

УДК 539.3 : 534

© 1991 г.

А. В. Степанов

## О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ С ЗАТУХАНИЕМ

Дается обобщение понятия коэффициента передачи, введенного для упругой системы с одной степенью свободы [1, 2], на случай произвольной линейной упругой системы конечной массы, к которой присоединен линейный упруговязкий гаситель достаточно общего вида. Для упругой системы с одной степенью свободы дается решение задачи о минимуме массы гасителя, обеспечивающего заданный коэффициент передачи.

Рассматривались различные критерии оптимальности параметров гасителей колебаний; наиболее распространенный — минимум коэффициента передачи вынуждающей силы, для которого берется значение, максимальное по некоторой области частот (может быть, по всему диапазону). Исследовались имеющие несколько степеней свободы упругие системы или гасители [3—5], однако решались, как правило, частные задачи.

Рассмотрим упругую систему конечной массы  $M$ , занимающую известный объем  $V$  и обладающую известными упругими и инерционными свойствами. Первые задаются матрицей влияния  $K(N, N')$ , вторые — матрицей обобщенных плотностей  $\rho(N)$  ( $N, N'$  — точки объема  $V$ , причем  $K(N, N') = K^T(N', N)$  и  $\rho(N) = \rho^T(N)$ ). В общем случае матрицы  $K$  и  $\rho$  — третьего порядка; их вид зависит от системы координат. Для данной упругой системы существует спектр собственных частот  $\{\Omega_j\}$  и собственных функций  $\{u_j(N)\}$  ( $j = 1, 2, \dots, S$ ;  $S \leq \infty$  — число степеней свободы упругой системы), удовлетворяющих условиям

$$\Omega_j^2 \int_V K(N, N') \rho(N') u_j(N') dV(N') = u_j(N)$$

$$\int u_j^T(N) \rho(N) u_k(N) dV(N) = M \delta_{jk}$$

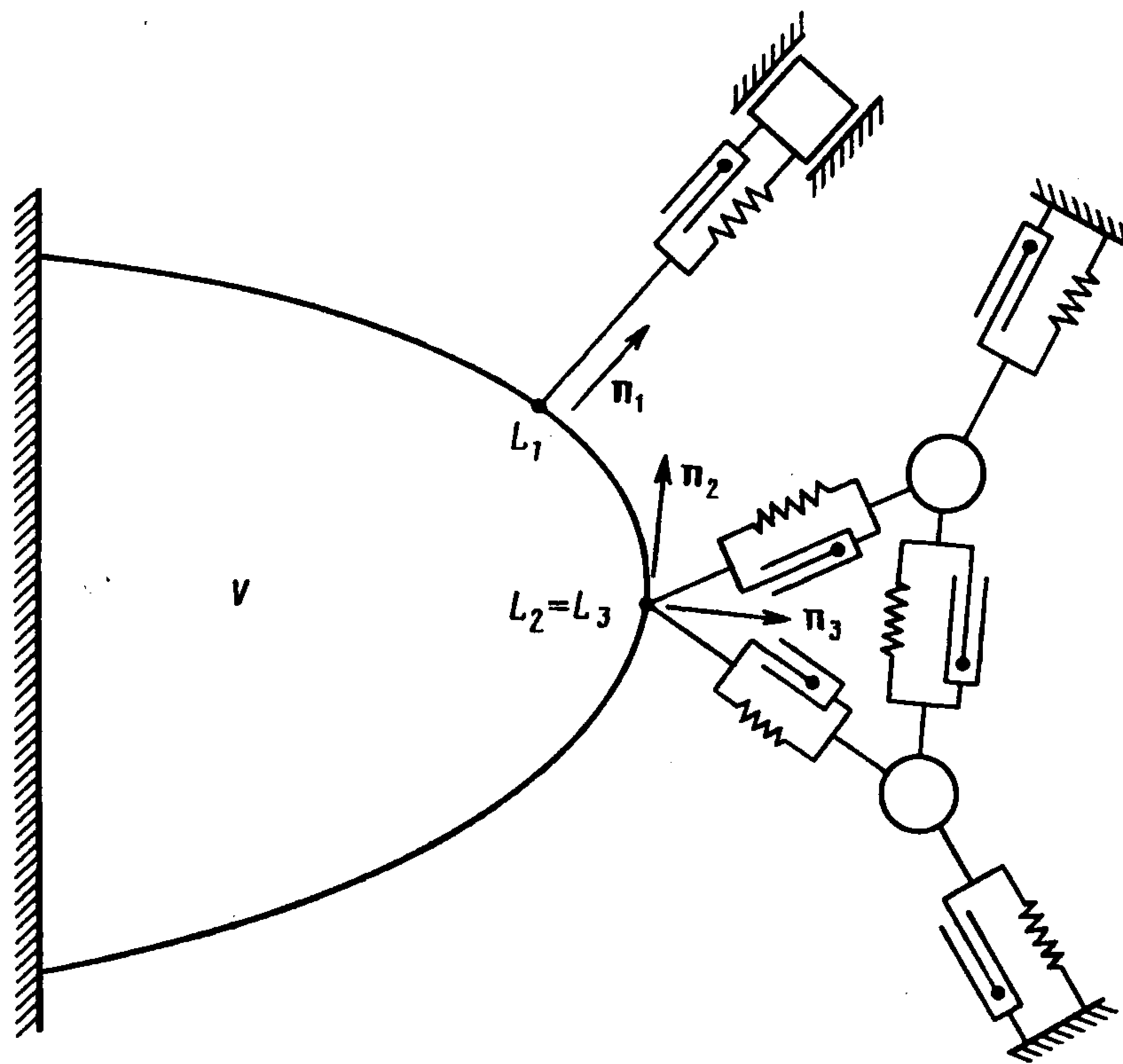
$$1 \leq j, k \leq S$$

( $\delta_{jk}$  — символ Кронекера,  $dV(N)$  — элемент объема в точке  $N$ ; здесь и ниже векторы предполагаются столбцами). Матрица влияния может быть представлена в виде [6]

$$K(N, N') = M^{-1} \sum_{k=1}^S \frac{u_k(N) u_k^T(N')}{\Omega_k^2}$$

Она характеризует перемещение точек упругой системы под действием постоянной силы, приложенной к ней. Если эта сила, отнесенная к единице объема, имеет вид  $e^{\lambda t} F(N')$ , где  $\lambda$  — характеристический показатель (для практики наиболее важен случай, когда величина  $\lambda$  чисто мнимая), то частное решение интегродифференциального уравнения движения упругой системы, приведенного в [7], будет иметь вид  $e^{\lambda t} U(N)$ , где

$$U(N) = \int_V K_1(N, N', \lambda) F(N') dV(N') \quad (1)$$



Фиг. 1

— перемещение (здесь и далее — по отношению к положению равновесия) точки  $N$ , а

$$K_1(N, N', \lambda) = M^{-1} \sum_{k=1}^S \frac{\mathbf{u}_k(N) \mathbf{u}_k^T(N')}{\Omega_k^2 + \lambda^2}$$

— динамическая матрица влияния (при  $\lambda = 0$   $K_1 = K$ ).

Предположим, что к упругой системе в точках  $L_1, L_2, \dots, L_R$  присоединен линейный упруговязкий гаситель; для  $j = 1, 2, \dots, R$  точка  $L_j$  может перемещаться в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}_j$  (фиг. 1). Пусть, кроме того, к заданной точке  $N'$  приложена сосредоточенная сила  $e^{\lambda t} \mathbf{F}_0$ , где  $\mathbf{F}_0$  — постоянная величина. Найдем перемещение произвольной точки  $N$  под действием этой силы и реакции гасителя. Искомое перемещение должно иметь вид  $e^{\lambda t} \mathbf{U}(N)$ ; функцию  $\mathbf{U}(N)$  надо найти.

Полная сила, действующая на упругую систему, равна

$$\mathbf{F}(N, t) = e^{\lambda t} [\mathbf{F}_0 \delta(N, N') + \sum_{j=1}^R F_{1j} \mathbf{n}_j \delta(N, L_j)] \quad (2)$$

где  $\delta$  — дельта-функция, а  $F_{1j}$  — подлежащая определению сила, действующая на точку  $L_j$  в направлении  $\mathbf{n}_j$  ( $1 \leq j \leq R$ ). Подставляя выражение (2) в (1), находим:

$$\mathbf{U}(N) = K_1(N, N', \lambda) \mathbf{F}_0 + \sum_{j=1}^R K_1(N, L_j, \lambda) \mathbf{n}_j F_{1j} \quad (3)$$

Если  $x_{0j} = \mathbf{n}_j^T \mathbf{U}(L_j)$  — проекция перемещения точки  $L_j$  на  $\mathbf{n}_j$  ( $1 \leq j \leq R$ ), то из равенства (3) следует

$$\mathbf{n}_j^T K_1(L_j, N', \lambda) \mathbf{F}_0 + \sum_{k=1}^R \mathbf{n}_j^T K_1(L_j, L_k, \lambda) \mathbf{n}_k F_{1k} = x_{0j} \quad (4)$$

Если  $v_{jk} = \mathbf{n}_j^T \mathbf{u}_k(L_j)$  для  $1 \leq j \leq R$ ,  $1 \leq k \leq S$ , а  $\mathbf{v}_k$  —  $R$ -мерный вектор, компонентами которого являются  $v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{Rk}$ , то (4) можно записать так:

$$Q(N', \lambda) \mathbf{F}_0 + G(\lambda) \mathbf{F}_1 = \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{x}_0 = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0R}\}, \mathbf{F}_1 = \{F_{11}, F_{12}, \dots, F_{1R}\}$$

$$Q(N, \lambda) = M^{-1} \sum_{k=1}^S \frac{v_k u_k^T(N)}{\Omega_k^2 + \lambda^2}$$

$$G(\lambda) = M^{-1} \sum_{k=1}^S \frac{v_k v_k^T}{\Omega_k^2 + \lambda^2}$$

(матрица  $Q$  имеет  $R$  строк, а число столбцов в ней совпадает с размерностью вектора  $F_0$ , в общем случае равной трем; матрица  $G$  — квадратная, порядка  $R$ ).!

Однако  $F_1 = -\Phi(\lambda) x_0$ , где  $\Phi(\lambda)$  — передаточная матрица гасителя (порядка  $R$ ; она определяет силы, действующие на точки присоединения гасителя вследствие их перемещения; это перемещение и вызванные им силы должны быть пропорциональны  $e^{\lambda t}$  [7]). Тогда из соотношения (5) следует

$$x_0 = [E + G(\lambda) \Phi(\lambda)]^{-1} Q(N', \lambda) F_0$$

$$F_1 = -\Psi(\lambda) Q(N', \lambda) F_0, \quad \Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) [E + G(\lambda) \Phi(\lambda)]^{-1} \quad (6)$$

( $E$  — единичная матрица порядка  $R$ ), а перемещение произвольной точки  $N$  под действием силы

$$e^{\lambda t} \sum_{j=1}^R F_{1j} n_j \delta(N, L_j)$$

( $F_{11}, F_{12}, \dots, F_{1R}$  определяются из (6)) равно  $e^{\lambda t} U_0(N)$ , где

$$U_0(N) = \sum_{j=1}^R K_1(N, L_j, \lambda) n_j F_{1j} = M^{-1} \sum_{j=1}^R F_{1j} \sum_{k=1}^S \frac{u_k(N) v_{jk}}{\Omega_k^2 + \lambda^2} =$$

$$= Q^T(N, \lambda) F_1 = -Q^T(N, \lambda) \Psi(\lambda) Q(N', \lambda) F_0$$

Перемещение же точки  $N$  под совместным действием отнесенной к единице объема силы  $e^{\lambda t} F(N')$  и реакции гасителя равно  $e^{\lambda t} U(N)$ , где

$$U(N) = \int_V H(N, N', \lambda) F(N') dV(N)$$

$$H(N, N', \lambda) = K_1(N, N', \lambda) - Q^T(N, \lambda) \Psi(\lambda) Q(N', \lambda) \quad (7)$$

Матрица  $H$  представляет собой обобщение матрицы влияния.

Примером задачи оптимизации может служить следующая: к упругой системе, обладающей заданными упругими и инерционными свойствами, присоединить гаситель заданной конструкции и минимально возможной массы так, чтобы величина

$$\max \| H(N, N', i\Omega) \|$$

равнялась заданной величине; этот максимум берется по всем точкам  $N, N'$  упругой системы и по принадлежащим некоторой заданной области частотам  $\Omega$  (в частном случае — по всему диапазону). В качестве нормы можно взять, например, максимальный из модулей элементов матрицы  $H$ . В общем виде это очень сложная задача.

Рассмотрим в качестве примера точечную массу  $M$ , присоединенную к неподвижному основанию пружинной жесткости  $C$ ; к этой массе при помощи пружины жесткости  $c$  и демпфера с коэффициентом вязкого трения  $h$  присоединяется гаситель в виде точечной массы  $m$ ; обе массы ( $M$  и  $m$ ) могут перемещаться в направлении единичного вектора  $n$  (фиг. 2). В этой системе  $R = S = 1$  и все матрицы ( $K_1, Q, G, \Phi, H$ ) превращаются в функции характеристического показателя  $\lambda$ . Единственная собственная частота этой упругой системы без гасителя  $\Omega_1 = (C/M)^{1/2}$ ,  $v_{11} = 1$ ,  $K_1(\lambda) = Q(\lambda) = G(\lambda) = (C + M\lambda^2)^{-1}$ ,  $\Phi(\lambda) = m\lambda^2 (h\lambda + c) (m\lambda^2 + h\lambda + c)^{-1}$  (см. [7]), а по фор-

муле (7)

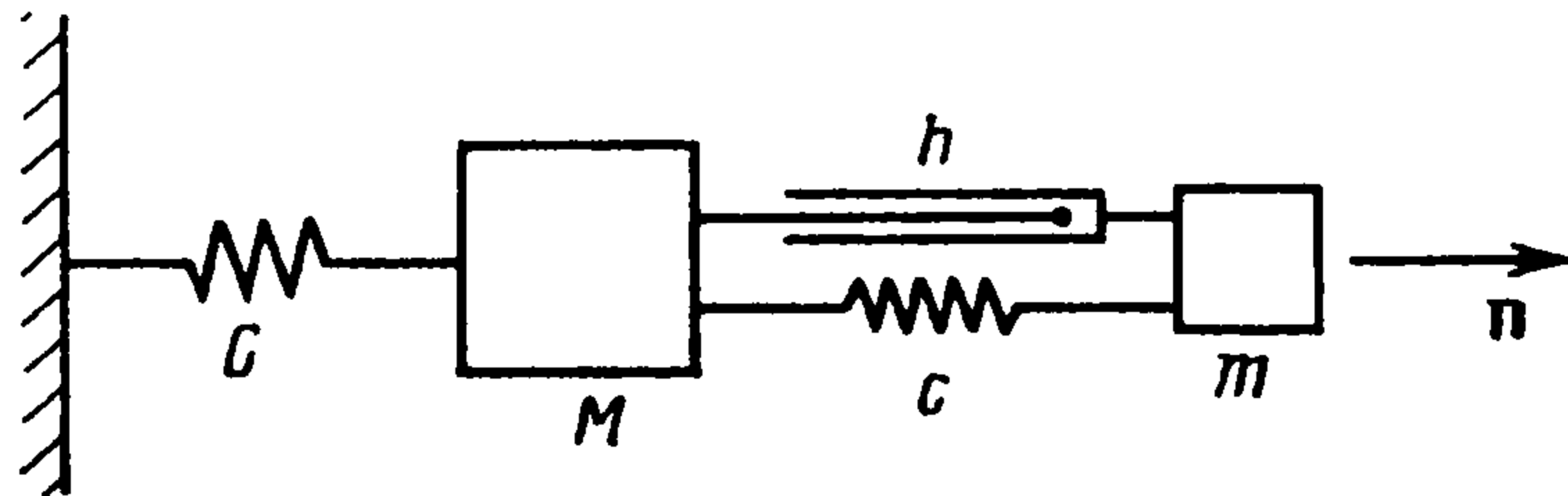
$$H(\lambda) = (M\Omega_1^2)^{-1} \{ (r^2 + zr + \sigma) [(r^2 + 1)(r^2 + zr + \sigma) + \theta r^2 (zr + \sigma)]^{-1} \} \quad (8)$$

$$(\theta = m/M, z = h/(m\Omega_1), \sigma = c/(m\Omega_1^2), r = \lambda/\Omega_1)$$

Выражение в фигурных скобках в правой части равенства (8) равно коэффициенту передачи, введенному в [1, 2]; обобщением этого коэффициента на случай произвольной упругой системы может служить безразмерная матрица-функция

$$M\Omega_1^2 H(N, N', \lambda),$$

где  $H$  определяется формулой (7).



Фиг. 2

Применительно к рассматриваемому примеру задача оптимизации, поставленная выше, формулируется следующим образом: найти такое минимально возможное значение  $\theta$  и такие  $z$  и  $\sigma$ , чтобы величина

$$k(\omega) = |(\omega^2 + iz\omega - \sigma) [(\omega^2 - 1)(\omega^2 + iz\omega - \sigma) + \theta\omega^2 (iz\omega - \sigma)]^{-1}|$$

при любом вещественном  $\omega$  была не больше заданного  $\alpha$ . Из приближенного решения, приведенного в [2], следует, что аналитическим критерием оптимальности в указанном смысле значений  $\theta, z, \sigma$  должно быть наличие у функции  $k(\omega)$  двух гладких максимумов, равных  $\alpha$ , в точках  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_2$  (фиг. 3). Условия

$$|k(\omega_-) = k(\omega_+) = \alpha, dk/d\omega(\omega_-) = dk/d\omega(\omega_+) = 0 \quad (9)$$

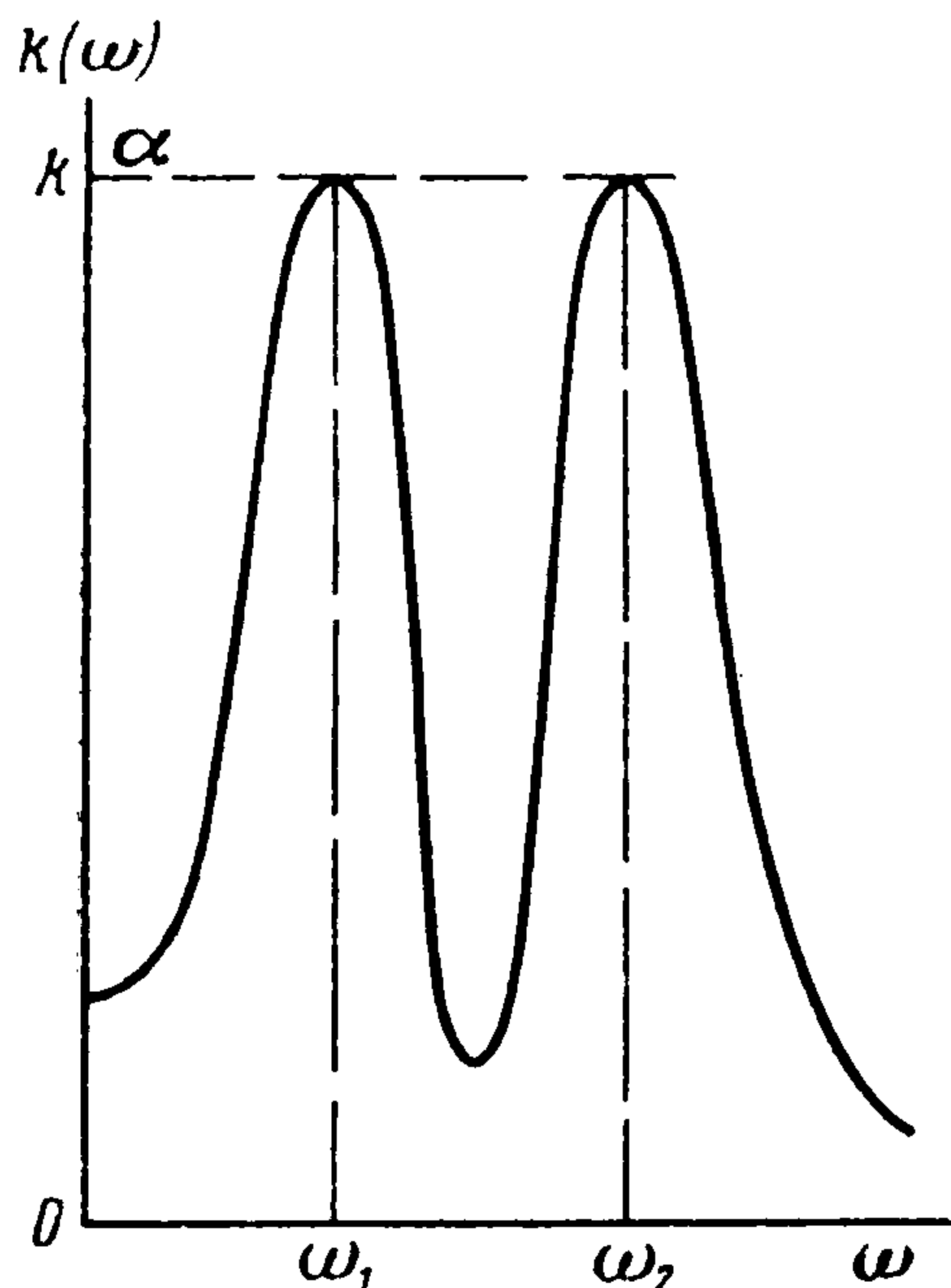
представляют собой систему четырех уравнений с пятью неизвестными:  $\omega_-, \omega_+, \theta, z$  и  $\sigma$ ; недостающим уравнением является условие минимума  $\theta$ . Точное решение этой системы весьма затруднительно.

Можно  $\omega_-$  и  $\omega_+$  выразить через новые неизвестные  $\omega_0$  и  $\varepsilon$ :

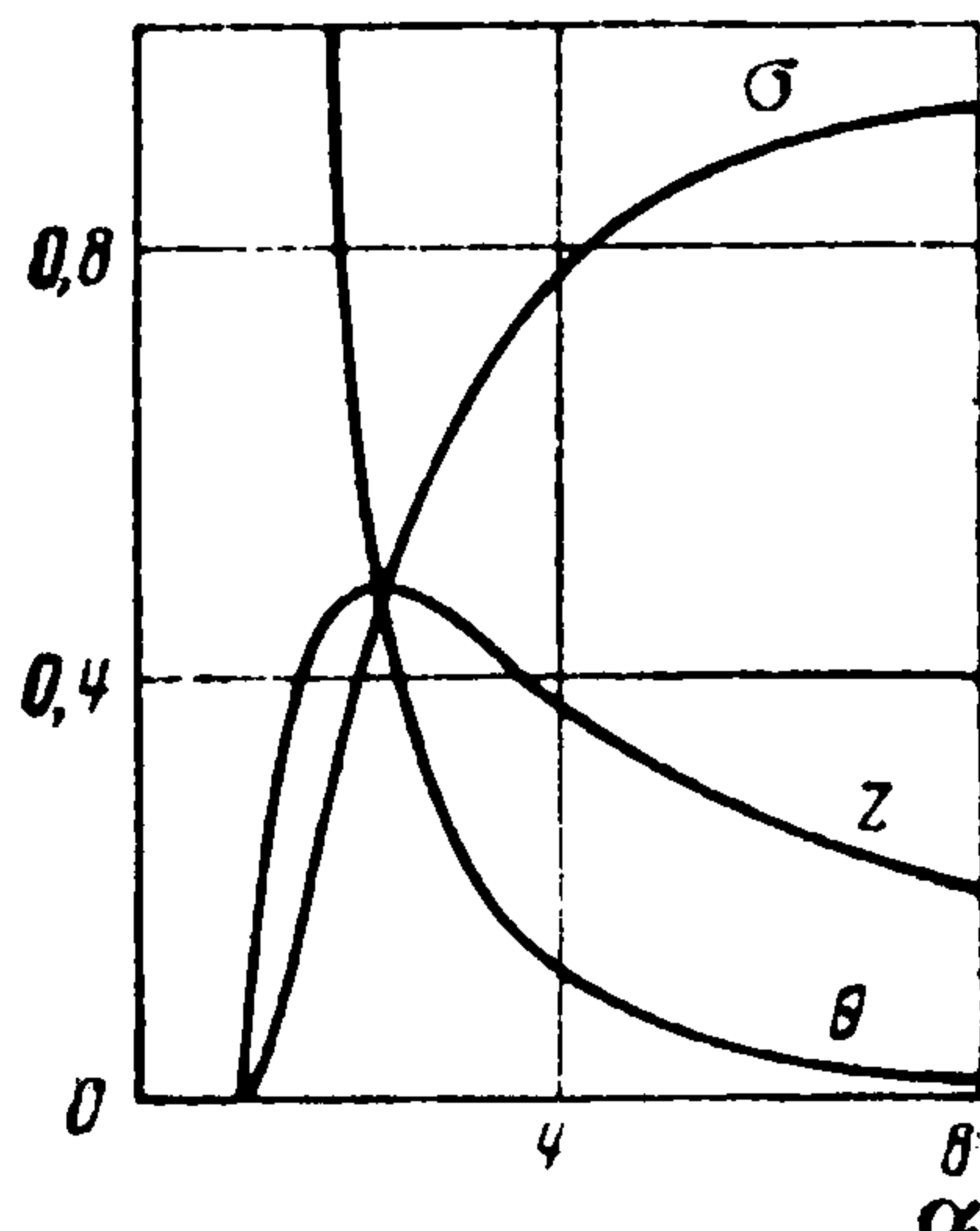
$$\omega_{\pm} = \omega_0 (1 \pm \varepsilon)^{1/2} \quad (10)$$

и показать, что при  $\alpha \gg 1$  минимум  $\theta$  достигается, если  $\varepsilon \approx \alpha^{-1}$ . Численным анализом установлено, что с ростом  $\alpha$  величина  $\theta$ , находящаяся из решения системы (9), слабее зависит от  $\varepsilon$ . Поэтому можно принять, что для всех  $\alpha$  величины  $\omega_{\pm}$  должны определяться формулами (10), где  $\varepsilon = \alpha^{-1}$ .

Графики вычисленных на основании этого условия значений  $\theta, z$  и  $\sigma$  как функций от  $\alpha$  изображены на фиг. 4. При больших  $\alpha$  имеем  $\theta \approx 2\alpha^{-2}, z \approx \sqrt{3}\alpha^{-1}, \sigma \approx 1 - 4\alpha^{-2}$ ; при  $\alpha \approx 1$  имеем  $\theta \approx 2(\sqrt{5} - 1)(\alpha^2 - 1)^{-1}, z \approx \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1)(\alpha^2 - 1)/8, \sigma \approx$



Фиг. 3



Фиг. 4

$\approx (\alpha^2 - 1)^2/8$ . Относительное превышение  $\theta$  по сравнению со значением  $2(\alpha^2 - 1)^{-1}$ , следующим из приближенного решения [2], стремится к  $\approx 24\%$  при  $\alpha \rightarrow 1 + 0$ , но уже при  $\alpha = 1,1$  оно составляет  $9\%$ , а при  $\alpha = 2,5$  не превышает  $1\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М.: Физматгиз, 1960. 580 с.
2. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
3. Neibert V. H. Dynamic absorbers applied to a bar that has solid damping // J. Acoust. Soc. America. 1964. V. 36, No. 4. P. 673—680.
4. Кобелев В. М., Копелев Ю. Ф., Ревва В. Ф. Демпфирование микроколебаний в механических системах многомассовыми виброгасителями // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев. Наук. думка, 1970. С. 442—449.
5. Корнев Б. Г., Резников Л. М. Гашение колебаний башенных сооружений при сейсмических воздействиях // Строит. механика и расчет сооружений. 1971. № 5. С. 1—5.
6. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Степанов А. В. О выводе характеристического уравнения линейной колебательной системы общего вида с затуханием // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 48—52.

Ленинград

Поступила в редакцию  
28.XII.1989