Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 539.3

В. Я. Терещенко

К ВОПРОСУ ОБОСНОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ФОРМУЛИРОВОК МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматриваются вопросы сходимости гранично-элементных аппроксимаций вариационных решений краевых задач линейной теории упругости при помощи потенциалов двойного и простого слоя (ПДС и ППС) [1, 2]. Доказываются вспомогательные предложения о базисности аппроксимирующей последовательности потенциалов. Результаты могут быть использованы также для обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов (МГЕ) при решении других эллиптических краевых задач второго порядка.

Были предложены [1, 2] формулировки МГЭ, использующие аппроксимацию решений вариационных задач для граничных функционалов (ГФ) и обобщенных функционалов Трефтца (ОФТ) краевых задач линейной теории упругости при помощи ПДС и ППС, плотность которых интерполируется по значениям перемещений в узлах граничных элементов (ГЭ) (прямая формулировка), или по значениям напряжений (двойственная формулировка). Узловые значения коэффициенты приближений «по Ритцу» для решений указанных вариационных задач и находятся из системы дискретных граничных уравнений. Соответствующий интерполяционный полином, коэффициенты которого определяются через узловые значения перемещений, является полным [3]; физически условие полноты обеспечивает возможность аппроксимации поля постоянных деформаций, т. е. при измельчении разбиения на ГЭ деформированное состояние внутри элемента стремится к состоянию с постоянной деформацией, что в итоге и обеспечивает сходимость приближенного решения.

Таким образом, приближения по Ритцу для каждого разбиения на ГЭ по сути тождественны последовательности ПДС (или ППС) с искомой векторной плотностью в виде полного полинома. Тогда обоснование сходимости ГЭ-приближений по Ритцу к решению соответствующей краевой задачи сводится к доказательству полноты последовательности ПДС (или ППС) в энергетической норме данной краевой задачи, или в эквивалентной норме соболевского класса функций [1], при условии, что должны быть выполнены требования, обеспечивающие сходимость ГЭ-приближений при уменьшении размера элемента, именно: требование полноты базисных функций ГЭ и согласованности элементов [3]. В связи со сказанным следует подчеркнуть, что предложенные [1, 2] вариационные формулировки МГЭ являются $(m-1)$-мерным вариантом метода конечных элементов (МКЭ) в формулировке «по Ритцу», поэтому могут быть использованы известные критерии полноты базисных функций конечного элемента и согласованности элементов, обеспечивающие сходимость МКЭ в вариационной формулировке по Ритцу (см., например, [4—6] и др.): полнота системы базисных функций МКЭ обеспечивается выбором полного интерполяционного полинома (см. выше); условие согласованности элементов заключается в том, что при переходе через границу между элементами должны быть непрерывными интерполяционная функция и ее производные вплоть до порядка $q-1$ включительно, где q — наивысший порядок производных, содержащихся в функционале вариационной формулировки.

Некоторые предложения по обоснованию вариационных формулировок МГЭ имеются в [1, 2]; здесь изложим доказательство этих предложений.

1. Для упрощения изложения будем рассматривать ПДС и ППС со скалярной плотностью (сохраняются принятые ранее [1, 2] обозначения)

$$\begin{gathered}\beta_n(x)=c_1\int\limits_{\Delta s_n(y)}\partial_{\nu_\Delta}\Gamma(x,y)\,\varphi_n(y)\,ds_n(y)\\ \gamma_n(x)=c_2\int\limits_{\Delta s_n(y)}H(x,y)\,t_n(y)\,ds_n(y),\qquad x\in G_\Delta\end{gathered}\tag{1.1}$$

(в дальнейшем постоянные c_1, c_2 будут опускаться). Здесь

$$S_\Delta = \underset{n}{U} \Delta s_n \tag{1.2}$$

— дискретная граница, ограничивающая область $G_\Delta \subset G$, где G — m-мерная ограниченная область с достаточно гладкой границей S: Δs_n — граничный элемент, предполагается, что $G_\Delta \to G$ при $\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0$, (или $S_\Delta \equiv S$); $\Gamma(x, y)$, $x, y \in \overline{G}_\Delta = G_\Delta + S_\Delta$ — функция Грина эллиптического дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$A\Gamma(x; y) = 0, \ x, y \in G_\Delta \ (x \neq y); \ \Gamma(x, y)|_{y \in S_\Delta} = 0 \tag{1.3}$$

и $\partial_{\nu_\Delta} = \partial/\partial_{\nu_\Delta}$ — дифференцирование по направлению внешней конормали (нормали) к поверхности S_Δ; $H(x, y)$, $x, y \in \overline{G}_\Delta$ — «функция Неймана» указанного оператора:

$$AH(x, y) = 0, \ x, y \in G_\Delta \ (x \neq y); \ \partial_{\nu_\Delta} H(x, y)|_{y \in S_\Delta} = 0 \tag{1.4}$$

причем постулируется существование таких функций; соотношения (1.3), (1.4) обоснованы [4] для кусочно-гладкой границы S_Δ;

$$\varphi_n(y(\eta)) = \sum_k \Phi_{nk} \psi_k(\eta), \qquad \eta \in \Delta s_n, \qquad n = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

— интерполяционные функции, построенные по узловым значениям Φ_{nk} (k — номер узла) потенциалов β_n при помощи базисных функций МГЭ ψ_k, соответствующих выбранному интерполяционному полиному порядка p [3], где $y(\eta)$ — зависимость между локальными (η) и глобальными (y) координатами точек ГЭ ΔS_n;

$$t_n(y(\eta)) = \sum_k T_{nk} \psi_k'(\eta), \qquad \eta \in \Delta s_n, \qquad n = 1, \ldots, N \tag{1.6}$$

— интерполяционные функции, построенные по узловым значениям T_{nk} нормальной производной потенциалов γ_n при помощи базисных функций МГЭ ψ_k', в частности, может быть $\psi_k' = \partial_{\nu_n} \psi_k$, где $\nu_n(\eta)$ — внешняя конормаль (нормаль) в точках $\eta \in \Delta s_n$. Выше и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование по k ведется от $k = 1$ до $k = K$, по n — от $n = 1$ до $n = N$.

Потенциалы (1.1) используются для ГЭ-аппроксимации решений прямой и двойственной формулировок вариационных задач для ГФ и ОФТ.

Для существования интегралов в (1.1) достаточна [7] непрерывность соответствующих плотностей в точках Δs_n (при достаточной гладкости самих ГЭ), что накладывает соответствующие требования к гладкости интерполяционных полиномов (в смысле их порядка).

Непрерывность в точках границы S_Δ интерполяционных функций

$$\sum_n \varphi_n(y), \qquad \sum_n t_n(y), \qquad y \in S_\Delta$$

вида (1.5), (1.6) $\forall N$ обеспечивается условием согласованности ГЭ Δs_n (см. выше), которое реализуется при составлении системы уравнений МГЭ за счет равенства узловых значений Φ_{nk} (в прямой формулировке) и T_{nk} (в двойственной формулировке) в общих узлах смежных элементов [1, 2]. Таким образом, по построению аппроксимации

$$\sum_n \beta_n|_{S_\Delta} = \sum_n \varphi_n(y) \tag{1.7}$$

$$\sum_n \partial_{\nu_n} \gamma_n|_{S_\Delta} = \sum_n t_n(y) \tag{1.8}$$

непрерывны и имеют конечное число точек и линий разрыва производных первого порядка, так что принадлежат пространству $W_2^1(S_\Delta)$, которое в данном случае определяется как множество функций, принадлежащих пространству непрерывных функций $C(S_\Delta)$, первые производные которых по $y \in S_\Delta$ принадлежат пространству функций с интегрируемым по S_Δ (см. (1.2)) квадратом $L_2(S_\Delta)$ (такое определение топологически эквивалентно обычному определению соболевского класса функций $W_2^1(S)$, см. [8]).

В задачах линейной теории упругости (изотропный случай) функции $\Gamma(x, y)$ соответствует тензор Грина первой задачи статики, функции $H(x, y)$ — тензор Грина второй задачи статики; плотность потенциала, определяемого первой (второй) формулой (1.1), интерполируется по узловым значениям перемещений (напряжений), тогда соответствующие вектор-потенциалы описывают поле перемещений в точках $x \in G_\Delta^1$ упругой среды [1, 2].

Установим свойства базисности последовательностей потенциалов

$$\{\beta_n(x)\}_{n=1,\ldots,N}, \quad \{\gamma_n(x)\}_{n=1,\ldots,N}, \quad x \in S_\Delta \tag{1.9}$$

При $x \in \Delta s_n$ потенциалы (1.1) будем рассматривать как линейные интегральные операторы с областью определения $C(\Delta s_n)$

$$\beta_n(x) \equiv R(\varphi_n)(x), \quad \gamma_n(x) \equiv R'(t_n)(x), \quad x \in \Delta s_n$$

отображающие в пространство $L_2(\Delta s_n)$.

Напомним необходимые для дальнейшего свойства граничных потенциалов [9, 10].

ППС имеет особенность $O(r^{-1})$, $r = |x - y|$, $x, y \in S$, соответственно ПДС имеет особенность $O(r^{-2})$; следовательно, ППС — интеграл со слабой особенностью, если S — двумерная граница и ППС — сингулярный интеграл, если S — одномерная граница. Для указанных размерностей границы S ПДС — сингулярный интеграл. Соответствующими свойствами обладают интегральные операторы R' и R, порожденные ППС и ПДС.

Известно [10], что интегральный оператор со слабой особенностью вполне непрерывный и, следовательно, ограниченный в L_2. Сингулярный интегральный оператор ограничен в L_2 при выполнении условий на характеристику оператора как сингулярного интеграла [10]. Таким образом, интегральные операторы R и R' являются ограниченными в $L_2(\Delta s_n)$ операторами над соответствующими плотностями, т. е.

$$\|R(\varphi_n)\|_{L_2(\Delta s_n)} \leqslant c\|\varphi_n\|_{L_2(\Delta s_n)} \tag{1.10}$$

$$\|R'(t_n)\|_{L_2(\Delta s_n)} \leqslant c'\|t_n\|_{L_2(\Delta s_n)}$$

$$c = \|R\|_{L_2(\Delta s_n)} < \infty, \qquad c' = \|R'\|_{L_2(\Delta s_n)} < \infty$$

При $\varphi_n = 0$ $(\Phi_{nk} = 0)$ и при $t_n = 0$ $(T_{nk} = 0)$ имеем соответственно $\beta_n = 0$ и $\gamma_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, следовательно,

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0 \tag{1.11}$$

Полнота последовательностей (1.9) в $L_2(S_\Delta)$ имеет место, если область значений операторов

$$\sum_n R_n\,(R_n \equiv R(\varphi_n)), \qquad \sum_n R_n'\,(R_n' \equiv R'(t_n))$$

является плотной в $L_2(S_\Delta)$.

Для доказательства этого понадобятся некоторые свойства регулярности граничных потенциалов в терминах пространства функций равномерно непрерывных по Гельдеру $C^{0,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в ограниченной области [11]: пусть $D \subset E_3$ — ограниченная область, граница которой ∂D есть конечное объединение поверхностей Ляпунова [9], тогда ППС с плотностью из $C(\partial D)$ — функция из $C^{0,\alpha}(E_3)$, $0 < \alpha < 1$; ПДС с плотностью из $C(\partial D)$ — функция из $C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$.

На основании этого доказывается следующая

Лемма 1. Область значений операторов $\sum\limits_n R_n'$, $\sum\limits_n R_n$ плотна в $L_2(S_\Delta)$.

Доказательство. При достаточной гладкости ГЭ $\Delta s_n \subset S_\Delta$ линейная комбинация потенциалов

$$\sum_n \gamma_n(x), \quad \sum_n \beta_n(x), \quad x \in S_\Delta$$

с плотностью соответственно (1.8), (1.7) из $C(S_\Delta)$ порождает указанные операторы, которые в силу приведенных выше свойств потенциалов отображают $C(S_\Delta)$ в $C^{0,\alpha}(S_\Delta)$, $0 < \alpha < 1$; такое множество функций равномерно непрерывно в конечной области S_Δ и, следовательно, плотно в $L_2(S_\Delta)$ (см., например, [12]).

Базисность последовательностей потенциалов (1.9) устанавливается на основании следующих предложений.

Лемма 2. Пусть плотности потенциалов (1.1) — последовательности линейно-независимых функций, тогда (1.9) — также последовательности линейно-независимых функций.

Доказательство. Предположим противное, пусть найдутся постоянные Φ_{1k}, $\Phi_{2k}, \ldots, \Phi_{Nk}$, не равные одновременно нулю, такие, что (см. (1.5))

$$R\Big(\sum_k \Phi_{1k}\psi_k\Big) + R\Big(\sum_k \Phi_{2k}\psi_k\Big) + \ldots + R\Big(\sum_k \Phi_{Nk}\psi_k\Big) = R\Big(\sum_n \sum_k \Phi_{nk}\psi_k\Big) = 0$$

Так как $R(0) = 0$ (см. (1.11)), то отсюда следует равенство нулю последнего выражения в скобках, что противоречит предположению о линейной независимости последовательности плотности потенциалов $\{\beta_n\}$; аналогично устанавливается линейная независимость $\{\gamma_n\}$.

Для дальнейшего предварительно уточним определение полноты в $L_2(S)$ последовательности $\{\varphi_n\}$ интерполяционных функций вида (1.5) (или (1.6)). Обычно используемое определение полноты системы координатных функций в некотором гильбертовом пространстве H при построении процесса Ритца [13]: каковы бы ни были функция $\varphi \in H$ и число $\varepsilon > 0$, можно найти такое натуральное число M и такие постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$, чтобы выполнялось неравенство

$$\Big\| \varphi - \sum_n \alpha_n \varphi_n \Big\|_H < \varepsilon \tag{1.12}$$

должно быть уточнено с учетом оценки, которая имеет место при аппроксимации кусочно-полиномиальными интерполянтами (типа сплайнов) и используется в МКЭ [14—16]

$$\Big\| \varphi - \sum_n \sum_k \Phi_{nk}\psi_k \Big\|_{L_2(S_\Delta)} = O(\bar{d}^\delta) \geqslant c_0 \underline{d}^{p+1} \tag{1.13}$$

$$\bar{d} = \max_n \operatorname{diam} \Delta s_n, \quad \underline{d} = \min_n \operatorname{diam} \Delta s_n; \ \delta, c_0 > 0$$

если конечные элементы Δs_n и функция φ достаточно гладкие.

Таким образом, при заданной границе (1.2) число M в (1.12) определяется числом N ГЭ Δs_n, а число ε не может быть меньшим $c_0 \underline{d}^{p+1}$, где p — порядок полинома.

Лемма 3. Последовательности линейно независимых потенциалов (1.9) являются полным в пространстве $L_2(S_\Delta)$.

Доказательство. Утверждение леммы для последовательности $\{\beta_n\}$ тривиально в силу $\beta_n|_{S_\Delta} = \varphi_n$, $\forall n$ (см. (1.7)) и полноты интерполяционных функций (1.5) в смысле (1.13). Такой же вывод в силу (1.8) и полноты в таком же смысле интерполяционных функций (1.6) имеет место и для последовательности $\{\partial_{\nu_n}\gamma_n\}$. Таким образом, остается установить лишь полноту в $L_2(S_\Delta)$ последовательности $\{\gamma_n\}$.

Для множества равномерно-непрерывных функций плотного в $L_2(S_\Delta)$ (см. лемму 1) указанная полнота есть R'-полнота последовательности $\{t_n\}$ в смысле (1.13) (определение A-полноты последовательности см. [13], с. 453), так как можно подобрать число N' и постоянные T_{1k}', T_{2k}', ..., $T_{N'k}'$, так чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| t - \sum_{n=1}^{N'} \sum_{k=1}^{K} T'_{nk}\psi_k' \right\|_{L_2(S_\Delta)} < \frac{\varepsilon'}{2c'}, \quad \varepsilon' > 0$$

где c' — постоянная из (1.10); тогда для произвольного ППС $\gamma' = R't$ из указанного выше множества плотного в $L_2(S_\Delta)$ и ППС

$$\gamma_{N'} = R'\Big(\sum_{n=1}^{N'} t_n\Big) = R'\Big(\sum_{n=1}^{N'}\sum_{k} T'_{nk}\psi_k'\Big)$$

при учете (1.10) имеет место неравенство

$$\|\gamma' - \gamma_{N'}\|_{L_2(S_\Delta)} \leqslant c' \left\| t - \sum_{n=1}^{N'}\sum_{k} T'_{nk}\psi_k' \right\|_{L_2(S_\Delta)} < c'\frac{\varepsilon'}{2c'} = \frac{\varepsilon'}{2} \tag{1.14}$$

Пусть теперь γ — произвольный ППС из $L_2(S_\Delta)$; найдется ППС γ' из множества, плотного в $L_2(S_\Delta)$, такой, что

$$\|\gamma - \gamma'\|_{L_2(S_\Delta)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

Подберем число N' и постоянные T'_{nk} так, чтобы выполнялось неравенство (1.14), тогда в силу неравенства теругольника получим

$$\|\gamma - \gamma_{N'}\|_{L_2(S_\Delta)} \leqslant \|\gamma - \gamma'\|_{L_2(S_\Delta)} + \|\gamma' - \gamma_{N'}\|_{L_2(S_\Delta)} < \varepsilon' \tag{1.15}$$

полноту последовательности $\{\gamma_n\}$, $n = 1, \ldots, N'$ в пространстве $L_2(S_\Delta)$.

2. Использование процесса Ритца для построения решений вариационных задач для ГФ, эквивалентных эллиптическим краевым задачам второго порядка, предполагает построение базисных систем функций в соответствующих граничных «энергетических» пространствах [17].

Задача минимизации ГФ вида

$$f(u) = \int_S u\partial_\nu u\, ds - 2\int_S ug\, ds \tag{2.1}$$

на решениях дифференциального уравнения $Au = 0$ в G (при условии $\int udG = 0$, если квадратичная форма $B_A(u, u)$ только неотрицательная) эквивалентна [17] неоднородной краевой задаче Неймана (g — заданная функция) и энергетическим пространством допустимых функций является [17] подпространство следов на S $W_2^{*1/2}(S) \subset W_2^{1/2}(S)$ со скалярным произведением.

$$[u, v]_{1/2,S} = \int_S u\partial_\nu v\, ds, \quad |u|_{1/2,S} = \{[u, u]_{1/2,S}\}^{1/2} \tag{2.2}$$

При этом имеют место непрерывные и плотные вложения [17]

$$W_2^{*1/2}(S) \subset L_2(S) \subset W_2^{-1/2}(S) \tag{2.3}$$

для которых выполняется известная теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [17]

$$[u, v]_{1/2,S} = (u, Nv)_{0,S} = (Nu, Nv)_{-1/2,S}, \ \forall u, v \in W_2^{*1/2}(S) \tag{2.4}$$

где N — изометрия $W_2^{*1/2}(S)$ на $W_2^{-1/2}(S)$, которая порождается оператором нормальной производной на S

$$\langle u, \partial_\nu v\rangle = (u, Nv)_{0, S} \tag{2.5}$$

Здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — отношение двойственности на $W_2^{1/2}(S)\times W_2^{-1/2}(S)$; $W_2^{1/2}(S)$ — пространство Соболева—Слободецкого, $W_2^{-1/2}(S)$ — его двойственное; $(\ ,\ )_{0,S}$, $(\ ,\ )_{-1/2,S}$ — скалярные произведения соответственно в $L_2(S)$, $W_2^{-1/2}(S)$.

Лемма 4. Последовательности потенциалов (1.9) являются полными в пространстве $W_2^{*1/2}(S_\Delta)$.

Доказательство. По построению $W_2^{*1/2}(S_\Delta)$ — подпространство следов функций, удовлетворяющих в G_Δ уравнению $Au=0$ (и может быть условию $\int udG_\Delta = 0$), следовательно, следы $\beta_n|_{S_\Delta}$, $\gamma_n|_{S_\Delta}$ потенциалов $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $x\in G_\Delta$, удовлетворяющих указанным условиям, принадлежат $W_2^{*1/2}(S_\Delta)$. Элементы $\partial_{\nu_n}\beta_n$ и $\partial_{\nu_n}\gamma_n$ в силу (2.5) отождествляются [17] соответственно с элементами $N\beta_n$ и $N\gamma_n$. Для элементов $N\beta''$, $N\gamma''$ из пространства $L_2(S_\Delta)$, плотного (в силу (2.3)) в пространстве $W_2^{-1/2}(S_\Delta)$, имеет место неравенство (подобно (1.14))

$$\|N\gamma''-N\gamma_{N''}\|_{-1/2, S_\Delta}\leqslant\|\gamma''-\gamma_{N''}\|_{L_2(S_\Delta)}<\varepsilon''/2 \tag{2.6}$$

Отсюда для произвольных элементов $N\beta$, $N\gamma\in W_2^{-1/2}(S_\Delta)$ подобно (1.15) получим

$$\|N\gamma-N\gamma_{N''}\|_{-1/2, S_\Delta}<\varepsilon''$$

Следовательно, последовательность $\{N\gamma_n\}$, $n=1,\ldots,N''$, полна в $W_2^{-1/2}(S_\Delta)$; аналогичное утверждение имеет место и для последовательности $\{N\beta_n\}$, $n=1,\ldots,N''$, наконец, из равенства

$$\|\partial_\nu u\|_{-1/2, S}=\|Nu\|_{-1/2, S}=|u|_{1/2, S}$$

вытекающего из (2.4), следует

$$|\gamma-\gamma_{N''}|_{1/2, S_\Delta}=\|N\gamma-N\gamma_{N''}\|_{-1/2, S_\Delta}<\varepsilon'' \tag{2.7}$$

что и доказывает лемму.

Для функций $u, v\in W_2^{*1/2}(S)$ при учете (2.2) из формулы Грина следует равенство

$$[u, v]_{1/2, S} = B_A(u, v) = [u, v]_{H_A} \tag{2.8}$$

и энергетическое скалярное произведение эквивалентно скалярному произведению соболевского пространства $W_2^1(G)$. Тогда из (2.7) и (2.8) следует полнота по энергии краевой задачи Неймана (а также по норме $W_2^1(G_\Delta)$) последовательностей потенциалов (1.1).

Таким образом, из доказанного следует возможность ГЭ-приближений при помощи потенциалов $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ решения задачи Неймана как задачи минимизации функционала энергии

$$F(u)=[u,u]_{H_A}-2\int_S ug\,ds,\quad u\in H_A \tag{2.9}$$

На основании леммы 4 доказывается сходимость ГЭ-приближений «по Ритцу» решения задачи минимизации ГФ (2.1), а значит и решения задачи минимизации функционала (2.9). По построению (см. [1, 2]) ГЭ-приближения по Ритцу для реализации решения вариационной задачи для ГФ вида (2.1), как уже упоминалось выше, тождественно равны: последовательности ПДС, определяемых первой формулой (1.1), с искомой плотностью вида (1.5) (прямая формулировка)

$$u_N\equiv\sum_n\beta_n(x),\quad x\in G_\Delta \tag{2.10}$$

или последовательности ППС, определяемых второй формулой (1.1), с искомой плотностью вида (1.6) (двойственная формулировка)

$$u_N \equiv \sum_n \gamma_n(x), \quad x \in G_\Delta \tag{2.11}$$

В первом случае искомыми являются значения функции u в узлах дискретной границы; во втором — значения нормальной производной $\partial_\nu u$ в узлах S_Δ. Узловые значения определяются из соответствующих систем Ритца ГЭ-уравнений для ГФ вида (2.1) [1, 2].

Таким образом, последовательности потенциалов (1.9) (при $x \in G_\Delta$) являются минимизирующими для ГФ вида (2.1), т. е.

$$\lim_{N\to\infty} f_\Delta(u_N) = f(u_0) = \min_{u \in W_2^{*1/2}(S)} f(u) \tag{2.12}$$

Здесь f_Δ — функционал, аппроксимирующий f на приближениях (2.10) (или (2.11)) и

$$f(u_0) = -\int_S u_0 \partial_\nu u_0 ds = -|u_0|^2_{1/2, S}$$

где u_0 — точное решение задачи $\min_u f(u)$ (см. [17]).

Имеем ([13], с. 89, а также [17])

$$f_\Delta(u_N) = |u_0 - u_N|^2_{1/2, S_\Delta} - |u_0|^2_{1/2, S_\Delta}$$

Отсюда в силу (2.12) следует сходимость (при $S_\Delta \to S$)

$$\lim_{N\to\infty} |u_0 - u_N|_{1/2, S} = 0 \tag{2.13}$$

На основании изложенного доказывается

Теорема. ГЭ-решение задачи

$$\min_{u_N} f_\Delta(u_N), \quad u_N \in W_2^{*1/2}(S_\Delta)$$

эквивалентно решению задачи Неймана

$$Au_0(x) = 0, \; x \in G, \; \partial_\nu u_0|_S = g$$

в смысле сходимости при $\operatorname{diam} \Delta s_n \to 0 \Rightarrow S_\Delta \to S$ (или, если $S_\Delta \equiv S$)

$$\lim_{N\to\infty} \|u_0 - u_N\|_{W_2^1(G)} = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \|g - \partial_{\nu_\Delta} u_N\|_{-1/2, S} = 0$$

Первая сходимость следует из (2.8), эквивалентности энергетической нормы и нормы в $W_2^1(G)$ и сходимости (2.13). Вторая сходимость следует из равенства (2.4а), сходимости (2.13) и граничного условия задачи Неймана.

Изложенные результаты о сходимости ГЭ-аппроксимаций при помощи скалярных потенциалов распространяются на случай использования вектор-потенциалов в соответствующих пространствах вектор-функций.

Таким образом, также обоснованы ГЭ-аппроксимации вариационных решений задач линейной теории упругости, построенные в [1, 2].

Сходимость ГЭ-аппроксимаций решений задач минимизации ОФТ [1, 2] доказывается также на основании изложенных результатов о базисности последовательности граничных потенциалов и известных результатов [13, 18, 19] о сходимости процесса Ритца при минимизации ОФТ.

В заключение отметим, что изложенные в [1, 2] вариационные формулировки МГЭ сходны с формулировками МГЭ, использующими интерал ы Коши для связи граничных значений аппроксимирующей функции с ее значениями внутри области, которые применяются для решения ряда прикладных задач механики в рамках теории функций комплексного переменного [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терещенко В. Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616—627.
2. *Терещенко В. Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118—125.
3. *Бенерджи П. К.*, *Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
4. *Норри Д.*, *Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.
5. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
6. *Зенкевич О.*, *Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
8. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
9. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 416 с.
10. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
11. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 399 с.
13. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
14. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.
15. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
16. *Корнеев В. Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 206 с.
17. *Терещенко В. Я.* Ортогональные разложения на границе области в эллиптических краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 3. С. 476—486.
18. *Терещенко В. Я.* Обобщение метода Трефтца для пространственных задач теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16. № 4. С. 996—1005.
19. *Терещенко В. Я.* О процессе Ритца при построении приближенных решений задач теории упругости обобщенным методом Трефтца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 1063—1066.
20. *Громадка Т.*, *Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 304 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 11.III.1990