линейная изотропная функция тензоров $\partial_t^k\boldsymbol{\varepsilon}$ $(k = 0, \ldots, n)$ и θ:

$$\begin{gathered}\mathrm{S} = \Lambda(\partial_t)\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E} + 2M(\partial_t)\,\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha(l)\,\theta\mathbf{E} \\ \Lambda(\zeta) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k(l)\,s^k, \; M(s) = \sum_{k=0}^{n}\mu_k(l)\,s^k\end{gathered} \tag{1.7}$$

Соотношения (1.7) определяют отклик материала на малые деформации вблизи ГНС.

Для несжимаемого тела

$$\mathbf{S} = -\delta p\mathbf{E} + 2M(\partial_t)\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.8}$$

где δp — неизвестная функция координат, дополнительным условием для определения которой служит линеаризованное условие несжимаемости $\nabla\cdot\mathbf{w} = 0$.

Для получения линеаризованного уравнения теплопроводности рассмотрим уравнение баланса энергии в случае отсутствия объемных источников тепла [8—12]

$$\rho d(\psi + \Theta\eta)/dt = -\nabla\cdot\mathbf{h} + \operatorname{tr}(\mathbf{T}\cdot\nabla d\mathbf{R}/dt)$$

Используя соотношения (1.1), это уравнение можно преобразовать к виду

$$\rho\Theta d\eta/dt = -\nabla\cdot\mathbf{h} + \operatorname{tr}(\mathbf{T}_1\cdot\nabla d\mathbf{R}/dt)$$

Последнее слагаемое в правой части полученного уравнения описывает удельную диссипацию энергии [9, 12] для нелинейно термовязкоупругих тел дифференциального типа. Наличие диссипативного члена отличает рассматриваемое уравнение баланса энергии от уравнения теплопроводности для нелинейно термоупругих тел [9]. При учете соотношений (1.1) и условия изотропности материала запишем выражения для линеаризованных в окрестности (p, Θ°)-конфигурации энтропии и вектора потока тепла

$$\rho\delta\eta = c(l)\,\theta + \alpha(l)\nabla\cdot\mathbf{w},\quad \delta\mathbf{h} = -\varkappa(l)\,\theta\nabla$$

В малой окрестности (p, Θ°)-конфигурации диссипативный член в уравнении теплопроводности, равный нулю в этом состоянии (так как в состоянии равновесия, частным случаем которого является (p, Θ°)-конфигурация, $\mathbf{T}_1$ и $d\mathbf{R}/dt$ равны нулю), имеет второй порядок малости по сравнению с остальными слагаемыми и при линеаризации исчезает. Окончательно линеаризованное уравнение теплопроводности в окрестности (p, Θ°)-конфигурации принимает вид

$$c(l)\,\Theta^\circ\partial_t\theta = \varkappa(l)\,\nabla\cdot\nabla\theta - \alpha(l)\,\Theta^\circ\partial_t\nabla\cdot\mathbf{w} \tag{1.9}$$

Вывод нелинейного уравнения теплопроводности и его линеаризация в окрестности ненапряженного состояния для вязкоупругих тел дифференциального типа сложности 1, проведен в [12]. Вид полученного в [12] линеаризованного уравнения теплопроводности аналогичен (1.9).

Величины $c(l)$, $\varkappa(l)$ будем считать положительными. Начальную температуру Θ° в дальнейшем без ограничения общности положим равной единице.

Линеаризованные краевые условия на поверхности тела $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \Sigma_4 \cup \Sigma_5$ имеют вид [2]

$$\begin{gathered}\mathbf{w}\,|_{\Sigma_1} = 0,\quad \mathbf{N}\cdot\mathrm{S}\,|_{\Sigma_2} = 0,\quad \mathbf{N}\cdot\mathbf{w}\,|_{\Sigma_3} = 0\\ \mathbf{N}\cdot\mathrm{S}\cdot(\mathbf{E} - \mathbf{NN})\,|_{\Sigma_3} = 0,\ \theta\,|_{\Sigma_4} = 0,\ \mathbf{N}\cdot\nabla\theta\,|_{\Sigma_5} = 0\end{gathered} \tag{1.10}$$

($\mathbf{N}$ — нормаль к поверхности тела). Часть Σ_1 поверхности тела полностью закреплена, на Σ_2 задано равномерное гидростатическое давление, на Σ_3 тело контактирует с гладкой твердой поверхностью, на Σ_4 задана температура, на Σ_5 — тепловой поток.

Начальные условия для $\mathbf{w}$ и θ записываются следующим образом:

$$\partial_t{}^k\mathbf{w}\,|_{t=0} = \mathbf{w}_k,\ k = 0,\ldots,N \equiv \max(1,\ n-1),\ \theta\,|_{t=0} = \theta_0 \tag{1.11}$$

Решение полученных начально-краевых задач ищется в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \chi(t)\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\mathbf{w}_k,\quad \theta = \tau + \chi(t)\,\theta_0$$

где бесконечно дифференцируемая функция $\chi(t) = 1$ в окрестности нуля и $\chi(t) = 0$ при $t > 1$. Функции $\mathbf{u}$ и τ удовлетворяют однородным начальным и краевым условиям и неоднородным уравнениям движения и теплопроводности с некоторыми фиктивными «массовыми силами» $\mathbf{f}$ и «источниками тепла» q.

2. Для исследования полученных начально-краевых задач применяется преобразование Лапласа (s — параметр преобразования).

Аналогично [7] вводятся следующие пространства.

Пусть H — некоторое сепарабельное гильбертово пространство.

$E_k(\gamma, H)$ (k — целое, $\gamma \geqslant 0$) — пространство функций со значениями в H, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$ и имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{E_k}^2 = \sup_{\sigma>\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\varphi(\sigma + i\tau)\|_H{}^2(1 + |\sigma + i\tau|^{2k})\,d\tau$$

$P_k(\gamma, H)$ — комплексное пространство функций $g(t)$ со значениями в H, обладающих на $[0, +\infty)$ обобщенными производными [10] до порядка k включительно, такими, что $\partial_t{}^m g = 0$ при $t = 0$ $(0 \leqslant m \leqslant k)$ и конечна норма

$$\| g \|_{P_k}^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \sum_{m=0}^{k} \| \partial_t{}^m g \|_{H}{}^2 \, dt$$

Доказана [7] теорема о том, что оператор преобразования Лапласа непрерывно отображает пространство $P_k(\gamma, H)$ ($k \geqslant 0$ — целое число, $\gamma > 0$) на пространство $E_k(\gamma, H)$, причем он непрерывно обратим и обратным ему служит оператор обратного преобразования Лапласа.

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.1 Пусть корни полинома $P(s) = p_0 + p_1 s + \ldots + p_n s^n$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, $p_n > 0$, тогда при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ имеет место неравенство $| P(s) | \geqslant d p_n (1 + |s|^{2n})^{1/2}$, где $d \leqslant 1$.

Доказательство следует из разложения полинома $P(s)$ на простые множители и неравенства $| s - s_k | \geqslant d (1 + |s|^2)^{1/2}$ с $d < 1$ при $\operatorname{Re} s_k < 0$.

3. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для сжимаемого термовязкоупругого тела (1.6), (1.7), (1.9), (1.10) ($\Sigma = \Sigma_1 = \Sigma_4$), которую для краткости назовем задачей А.

Пусть H_1 — пространство-комплексно значных функций, образованное замыканием множества непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на границе ω, в норме

$$\| \tau \|_{H_1}{}^2 = \iiint \nabla \tau \cdot \nabla \tau d\omega$$

Здесь и далее область интегрирования ω указывать не будем. H_2 — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит H_1. Очевидно, что $H_1 = W_2{}^{0(1)}$, $H_2 = W_2{}^{c(1)} W_2{}^{0(1)} \times W_2{}^{0(1)}$.

В результате применения к задаче А преобразования Лапласа получается некоторая краевая задача с параметром — задача Б. Назовем $\mathbf{v}(s) \in H_2$, $\tau(s) \in H_1$ обобщенным решением задачи Б, если для любых функций $\mathbf{g} \in H_2$, $\varphi \in H_1$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} \iiint \{ M(s) \nabla \mathbf{v} \cdot\cdot \nabla \bar{\mathbf{g}}^T + [M(s) + \Lambda(s)] \nabla \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \bar{\mathbf{g}} + \\ + \rho s^2 \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{g}} - \alpha \tau \nabla \cdot \bar{\mathbf{g}} - \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{g}} \} \, d\omega = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} \iiint [\varkappa \nabla \tau \cdot \nabla \bar{\varphi} + c s \tau \bar{\varphi} - \alpha s \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - Q \bar{\varphi}] \, d\omega = 0 \\ (\mathbf{F} = L\mathbf{f} \in E_0(0, H_2{}^{-1}), \ Q = Lq \in E_0(0, H_1{}^{-1})) \end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство существования обобщенного решения задачи Б проведем в два этапа. Считая вектор $\mathbf{v}$ заданным, исследуем задачу нахождения температуры, выбрав в качестве определения решения выполнение соотношения (3.2) при любой функции $\varphi \in H_1$. С использованием теоремы Рисса уравнение (3.2) можно представить в виде операторного уравнения в пространстве H_1:

$$\begin{gathered} A(s) \tau \equiv \varkappa \tau + c s K \tau = \Phi, \ \Phi = KQ + \alpha s K_1 \mathbf{v} \\ (KQ, \varphi)_{H_1} = \iiint Q \bar{\varphi} d\omega, \ (K_1 \mathbf{v}, \varphi)_{H_1} = \iiint \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\varphi} d\omega \end{gathered} \tag{3.3}$$

Оператор K непрерывно действует из $H_1{}^{-1}$ в H_1, оператор K_1 непрерывно действует из L_2 в H_1. Можно показать, что $\| K_1 \| = 1$.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{v} \in E_n(0, L_2)$. Тогда уравнение (3.3) однозначно разрешимо при $\operatorname{Re} s > 0$, его решение представимо в виде

$$\tau = \tau_1 + \tau_2, \ \tau_1 \in E_0(0, H_1), \ \tau_2 \in E_{n-1}(0, H_1) \cap E_n(0, L_2)$$

Доказательство. Имеют место следующие равенства:

$$(A\ (s)\ \tau,\ \tau)_{H_1} = P_0\ (s)\ (\tau,\ \tau)_{H_1} = P_1\ (s)\ (\tau,\ \tau)_{L_2}$$

$$(P_0\ (s) = \varkappa + cks,\ P_1\ (s) = cs + k^{-1}\varkappa,\ k = \|\tau\|^2_{L_2} \|\tau\|^{-2}_{H_1}$$

Параметр $k \in (0,\ k^\circ)$, где величина k° зависит от области ω.

При учете леммы 2.1 из полученных соотношений вытекают при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ неравенства

$$|(A\ (s)\ \tau,\ \tau)_{H_1}| \geqslant \zeta\ (s)\ \|\tau\|^2_{L_2},\ |(A\ (s)\ \tau,\ \tau)_{H_1}| \geqslant \varkappa \|\tau\|^2_{H_1} \tag{3.4}$$

$$\zeta\ (s) = \min\ (c,\ \varkappa/k^\circ)\ (1 + |s|^2)^{1/2}$$

Из (3.4) следует, что уравнение (3.3) корректно разрешимо, оператор $A\ (s)$ обладает непрерывным обратным $A^{-1}\ (s)$. Видно, что сопряженным оператором к $A\ (s)$ является $A\ (\bar{s})$. Можно показать, что уравнение с сопряженным оператором корректно разрешимо. Отсюда следует [14], что уравнение (3.3) везде разрешимо при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Оператор $A\ (s)$ — целая оператор-функция. Из непрерывности A^{-1} следует аналитичность $\tau\ (s)$ в области аналитичности Φ при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$.

Обозначим через τ_1 и τ_2 решения уравнения (3.3), соответствующие первому и второму слагаемому в выражении для Φ. Из неравенств (3.4) следуют завершающие доказательство оценки:

$$\|\tau_1\|_{H_1} \leqslant \varkappa^{-1} \|KQ\|_{H_1},\quad \|\tau_2\|_{H_1} \leqslant \varkappa^{-1} |\alpha s|\, \|v\|_{L_2}$$

$$\|\tau_2\|_{L_2} \leqslant \zeta^{-1}\ (s)\ |\alpha s|\, \|v\|_{L_2}$$

Используя результаты леммы 3.1, уравнение (3.1) можно представить в виде операторного уравнения в пространстве H_2

$$\begin{gathered} B\ (s)\ \mathbf{v} \equiv B_0\ (s)\ \mathbf{v} - \alpha^2 s K_4\ (s)\ \mathbf{v} = K_3 \mathbf{F} + \mathbf{F}' \\ B_0\ (s)\ \mathbf{v} \equiv M\ (s)\ \mathbf{v} + [M\ (s) + \Lambda\ (s)]\ K_2 \mathbf{v} + \rho s^2 K_3 \mathbf{v} \\ (K_2,\ \mathbf{v},\ g)_{H_2} = \iiint \nabla\cdot\mathbf{v} \nabla\cdot\bar{\mathbf{g}} g d\omega,\ (K_3\mathbf{v},\ \mathbf{g})_{H_2} = \iiint \mathbf{v}\cdot\bar{\mathbf{g}} d\omega \\ (K_4\mathbf{v},\mathbf{g})_{H_2} = \frac{1}{\alpha s} \iiint \tau_2 \nabla\cdot\bar{\mathbf{g}}\, d\omega,\quad (\mathbf{F}',\mathbf{g})_{H_2} = \alpha \iiint \tau_1 \nabla\cdot\bar{\mathbf{g}}\, d\omega \end{gathered} \tag{3.5}$$

Оператор K_2 непрерывен и положителен, действует из H_2 в H_2. Известно [15], что $\|K_2\| = 1$. Оператор K_3 непрерывно действует из H_2^{-1} в H_2. Оператор $K_4\ (s)$ непрерывно действует из H_2 в H_2 и вполне непрерывен. Полная непрерывность K_4 следует из неравенства

$$\|K_4\ (s)\ \mathbf{v}\|_{H_2} \leqslant d_1\ (1 + |s|^2)^{-1/4}\ \|\mathbf{v}\|_{L_2}$$

которое получается из оценки τ_2 в пространстве L_2, указанной в лемме 3.1 и теорем вложения С. Л. Соболева. Здесь и далее d_k — произвольные положительные постоянные.

Для $B_0\ (s)$ выполняется равенство

$$(B_0\ (s)\ \mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2} = P\ (s)\ (\mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2},\ P\ (s) = M\ (s) + k_2\ [\Lambda\ (s) + M\ (s)] +$$
$$+ \rho k_3 s^2,\ k_2 = (K_2\mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2} \|\mathbf{v}\|^{-2}_{H_2} \in (0,\ 1],\ k_3 = (K_3\mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2} \|\mathbf{v}\|^{-2}_{H_2} \in (0,\ k_3^\circ)$$

Требование устойчивости полинома $P\ (s)$ при любых k_2, k_3 из их областей изменения выдвинуто [7] в качестве достаточного условия разрешимости уравнения (3.5) при $\alpha = 0$. Разрешимость уравнения (3.5) при $\alpha \neq 0$ дается следующей леммой.

Лемма 3.2. Пусть полином $P\ (s)$ устойчив, т. е. его корни имеют строго отрицательную вещественную часть. Тогда существует число $\alpha^* > 0$, такое, что при $|\alpha| < \alpha^*$ уравнение (3.5) однозначно разрешимо при $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ и решение $\mathbf{v}\ (s) \in E_n\ (0,\ H_2)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.1 и опирается на априорную оценку. Для $B\ (s)$ выполнено равенство

$$(B\ (s)\ \mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2} = P\ (s)\ (\mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2} - \alpha^2 s\ (K_4\ (s)\ \mathbf{v},\ \mathbf{v})_{H_2}$$

из которого при $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ следует необходимая оценка при достаточно малых α

$$|(B(s)\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_2}| \geqslant \left[d_2 (1 + |s|^{2n})^{1/2} - d_3 \frac{\alpha^2 |s|}{(1 + |s|^2)^{1/2}} \right] \|\mathbf{v}\|^2_{H_2}$$

Очевидно, что полученное неравенство выполняется при достаточно малых или больших $|s|$ независимо от α.

В случае $n = 1, 2$ априорная оценка может быть получена независимо от α. Для этого в равенстве (3.1) вектор $\mathbf{g}$ полагается равным $s\mathbf{v}$, в (3.2) $\varphi = \tau$ и соотношение (3.1) складывается с комплексно-сопряженным от (3.2) что приводит к равенству

$$(\bar{s} B_0 (s) \mathbf{v}, \mathbf{v})_{H_2} + (A(s) \tau, \tau)_{H_1} = (\bar{s} K_3 \mathbf{F}, \mathbf{v})_{H_2} + (\overline{KQ, \tau})_{H_1}$$

из которого с использованием полученных ранее неравенств при $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ следует необходимая оценка на $\mathbf{v}$, τ независимо от α.

В предположении о дополнительной гладкости начальных данных оценки решения можно усилить. А именно, пусть $\mathbf{w}_k$, θ_0 таковы, что $\mathbf{f} \in L_2(\omega)$, $q \in L_2(\omega)$, тогда, используя результаты лемм 3.1 и 3.2 и свойства операторов $A(s)$, $B(s)$, можно показать, что

$$\mathbf{v} \in E_m (0, L_2), \quad \tau \in E_1 (0, L_2), \quad m = \max(2, n)$$

Полученные результаты доказывают существование и единственность обобщенного решения задачи Б. Применение указанной в разд. 2 теоремы [7] гарантирует теперь существование и единственность решения задачи А в следующем смысле: для любых бесконечно дифференцируемых функций $\mathbf{g}(t) \in H_2$, $\varphi(t) \in H_1$, равных нулю при t, большем некоторого значения, своего для каждых $\mathbf{g}$ и φ, решение $\mathbf{u}(t)$, $\tau(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty \iiint \{\nabla\mathbf{u} \cdot\cdot M(-\partial_t) \nabla \mathbf{g}^T + \nabla\cdot\mathbf{u} [M(-\partial_t) + \Lambda(-\partial_t)] \nabla\cdot\mathbf{g} + \rho\mathbf{u}\cdot\partial_t^2 \mathbf{g} - \\ - \alpha\tau\nabla\cdot\mathbf{g} + \varkappa\nabla\tau\cdot\nabla\varphi - c\tau\partial_t\varphi - \alpha\mathbf{u}\cdot\nabla\partial_t\varphi - \mathbf{f}\cdot\mathbf{g} - q\varphi\}\, d\omega\, dt$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Пусть $\mathbf{w}_k \in H_2$, $\theta_0 \in H_1$, полином $P(s)$ устойчив. Тогда существует $\alpha^* > 0$ (при $n = 1, 2$, $\alpha^* = \infty$), такое, что при $|\alpha| < \alpha^*$ задача А имеет единственное обобщенное решение $\mathbf{u} \in P_{n-1}(0, H_2)$, $\tau \in P_0 (0, H_1)$. Если $\mathbf{w}_k$, θ_0 таковы, что $\mathbf{f} \in L_2$, $q \in L_2$, то $\mathbf{u} \in P_m(0, L_2)$, $\tau \in P_1 (0, L_2)$, $m = \max(2, n)$.

Непосредственно из теоремы 3.1 вытекают достаточные условия устойчивости в малом (p, $\Theta°$)-конфигурации.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при $|\alpha| < \alpha^*$ решение начально-краевой задачи (1.6), (1.7), (1.9)—(1.11) асимптотически устойчиво в следующем смысле:

$$\int_M^\infty \{\|\partial_t^k \mathbf{w}\|^2_{H_2} + \|\partial_t^i \mathbf{w}\|_{L_2} + \|\theta\|^2_{H_1} + \|\partial_t^j \theta\|_{L_2}\}\, dt \to 0, \quad M \to \infty$$

где $k = 0, \ldots, n$; $i = 0, \ldots, m$; $j = 0, 1$ и равномерно по t

$$\|\partial_t^{k-1} \mathbf{w}\|_{H_1} \to 0, \quad \|\partial_t^{i-1} \mathbf{w}\|_{L_2} \to 0, \quad \|\theta\|_{L_2} \to 0, \qquad t \to \infty$$

Последнее утверждение теоремы 3.2 следует из неравенства [13]:

$$d_4 \|\partial_t^j \mathbf{w}\|^2_{H_2} \leqslant \int_M^\infty \sum_{k=0}^n \|\partial_t^k \mathbf{w}\|^2_{H_2} dt, \quad 0 \leqslant j < n$$

При некоторых ограничениях на множество начальных данных можно уточнить характер стремления $\theta(t)$ к нулю. А именно, если $\mathbf{w}_k$, θ_0 таковы, что $q = 0$ (например, $\nabla \cdot \mathbf{w}_k = 0$, $\theta_0 = 0$), то в условиях теоремы 3.1 можно показать, что $\theta \in P_{m-1}(0, H_1) \cap P_m(0, L_2)$.

4. Все вышеизложенные результаты непосредственно переносятся на другие начально-краевые задачи для сжимаемого термовязкоупругого и несжимаемого вязкоупругого тел. Здесь будут отмечены лишь необходимые изменения в формулировках теорем разд. 3.

В случае смешанной краевой задачи для сжимаемого термовязкоупругого тела пространство H_2 заменяется на H_3, где H_3 — замыкание непрерывно дифференцируемых в ω вектор-функций, удовлетворяющих однородным кинематическим краевым условиям ($\mathbf{w}|_{\Sigma_1} = 0$, $\mathbf{N}\cdot\mathbf{w}|_{\Sigma_3} = 0$), таким, что для $\mathbf{w}$ выполнено неравенство Корна [16] в норме, индуцированной скалярным произведением

$$(\mathbf{w}, \mathbf{u})_{H_3} = \iiint \varepsilon(\mathbf{w}) \cdot\cdot\, \varepsilon(\mathbf{u})\, d\omega$$

Полином $P(s)$ заменяется на $P'(s) = 2M(s) + \Lambda(s) k_2 + \rho k_3 s^2$. Вследствие неравенства $\|\nabla\cdot\mathbf{w}\|_{L_2} \leqslant \sqrt{3}\,\|\mathbf{w}\|_{H_3}$ параметр $k_2 \in (0, 3]$.

Если краевые условия допускают перемещения тела как жесткого целого, то утверждения теорем 3.1, 3.2 с указанными выше изменениями имеют место только для «деформационной» части перемещений, ортогональной в H_3 векторам жесткого перемещения.

Так же может быть исследован случай более общих краевых условий для температуры.

Начально-краевые задачи для несжимаемого вязкоупругого тела рассматриваются аналогично. Здесь пространства H_2 и H_3 получаются замыканием в соответствующих нормах соленоидальных вектор-функций, т. е. удовлетворяющих условию $\nabla\cdot\mathbf{w} = 0$. Для первой краевой задачи полином $P(s) = M(s) + \rho k_3 s^2$, для остальных $P'(s) = 2M(s) + \rho k_3 s^2$.

Анализ свойств полиномов $P(s)$ и $P'(s)$ показывает, что необходимым, а при $n = 1, 2$ и достаточным условием асимптотической устойчивости (p, $\Theta°$)-конфигурации является выполнение неравенств $\mu_k > 0$, $\lambda_k + 2\mu_k > 0$ ($k = 0, \ldots, n$) для первой краевой задачи и $\mu_k > 0$, $3\lambda_k + 2\mu_k > 0$ для всех краевых задач при $l \in (0, 1]$. В случае несжимаемого тела такими условиями являются неравенства $\mu_k > 0$. Эти неравенства налагают определенные ограничения на соотношения (1.7), (1.8), определяющие отклик материала на малые деформации вблизи ГНС.

Ограничение, накладываемое условиями теоремы 3.1 при $n > 2$ на α, является, вообще говоря, необходимым.

В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости прямоугольника со сторонами a, b, контактирующего по всей поверхности с гладкой жесткой поверхностью и с условиями Неймана для температуры ($\Sigma = \Sigma_3 = \Sigma_5$). Удовлетворяющее граничным условиям решение $\mathbf{w} = u\mathbf{i}_1 + v\mathbf{i}_2$, θ разыскивается в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} u_{nm} e^{\nu_{nm} t} \sin\frac{\pi n}{a} x \cos\frac{\pi m}{b} y, \quad v(x, y, t) =$$

$$= \sum_{n,\, m=0}^{\infty} v_{nm} e^{\nu_{nm} t} \cos\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi m}{b} y, \quad \theta(x, y, t) =$$

$$= \sum_{n,\, m=0}^{\infty} \theta_{nm} e^{\nu_{mn} t} \cos\frac{\pi n}{a} x \cos\frac{\pi m}{b} y$$

Его подстановка в уравнения (1.6), (1.9) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно $u_{nm}, v_{nm}, \theta_{nm}$. Можно показать, что условием ее нетривиальной разрешимости служит обращение в нуль выражения

$$D(\nu, \beta, \alpha) = [\rho\nu^2 + \beta M(\nu)]\{\alpha^2\beta\nu + (c\nu + \varkappa\beta)[\rho\nu^2 + \beta(\Lambda(\nu) + 2M(\nu))]\},$$
$$\nu = \nu_{nm}, \quad \beta = (\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2$$

Если уравнение $D(\nu, \beta, \alpha) = 0$ имеет корни ν_k с положительной вещественной частью, это означает, что задача имеет экспоненциально растущие решения, и тем самым (p, Θ°)-конфигурация для прямоугольника неустойчива по Ляпунову. Видно, что при $\alpha = 0$ требование устойчивости для любых β эквивалентно требованию устойчивости полинома $P(\nu)$ в условиях теоремы 3.1.

Можно показать, что при $n = 1, 2$ необходимым и достаточным условием устойчивости $D(\nu, \beta, \alpha)$ при любых β и α является выполнение неравенств $\lambda_k + 2\mu_k > 0$, $\mu_k > 0$ $(k = 0, \ldots, 2)$. Анализ устойчивости полинома $D(\nu, \beta, \alpha)$ при $n = 3$ показывает, что при некотором $\alpha^*(\beta)$ критерий Гурвица устойчивости для $D(\nu, \beta, \alpha)$ нарушается.

Через параметр β критическое значение α^* также зависит от размеров области. Можно показать, что $\alpha^* = O(\beta)$ при $\beta \to \infty$ и $\alpha^* = O(\beta^{-1/2})$ при $\beta \to 0$. В отличие от условий на λ_k, μ_k ограничение на α при $n > 2$ не может рассматриваться в качестве ограничения на определяющие соотношения термовязкоупругих тел в случае малых деформаций (1.7), так как постоянная α^* зависит и от области, занимаемой телом.

Автор благодарит Л. М. Зубова и Л. П. Лебедева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Зубов Л. М.* Об условиях единственности в малом состояния гидростатического сжатия упругого тела // ПММ. 1970. Т. 44. Вып. 3. С. 497—506.
3. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д.* К теории устойчивости вязкоупругих тел при конечных деформациях // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 5. С. 1082—1086.
4. *Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д.* Устойчивость неоднородно стареющих вязкоупругих тел // Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов. Л.: ЦНИИ «Румб», 1985. Вып. 42. С. 7—18.
5. *Дроздов А. Д., Соломенцев Ю. Е.* Об устойчивости нелинейно-вязкоупругих тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 113—118.
6. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. Вып. 3. С. 53—161.
7. *Лебедев Л. П.* Об устойчивости естественного ненапряженного состояния вязкоупругих тел // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 1110—1117.
8. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
9. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука. 1983. 528 с.
11. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
12. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 285 с.
13. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
14. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.
15. *Михлин М. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28. Вып. 3. С. 43—82.
16. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201. № 1. С. 36—39.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
28.III.1989