Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 539.3

Л. А. Алексеева

АНАЛОГИ ФОРМУЛ КИРХГОФА И СОМИЛЬЯНЫ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ЭЛАСТОДИНАМИКИ

На основе теории обобщенных функций записываются нестационарные уравнения движения теории упругости при учете возможных разрывов на фронтах решений в бесконечной области, а также для решений в ограниченной области. Сверткой тензора Грина с правой частью полученных уравнений строятся обобщенные формулы типа формул Кирхгофа, Сомильяны, Гаусса. Предлагаются их интегральные аналоги в случае плоской деформации.

1. Нестационарные уравнения движения в обобщенных функциях. Обозначим: (x_1, x_2, x_3) — лагранжевы декартовы координаты точки $\mathbf{x}$ линейно-упругой изотропной среды, заданной параметрами Ламе λ, μ, плотностью ρ; u_i, ε_{ij}, σ_{ij} — декартовы компоненты перемещений $\mathbf{u}$, тензоров деформации и напряжений соответственно. Связь между ними задается соотношениями Коши и законом Гука [1]

$$\varepsilon_{ij} = 0{,}5\,(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

Здесь и дальше по повторяющимся индексам проводится суммирование; если не оговорено противное, $i, j = 1, \ldots, N$ (при плоской деформации $N = 2$, для пространственной — $N = 3$), $u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j$, $u_{i,t} = \partial u_i/\partial t$.

Уравнения движения сплошной среды

$$\sigma_{ij,j} + \rho G_i = \rho u_{i,tt} \tag{1.2}$$

при учете соотношений (1.1) приводятся к виду

$$L_i^j\,(\partial/\partial\mathbf{x}, \partial/\partial t)\,u_j + G_i = 0 \tag{1.3}$$

$$L_i^j\,(\partial/\partial\mathbf{x},\ \partial/\partial t) = (c_1^2 - c_2^2)\,\partial^2/\partial x_i\partial x_j + \delta_i^j\,(c_2^2\Delta - \partial^2/\partial t^2), \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

где c_1, c_2 — скорости объемных и сдвиговых волн, δ_i^j (δ_{ij}) — символ Кронекера, G_i — декартовы компоненты массовой силы.

Известно [2], что система (1.3) строго гиперболическая. Определитель ее характеристической матрицы

$$\{L_i^j\,(i\xi, i\omega)\} = \{(c_2^2 - c_1^2)\,\xi_i\xi_j - \delta_i^j\,(c_2^2\,|\,\xi\,|^2 - \omega^2)\}$$
$$(\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N), \quad |\,\xi\,| = \sqrt{\xi_i\xi_i})$$

имеет при учете кратности $2N$ действительных корней (при $N = 3$ шесть корней: $\pm c_1$, $\pm c_2$, $\pm c_2$, при $N = 2$ четыре корня: $\pm c_1$, $\pm c_2$. Матрица $\{-L_L^j\,(i\xi, 0)\}$ при $|\,\xi\,| \neq 0$ положительно определенная.

Как известно, гиперболические системы имеют разрывные решения. Поверхность разрыва совпадает с характеристической поверхностью системы (1.3) и движется в пространстве R_N с течением времени t. Пусть F_t — такая поверхность в R_N, F — «та же» поверхность, но в $R_{N+1} = R_N \times t$, $-\infty < t < \infty$, где она неподвижна, причем $F\,(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение этой поверхности, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$ — единичный вектор нормали к F в R_{N+1}:

$$\nu_j = F_{,j} / \| \operatorname{grad} F \|, \quad \| \operatorname{grad} F \| = \sqrt{F_{,j} F_{,j}}, \quad j = 1, \ldots, \quad N+1,$$
$$x_{N+1} = t \tag{1.4}$$

а $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — нормаль к F_t в R_N:

$$n_j = F_{,j} / \| \operatorname{grad} F_t \|, \quad \| \operatorname{grad} F_t \| = \sqrt{F_{,j} F_{,j}}, \quad j = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

Поверхность F_t движется в R_N со скоростью

$$c = -F_{,t} / \| \operatorname{grad} F_t \| \tag{1.6}$$

и определяется уравнением

$$\det \left\{ (c_1^2 - c_2^2) \nu_i \nu_j + \delta_{ij} \left(c_2^2 \sum_{k=1}^{N} \nu_k^2 - \nu_t^2 \right) \right\} = 0, \quad \nu_t = \nu_{N+1} \tag{1.7}$$

В силу гиперболичности системы уравнение (1.7) имеет корни

$$\nu_t = \pm c_l \left(\sum_{k=1}^{3} \nu_k^2 \right)^{1/2}, \quad l = 1, 2 \tag{1.8}$$

Характеристические поверхности (волновые фронты) удовлетворяют одному из этих уравнений и в силу (1.6) движутся со скоростью c_L.

Требование непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт, связанное с сохранением сплошности среды

$$[u_i]_{F_t} = 0 \tag{1.9}$$

приводит к известным кинематическим условиям совместности решений на подвижных фронтах [2]

$$[c u_{i,j} + n_j u_{i,t}]_{F_t} = 0 \tag{1.10}$$

(условие непрерывности касательных производных $\mathbf{u}$ на F_t). Здесь $[f]_{F_t}$ — скачок f на F_t:

$$[f]_{F_t} = \lim_{\varepsilon \to \infty} (f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{n}, t) - f(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}, t))$$

при $\mathbf{x} \in F_t$, $\varepsilon > 0$; $[\mathbf{n} f]_{F_t} \overset{\Delta}{=} \mathbf{n} [f]_{F_t}$

Помимо этого из уравнений (1.3) следуют динамические условия совместности решений на фронтах [2]

$$[\sigma_{ij} n_j + \rho c u_{i,t}]_{F_t} = 0 \tag{1.11}$$

эквивалентные закону сохранения импульса в его окрестности.

Введение сингулярных массовых сил в уравнения движения для построения фундаментальных решений требует записи этих уравнений с учетом условий (1.9)—(1.11) в пространстве обобщенных функций. В качестве основного пространства $D_N(R_{N+1})$ рассмотрим пространство финитных бесконечно-дифференцируемых вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \{\varphi_1(\mathbf{x}, t), \ldots, \varphi_N(\mathbf{x}, t)\}$, определенных на R_{N+1} ($(\mathbf{x}, t) \in R_{N+1}$). Соответствующее ему сопряженное пространство $D_N'(R_{N+1})$ — пространство обобщенных вектор-функций $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t) = \{f_1^*(\mathbf{x}, t), \ldots, f_N^*(\mathbf{x}, t)\}$. Далее везде вместо «вектор-функция» будем говорить «функция». Сходимость определяется аналогично сходимости в $D(R_N) = D_1(R_N)$, $D'(R_N) = D_1'(R_N)$ [3].

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — любое классическое решение уравнений (1.3), непрерывное дважды кусочно-дифференцируемое всюду, кроме, быть может, поверхностей (1.7), где удовлетворяются условия (1.9)—(1.11). Введем соответствующую $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ обобщенную функцию $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$:

$$(\mathbf{u}^*, \varphi) = \int\limits_{R_{N+1}} u_i(\mathbf{x}, t)\, \varphi_i(\mathbf{x}, t)\, dv, \qquad \forall \varphi \in D_N(R_{N+1}) \tag{1.12}$$

где интеграл берется по пространству R_{N+1}, вернее по его части в силу ограниченности носителя $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Обобщенные тензоры напряжений и деформаций σ_{ij}^*, ε_{ij}^* определяются соотношениями (1.1), но уже в обобщенном смысле, т. е. обобщенные производные от $\mathbf{u}^*$ определяются формулой [3]

$$(\mathbf{u}_{,j}^*, \varphi) = -(\mathbf{u}^*, \varphi_{,j}), \quad j = 1, \ldots, N+1 \tag{1.13}$$

Введем характеристическую функцию множества $F_+ = \{(\mathbf{x}, t)\colon F(\mathbf{x}, t) > 0\}$:

$$H_F^+(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & F(\mathbf{x}, t) > 0 \\ 1/2, & F(\mathbf{x}, t) = 0 \\ 0, & F(\mathbf{x}, t) < 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Аналогично вводятся F_- и H_F^-: $H_F^+ + H_F^- = 1$.

Известно [3], что

$$H_{F,j}^+ = \nu_j \delta_F(\mathbf{x}, t), \qquad H_{F,j}^- = -\nu_j \delta_F(\mathbf{x}, t) \tag{1.15}$$

$$u_{i,j}^* = u_{i,j} + [u_i]_F \nu_j \delta_F(\mathbf{x}, t). \tag{1.16}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}\delta_F(\mathbf{x}, t)$ — простой слой на F:

$$(\boldsymbol{\nu}\delta_F, \varphi) = \int\limits_F \nu_j(\mathbf{x}, t)\, \varphi_j(\mathbf{x}, t)\, ds \tag{1.17}$$

(интеграл берется по поверхности F). Первое слагаемое справа в равенстве (1.16) — классическая производная от u_i. Из (1.15), (1.16) получим

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} + 0{,}5\,[u_i\nu_j + u_j\nu_i]_F \delta_F$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} + [\lambda u_k \nu_k \delta_{ij} + \mu(u_i\nu_j + u_j\nu_i)]_F \delta_F$$

$$\sigma_{ij,k}^* = \sigma_{ij,k} + [\sigma_{ij}\nu_k]_F\, \delta_F + \frac{\partial}{\partial x_k}\{[\lambda u_l \nu_l \delta_{ij} + \mu(u_i\nu_j + u_j\nu_i)]_F\, \delta_F\} \tag{1.18}$$

$$u_{i,tt}^* = u_{i,tt} + [\nu_t u_{i,t}]_F\, \delta_F + \frac{\partial}{\partial t}\{[u_i \nu_t]_F\, \delta_F\}$$

Отсюда следует

$$\sigma_{ij,j}^* - \rho u_{i,tt}^* + \rho G_i = \sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} + \rho G_i + [\sigma_{ij}\nu_j - \rho \nu_t u_{i,t}]_F\, \delta_F + \frac{\partial}{\partial x_j} \times$$
$$\times \{[\lambda u_k \nu_k \delta_{ij} + \mu(u_i\nu_j + u_j\nu_i)]_F\, \delta_F\} - \rho \frac{\partial}{\partial t}\{[u_i\nu_t]_F\, \delta_F\} \tag{1.19}$$

В силу соотношений (1.2), (1.11), (1.9), (1.6) правая часть равенства (1.19) обращается в нуль. Следовательно, u^* удовлетворяет тем же уравнениям, но уже в обобщенном смысле.

2. Обобщенные формулы Кирхгофа — Сомильяны нестационарной задачи. Пусть S — поверхность, ограничивающая область S^- в R_N, где определена функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — классическое решение уравнений (1.3), $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S, непрерывной на S. Рассмотрим обобщенную функцию $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$, доопределенную нулем в дополнении $S^+ = R_N \setminus (S + S^-)$: $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, H_S^-(\mathbf{x})\, H(t)$, $H(t)$ — функция Хевисайда, $H_S^-(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества S^- в R_N. Для нее поверхности S и $t = 0$ являются поверхностями разрыва. Проводя дифференцирование $\mathbf{u}^*$ как в п. 1, при учете равенства

$H^{\cdot}(t) = \delta(t)$, получим

$$\rho L_i^j(\partial/\partial \mathbf{x}, \partial/\partial t)\, u_j^* = -\sigma_{ij} n_j \delta_S(\mathbf{x}) H(t) - \frac{\partial}{\partial x_j}\{(\lambda u_k n_k \delta_{ij} + \mu(u_i n_j + u_j n_i)) \times$$

$$\times\, \delta_S(\mathbf{x}) H(t)\} - u_{i0}^{\cdot} H_S^-(\mathbf{x})\,\delta(t) - u_{i0} H_S^-(\mathbf{x})\,\delta^{\cdot}(t) - G_i^* \qquad (2.1)$$

$$G_i^* = G_i H_S^-(\mathbf{x})\, H(t)$$

Здесь $H_S^-(\mathbf{x})\,\delta(t)$, $H^-{}_S(\mathbf{x})\,\delta^{\cdot}(t)$ — простой и двойной слои на основании цилиндра $S^- \times T$ $(T = \{t\colon\ t \geqslant 0\})$, $\delta_S(\mathbf{x})\, H(t)$ — простой слой на его боковой поверхности. Так как вне S^- и при $t < 0$ величина $\mathbf{u}^* = 0$, в уравнении (2.1) вместо скачков стоят значения соответствующих выражений на S; $u_{i0} = u_i(\mathbf{x}, 0)$, $u_{i0}^{\cdot} = \partial u_i(\mathbf{x}, 0)/\partial t$.

Пусть $U_{ik}^*(\mathbf{x}, t)$ — фундаментальное решение (тензор Грина) уравнения (1.3), соответствующее массовой силе $G_i^* = \delta_{ik}\delta(\mathbf{x}, t)$:

$$L_i^j(\partial/\partial \mathbf{x}, \partial/\partial t)\, U_{jk}^* + \delta_{ik}\delta(\mathbf{x}, t) = 0 \qquad (2.2)$$

Обозначим $p_k = \sigma_{kj} n_j$ при $\mathbf{x} \in S$. Используем свойство фундаментальных решений: для любой $G^* \in D_N(R_{N+1})$ соответствующее решение (1.3) имеет вид свертки по $(\mathbf{x}, t)$

$$u_j^* = U_{jk}^* * G_k^* \qquad (2.3)$$

если оно существует. Из соотношений (2.1), (2.3) при учете свойства дифференцирования свертки получим

$$\rho u_i^* = U_{ik}^* * p_k \delta_S(\mathbf{x}) H(t) + (\lambda u_l n_l \delta_{kj} +$$

$$+\, \mu(u_k n_j + u_j n_k))\, \delta_S(\mathbf{x})\, H(t) * U_{ik,j}^* +$$

$$+\, u_{k0}^{\cdot} H_S^-(\mathbf{x})\, \mathbf{x}^* U_{ik}^* + u_{k0} H_S^-(\mathbf{x})\, \mathbf{x}^* U_{ik,t}^* + U_{ik}^* * G_k^* \qquad (2.4)$$

Символ $\mathbf{x}^*$ означает, что свертка берется только по $\mathbf{x}$.

Соотношение (2.4) формально можно записать в интегральной форме, переобозначая немые индексы, по которым идет суммирование u_j:

$$\rho u_i(\mathbf{x}, t) H(t) = \int_0^t d\tau \int_S \{U_{ik}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau)\, p_k(\mathbf{y}, t-\tau) + u_k(\mathbf{y}, t-\tau) \times$$

$$\times\, (\lambda U_{il,l}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau)\, n_k(\mathbf{y}) + \mu n_j(\mathbf{y})\,(U_{ik,j}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau) + U_{ij,k}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau)))\}\, ds(\mathbf{y}) -$$

$$- \int_{S^-} (u_{k0}^{\cdot}(\mathbf{y})\, U_{ik}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) + u_{k0}(\mathbf{y})\, U_{ik,t}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t))\, dv(\mathbf{y}) +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{S^-} U_{ik}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau)\, G_k^*(\mathbf{y}, t-\tau)\, dv(\mathbf{y}) \qquad (2.5)$$

$$U_{ik,j}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau) = \partial U_{ik}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \tau)/\partial x_j$$

Введем тензоры

$$U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = U_{ik}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$$

$$S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \lambda\delta_{ij} U_{lk,l} + \mu(U_{ik,j} + U_{jk,i}) \qquad (2.6)$$

$$\Gamma_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = S_{ijk} n_j, \quad T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = \Gamma_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t, \mathbf{n})$$

позволяющие записать соотношения (2.5) в традиционном виде, если использовать свойства тензора Грина:

$$U_{ij}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) = U_{ji}^*(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) = U_{ij}^*(\mathbf{y}-\mathbf{x}, t) \qquad (2.7)$$

которые являются следствием изотропии среды, влекущей за собой инвариантность уравнений движения (2.2) относительно группы ортогональных преобразований, в том числе отражения. Итак, используя равенства (2.6), (2.7), получим формулу типа формулы Сомильяны, известной в статической теории упругости [1, 4]:

$$\rho u_i(\mathbf{x}, t) H_S^-(\mathbf{x}) H(t) = \int_0^t d\tau \int_S U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) p_k(\mathbf{y}, t-\tau) ds(\mathbf{y}) -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_S T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) u_k(\mathbf{y}, t-\tau) ds(\mathbf{y}) + \int_{S^-} (\dot{u}_{k0}(\mathbf{y}) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) +$$

$$+ u_{k0}(\mathbf{y}) U_{ik,t}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) dv(\mathbf{y}) + \int_0^t d\tau \int_{S^-} G_k(\mathbf{y}, t-\tau) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) dv(\mathbf{y}) \quad (2.8)$$

Конкретная форма записи зависит от вида тензоров U_{ik}, T_{ik}, $U_{ik,t}$. Эти тензоры, или часть из них, вообще говоря, выражаются через сингулярные обобщенные функции, поэтому запись (2.8) формальна, хотя часто встречается в литературе [1]. Предпочтительнее форма (2.7), в которой можно вынести операцию дифференцирования, в силу свойства свертки переписав (2.4) в виде

$$\rho u_i{}^* = p_k \delta_S(\mathbf{x}) H(t) * U_{ik}{}^* + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\lambda u_l n_l \delta_{kj} + \mu(u_k n_j + u_j n_k)) \delta_S(\mathbf{x}) H(t) * U_{ik}^*\} +$$

$$+ \dot{u}_{k0} H_S^-(\mathbf{x}) \, \mathbf{x}^* U_{ik}^* + \frac{\partial}{\partial t} \{u_{k0} H_S^-(\mathbf{x}) \, \mathbf{x}^* U_{ik}^*\} + G_k{}^* * U_{ik}^* \quad (2.9)$$

Здесь, если $U_{ik}{}^*$ — регулярная обобщенная функция, все свертки можно записать в интегральном виде с внешним по отношению к интегралам дифференцированием и исследовать полученное равенство, как обычно, в классе непрерывных кусочно-дифференцируемых функций.

3. Обобщенная формула Гаусса для динамических задач. Покажем, что тензор $T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n})$ — фундаментальное решение уравнений (1.3). Из (2.6) при фиксированном y следует

$$\begin{gathered} -T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = K_l{}^k(\partial/\partial\mathbf{x}, \mathbf{n}) U_{il}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \\ = \{\lambda n_k \partial/\partial x_l + \mu n_j(\delta_{lk}\partial/\partial x_j + \delta_{lk}\partial/\partial x_k)\} U_{il}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ L_j{}^i(\partial/\partial\mathbf{x}, \partial/\partial t) T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = K_j{}^k(\partial/\partial\mathbf{x}, \mathbf{n}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) \end{gathered} \quad (3.1)$$

Последнее справедливо в силу равенства (2.5), перепишем его в виде

$$L_j{}^i(\partial/\partial\mathbf{x}, \partial/\partial t) T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = \lambda n_k \partial\delta/\partial x_j + \mu n_l(\delta_{jk}\partial\delta/\partial x_l + \delta_{jl}\partial\delta/\partial x_k) \quad (3.2)$$

$$\left(\partial\delta/\partial x_l = \delta(t)\, \delta^{\boldsymbol\cdot}(x_l - y_l) \prod_{i \neq l} \delta(x_i - y_i)\right)$$

В силу уравнений (1.2) при $\mathrm{y} = 0$

$$S_{ijk,j} - \rho U_{ik,tt} + \rho\delta_{ik}\delta(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.3)$$

Свертывая (3.3) с $H_S^-(\mathbf{x}) H(t)$ при учете (1.15) получим

$$S_{ijk,j} * H_S^-(\mathbf{x}) H(t) = -\int_{ijk} * n_j \delta_S(\mathbf{x}) H(t) =$$

$$= -\rho\delta_{ik} H_S^-(\mathbf{x}) H(t) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{U_{ik} * H_S^-(\mathbf{x}) H(t)\}. \quad (3.4)$$

Используем (2.6) и перепишем (3.4) в интегральном виде:

$$\int_0^t d\tau \int_{S^-} T_{ik}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tau, \mathbf{n}(\mathbf{y})) ds(\mathbf{y}) = \rho\delta_{ik} H_S^-(\mathbf{x}) H(t) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{S^-} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dv(\mathbf{y}) \quad (3.5)$$

В отличие от формулы Гаусса статической теории упругости [4] это равенство содержит второе слагаемое в правой части, обусловленное наличием временной зависимости.

4. Тензоры $U_{ik}{}^*$ и $T_{ik}{}^*$. В случае плоской деформации ($N = 2$) тензор $U_{ik}{}^*$ построен в [5], однако вследствие допущенной ошибки, которую укажем ниже, полученная формула для $U_{ik}{}^*$ неверна. Для пространственной деформации тензор $U_{ik}{}^*$ представлен в [1]. Здесь изложим другой очень простой вывод.

Применяя к (2.2) обобщенное преобразование Фурье и разрешая полученные уравнения, найдем выражение трансформанты Фурье тензора Грина

$$F[U_{ij}{}^*(\mathbf{x}, t)] = \frac{\delta_{ij}}{c_2^2|\xi|^2 - \omega^2} + \frac{\xi_i\xi_j}{\omega^2}\left(\frac{c_1^2}{c_1^2|\xi|^2 - \omega^2} - \frac{c_2^2}{c_2^2|\xi|^2 - \omega^2}\right) \tag{4.1}$$

где $(\xi_1, \ldots, \xi_N, \omega)$ — переменные Фурье, соответствующие $(x_1, \ldots, x_N, t)$ $|\xi| = \sqrt{\xi_i\xi_i}$. Обобщенное преобразование Фурье определяется соотношением

$$(F[\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t)],\quad F[\varphi(\mathbf{x}, t)]) = (2\pi)^{N+1}(\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t),\quad \varphi(\mathbf{x}, t)) \tag{4.2}$$

$$(F[\varphi(\mathbf{x}, t)] = \int\limits_{R_{N+1}} \varphi(\mathbf{x}, t)\exp(i(\xi\mathbf{x}) + i\omega t)\,dv$$

для любых $\varphi \in D_N(R_{N+1})$).

Видно, что функция

$$\Phi_0(\xi, \omega, c) = (c^2|\xi|^2 - \omega^2)^{-1} \tag{4.3}$$

является преобразованием Фурье функции Грина волнового уравнения Даламбера

$$(\partial^2/\partial t^2 - c^2\Delta)\,\Phi_0(\mathbf{x}, t, c) = \delta(\mathbf{x}, t) \tag{4.4}$$

решения которого хорошо известны для любых N [3]. Функции

$$\overline{\Phi}_1 = -\overline{\Phi}_0/(i\omega),\quad \overline{\Phi}_2 = -\overline{\Phi}_1/(i\omega) = \overline{\Phi}_0/(i\omega)^2$$

преобразования Фурье сверток

$$\overline{\Phi}_1 = F[\Phi_0 * H(t)\,\delta(\mathbf{x})],\quad \overline{\Phi}_2 = F[\Phi_1 * H(t)\,\delta(\mathbf{x})]$$

если в качестве регуляризации функции $1/(i\omega)$ взять $1/(i(\omega + i0))$ в силу того, что $\Phi_j = 0$ при $t < 0$. Следовательно:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_0 * H(t)\,\delta(\mathbf{x}) = H(t)\int\limits_0^t \Phi_0(\mathbf{x}, \tau, c)\,d\tau\\ \Phi_2 &= \Phi_1 * H(t)\,\delta(\mathbf{x}) = H(t)\int\limits_0^t \Phi_1(\mathbf{x}, \tau, c)\,d\tau\end{aligned} \tag{4.5}$$

Поскольку

$$F[\partial\mathbf{f}^*/\partial x_k] = -i\xi_k F[\mathbf{f}^*].$$

из (4.1) получим

$$U_{ik}{}^*(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(\mathbf{x}, t, c_2)\,\delta_{ik} + \partial^2(c_1^2\Phi_2(\mathbf{x}, t, c_1) - c_2^2\Phi_2(\mathbf{x}, t, c_2))\,\partial^2/\partial x_i\partial x_k \tag{4.6}$$

а из (3.1) при учете (4.6) найдем

$$\begin{aligned}T_{ik}{}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) &= \lambda n_k\Phi_{01,i} + \mu((n_i\Phi_{02,k} + \delta_{ik}\,\partial\Phi_{02}/\partial\mathbf{n}) +\\ &+ 2\partial(c_1^2\Phi_{21,ik} - c_2^2\Phi_{22,ik}))/\partial\mathbf{n}\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\Phi_{kj} = \Phi_k(\mathbf{x}, t, c_j),\quad \partial/\partial\mathbf{n} = n_j\partial/\partial x_j$$

Плоская деформация. При $N = 2$ имеем [3]

$$\Phi_0(\mathbf{x}, t, c) = \frac{H(ct - r)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2 - r^2}},\quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{4.8}$$

Выполняя интегрирование (4.5), найдем

$$\Phi_k(x, t, c) = H(ct - r) f_k(r, t, c), \quad k = 0, 1, 2$$

$$f_1(r, t, c) = \frac{1}{2\pi c^2} \ln \frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - r^2}}{r}$$

$$f_2(r, t, c) = \frac{1}{2\pi c^3}\left(ct \ln \frac{ct + \sqrt{c^2t^2 - r^2}}{r} - \sqrt{c^2t^2 - r^2}\right) \tag{4.9}$$

Подставляя выражения (4.9) в (4.6), найдем U_{ik}^* в случае плоской деформации [1]:

$$U_{ik}^*(x, t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{t^2}{r^2}(2r_{,i}r_{,k} - \delta_{ik})\left(\frac{c_1 H(c_1t - r)}{\sqrt{c_1^2t^2 - r^2}} - \frac{c_2 H(c_2t - r)}{\sqrt{c_2^2t^2 - r^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{H(c_1t - r)}{c_1\sqrt{c_1^2t^2 - r^2}}(\delta_{ik} - r_{,i}r_{,k}) + \frac{H(c_2t - r)}{c_2\sqrt{c_2^2t^2 - r^2}} r_{,i}r_{,k}\right\}, \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r} \tag{4.10}$$

Из формулы (4.10) следует, что U_{ik}^* — регулярная обобщенная функция, имеет интегрируемые в R_3 особенности на двух фронтах $K^j = \{(\mathbf{x}, t) \in R_3: r = c_jt\}$ порядка $(c_j^2t^2 - r^2)^{-1/2}$. Подвижные фронты $K_t^j = \{\mathbf{x} \in R_2: r = c_jt\}$ — окружности радиуса c_jt — расширяются в R_2 со скоростью c_j. Перед фронтом K_t^1 $U_{ik}^* = 0$.

При $r = 0$, $t \neq 0$ тензор U_{ik}^* имеет устранимую особенность в силу асимптотики

$$\frac{t^2}{r^2}\left(\frac{c_1 H(c_1t - r)}{\sqrt{c_1^2t^2 - r^2}} - \frac{c_2 H(c_2t - r)}{\sqrt{c_2^2t^2 - r^2}}\right) \sim \frac{c_2^{-2} - c_1^{-2}}{2t}, \quad r \to 0 \tag{4.11}$$

Можно показать, что

$$\frac{\partial H(ct - r)}{\partial x_j} = -\frac{x_j}{r}\delta(ct - r)H(t) = -\frac{x_j}{ct}\delta(ct - r)H(t) \tag{4.12}$$

Здесь правая часть соответствует простому слою на поверхности конуса $K = \{(\mathbf{x}, t): r = ct, t > 0\}$:

$$\left(\frac{x_j}{r}\delta(ct - r)H(t), \quad \varphi_j(\mathbf{x}, t)\right) = \int_0^\infty dt \int_{r=ct} \frac{x_j}{ct}\varphi_j(\mathbf{x}, t)\, ds, \qquad \varphi \in D_N(R_{N+1}) \tag{4.13}$$

где внутренний интеграл берется по окружности радиуса ct. Отсюда следует, что тензор T_{ik}^* — сингулярная обобщенная функция, вид которой можно получить, если воспользоваться формулой (4.7).

Пространственная деформация. При $N = 3$ [3] имеем

$$\Phi_0(\mathbf{x}, t, c) = \frac{\delta(ct - r)H(t)}{4\pi cr}, \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{4.14}$$

Из формул (4.5) получим

$$\Phi_1(\mathbf{x}, t, c) = \frac{H(ct - r)}{4\pi c^2 r}, \qquad \Phi_2(\mathbf{x}, t, c) = \frac{H(ct - r)(t - r/c)}{4\pi c^2 r} \tag{4.15}$$

Подставляя в (4.6), найдем

$$U_{ik}^*(\mathbf{x}, t) = t(4\pi r^2)^{-1}\{\delta(c_2t - r)H(t)(\delta_{ik} - r_{,i}r_{,k}) + tr^{-1}(\delta_{ik} -$$

$$- 3r_{,i}r_{,k})(H(c_2t - r) - H(c_1t - r)) + \delta(c_1t - r)H(t)r_{,i}r_{,k}\}$$

$$i, k = 1, 2, 3 \tag{4.16}$$

Формула (4.16) впервые путем прямого обращения трансформанты Фурье — Лапласа тензора U_{ik}^* получена Стоксом [1].

---

[1] В [5] функции, аналогичные f_1, f_2, найдены неверно, в частности, отсутствует r в знаменателях выражений под знаком ln в формулах (4.3.155) — (4.3.155″).

5. **Интегральные аналоги формулы (2.8) для $N = 2$.** Рассмотрим вначале задачи с нулевыми начальными условиями и массовыми силами: $u_{i0} = 0$, $u_{i0}{}^{\cdot} = 0$, $G_i = 0$.

Заметим, что при $N = 3$ формулой (2.8) пользоваться нельзя, так как $V_{ij}{}^*$ — сингулярная обобщенная функция, содержащая простые слои на поверхности конусов $K_t{}^1$, $K_t{}^2$. Ее регулярная часть, содержащая $H(c_jt - r)$, отлична от нуля только между фронтами. При $N = 2$, тензор $T_{ij}{}^*$ (x, y, t, n) содержит неинтегрируемые особенности вида $(r - c_jt)^{-3/2}$, $r = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$, что также не позволяет использовать формулу (2.8) для определения $u_j(\mathbf{x}, t)$. Воспользуемся формулой (2.9) для построения ее интегрального аналога при $N = 2$.

Представим $V_{ik}{}^*$ в виде $U_{ik}{}^* = U_{ik1} + U_{ik2}$, где U_{ikj}^* — слагаемые в выражении (4.10), зависящие от c_j. U_{ik1}^* описывает объемную деформацию, T_{ik2}^* — сдвиговую. Аналогичные разложения вводятся для тензоров T_{ik}^*, U_{ik}, T_{ik}. Обозначим

$$W_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \int\limits_{r/c_j}^{t} U_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, d\tau$$

$$H_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}) = \lambda n_k \frac{\partial W_{imj}}{\partial y_m} + \mu n_m \left(\frac{\partial W_{ikj}}{\partial y_m} + \frac{\partial W_{imj}}{\partial y_k} \right), \quad H_{ik} = H_{ik1} + H_{ik2} \tag{5.1}$$

Ясно, что

$$W_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, r/c_j) = 0 \tag{5.2}$$

а из формулы (3.5) следует

$$\int\limits_S H_{ik}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) = \rho \delta_{ik} H_S{}^-(\mathbf{x}) H(t) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S^-} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, dv(\mathbf{y}) \tag{5.3}$$

Используя соотношения (4.5), (4.6), (4.10), найдем

$$W_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = W_{ik1} + W_{ik2} =$$
$$= \frac{H(c_2t - r)}{2\pi c_2{}^2} \delta_{ik} \ln \frac{c_2t + \sqrt{c_2{}^2t^2 - r^2}}{r} - \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \frac{H(c_jt - r)}{2\pi c_j{}^2} \times$$
$$\times \left(\delta_{ik} \ln \frac{c_jt + \sqrt{c_j{}^2t^2 - r^2}}{r} + \frac{2r_{,i}r_{,k} - \delta_{ik}}{r^2} c_jt \sqrt{c_j{}^2t^2 - r^2} \right) \tag{5.4}$$

Поскольку при $r \to 0$

$$tr^{-2} \left(c_1{}^{-1} \sqrt{c_1{}^2t^2 - r^2} - c_2{}^{-1} \sqrt{c_2{}^2t^2 - r^2}\right) \sim {}^1/_2 (c_2{}^{-2} - c_1{}^{-2})$$

тензор W_{ik} имеет лишь логарифмическую особенность при $r = 0$. Соответственно $1/r$ — тип особенности H_{ik}.

Рассмотрим формулу (2.9). $U_{ik}{}^*$ — регулярная обобщенная функция, поэтому все свертки можно записать в интегральном виде

$$\rho u_i{}^*(\mathbf{x}, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, p_k(\mathbf{y}, t - \tau)\, ds(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \{\lambda U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, n_m(\mathbf{y}) +$$
$$+ \mu n_j(\mathbf{y}) U_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\} u_m(\mathbf{y}, t - \tau)\, ds(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_m} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \mu U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, n_k(\mathbf{y}) \times$$
$$\times u_m(\mathbf{y}, t - \tau)\, ds(\mathbf{y}) \tag{5.5}$$

где все интегралы существуют, причем их можно записать иначе, например, так:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, p_k(\mathbf{y}, t - \tau)\, ds(\mathbf{y}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{S_t{}^j} ds(\mathbf{y}) \int\limits_{r/c_j}^{t} U_{ikj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, p_k(\mathbf{y}, t - \tau)\, d\tau \tag{5.6}$$
$$(S_t{}^j = \{\mathbf{y} \in S \colon \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| < c_jt\})$$

Введем прифронтовую регуляризацию для того, чтобы провести дифференцирование под знаком интеграла. При учете соотношений (5.1), (5.5) получим

$$\rho u_L^*(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{2} \int_0^t dt \int_{S_\tau^k} U_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, p_j(\mathbf{y}, t-\tau)\, ds(\mathbf{y}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^k} \left(u_m(\mathbf{y}, t-\tau) - u_m\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_k}\right)\right) \{\lambda U_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, n_m(\mathbf{y}) +$$

$$+ \mu U_{imk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, n_j(\mathbf{y})\}\, ds(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^k} \mu U_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\, n_j(\mathbf{y}) \left(u_m(\mathbf{y}, t-\tau) -\right.$$

$$\left. - u_m\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_k}\right)\right) ds(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{S_t^k} u_m\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{C_k}\right) (\lambda n_m(\mathbf{y})\, W_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) +$$

$$+ \mu n_j(\mathbf{y})\, W_{imk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t))\, ds(\mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial x_m} \int_{S_t^k} u_m\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_k}\right) \mu n_j(\mathbf{y})\, W_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, ds(\mathbf{y}) \qquad (5.7)$$

Подынтегральные функции во втором и третьем интегралах имеют устранимые особенности на фронтах $r = c_k\tau$ в силу равенства

$$\lim_{\tau \to \frac{r}{c_k}+0} \frac{u_m(\mathbf{y}, t-\tau) - u_m(\mathbf{y}, t - r/c_k)}{\sqrt{c_k^2\tau^2 - r^2}} =$$

$$= -\frac{1}{c_k} \frac{\partial u(\mathbf{y}, t - r/c_k - 0)}{\partial \tau} \lim_{\tau \to \frac{r}{c_k}+0} \sqrt{\frac{c_k\tau - r}{c_k\tau + r}} = 0 \qquad (5.8)$$

для любых r. На границе множеств S_τ^k (при $r = c_k\tau$) они обращаются в нуль (последнее важно, если $S_\tau^k \neq S$, тогда пределы интегрирования зависят от $\mathbf{x}$). Подынтегральные выражения в четвертом и пятом интегралах обращаются в нуль на границе множества S_t^k в силу (5.2). Все подынтегральные функции дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Все это позволяет внести знак дифференцирования под знак интеграла. Приводя подобные члены, при учете равенств (2.6) и (5.4) получим

$$\rho u_i(\mathbf{x}, t)\, H_S^-(\mathbf{x})\, H(t) = \sum_{k=1}^{2} \int_0^t d\tau \int_{S_\tau^k} \left(U_{ijk}(\mathbf{x}, y, \tau)\, p_j(\mathbf{y}, t-\tau) -\right.$$

$$\left. - T_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\left(u_j(\mathbf{y}, t-\tau) - u_j\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_k}\right)\right)\right) ds(\mathbf{y}) -$$

$$- \int_{S_t^k} u_j\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c_k}\right) H_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \mathbf{n}(\mathbf{y}))\, ds(\mathbf{y}) \qquad (5.9)$$

Первый интеграл существует при любых $\mathbf{x}$, второй — для $\mathbf{x} \overline{\in} S$.

Заметим, что формулу (5.9) можно вывести из формального интегрального равенства (2.8), если ввести в нем прифронтовую регуляризацию подынтегральных функций.

Формулы (5.3), (5.9) получены для обобщенных функций, однако в них слева и справа стоят регулярные обобщенные функции. Известно [3], что в области непрерывности они совпадают как числовые. Поэтому равенства (5.3), (5.9), справедливы и в обычном смысле. Чтобы доказать их справедливость на поверхности разрыва S, следует осуществить предельный переход при $\mathbf{x} \to S$, так, как это делается в статических задачах [4, 6]. Для гладких ляпуновских поверхностей формула (5.9) дает сингулярные граничные интегральные уравнения для решения краевых задач теории упругости. На доказательстве этого факта здесь останавливаться не будем.

Перейдем к случаю ненулевых начальных условий. Поскольку $U'_{ik,t}$ имеет особенность $(r - c_j t)^{-3/2}$, соответствующий интеграл в (2.8) не существует, т. е. пользоваться этой формулой нельзя. Вернемся к (2.9). Разобьем тензор U_{ik} (4.10) на два:

U_{ik}^1 описывает движение между фронтами, U_{ik}^2 — за фронтом сдвиговой волны

$$U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{j=1}^{2} U_{ik}^j (r, \mathbf{e}, t), \quad \mathbf{e} = (r_{,1}, r_{,2}).$$

$$U_{ik}^1 = \frac{H(c_1 t - r) H(r - c_2 t)}{2\pi c_1 \sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} \left\{ \left(\frac{c_1 t}{r}\right)^2 (2r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) + \delta_{ik} - r_{,i} r_{,k} \right\}$$

$$U_{ik}^2 = \frac{H(c_2 t - r)}{2\pi} \left\{ \left(\frac{t}{r}\right)^2 (2r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} - \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}}{c_1 \sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}} + \frac{r_{,i} r_{,k}}{c_2 \sqrt{c_2^2 t^2 - r^2}} \right\}$$

Введем тензоры

$$D_{ik}^j = \int_0^{c_j t} \frac{r}{t} U_{ik}^j (r, \mathbf{e}, t)\, dr$$

и вычислим их при учете равенств

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} = -\sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$

$$\int \frac{dr}{r \sqrt{c^2 t^2 - r^2}} = -\frac{1}{ct} \ln \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{r}$$

В результате получим

$$D_{ik}^1 = \frac{1}{2\pi} \left\{ (2r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} + (\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}) \sqrt{1 - \gamma^2} \right\}$$

$$D_{ik}^2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\delta_{ik} - 2r_{,i} r_{,k}) \ln (1 + \sqrt{1 - \gamma^2}) + \delta_{ik} (1 + \sqrt{1 - \gamma^2}) + r_{,i} r_{,k} \sqrt{1 - \gamma^2} \right\},$$
$$\gamma = c_2 / c_1$$

т. е. $D_{ij}^k = D_{ij}^k (\mathbf{e})$ и не зависит от t. Разложим

$$I_i(\mathbf{x}, t) = U_{ik}^* \overset{*}{\ast} u_{k0} H_S^-(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2} \int_{V_t^j} U_{ik}^j (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, u_{k0}^* (\mathbf{y})\, dv(\mathbf{y}) \tag{5.10}$$

$$(u_{k0}^*(\mathbf{x}) = u_{k0}(\mathbf{x}) H_S^-(\mathbf{x}), \quad V_t^j = \{\mathbf{y} : \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| < c_j t\})$$

Введем векторы $\mathbf{z}_j(\mathbf{x}, \mathbf{e}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{e} c_j t$. Перепишем последнее равенство в ином виде, используя прифронтовую регуляризацию второго типа

$$I_L(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{2} \int_{V_t^j} U_{ik}^j (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) (u_{k0}^*(\mathbf{y}) - u_{k0}^*(\mathbf{z}_j))\, dv(\mathbf{y}) +$$
$$+ \int_{V_t^j} U_{ik}^j (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\, u_{k0}^*(\mathbf{z}_j)\, dv(\mathbf{y})$$

В последнем интеграле удобно перейти к полярным координатам с центром в точке x и выполнить интегрирование по r:

$$I_L(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{2} \int_{V_t^j} U_{ik}^j (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) (u_{k0}^*(\mathbf{y}) - u_{k0}^*(\mathbf{z}_j))\, dv(\mathbf{y}) +$$
$$+ t \int_{\|\mathbf{e}\| = 1} D_{ik}^j (\mathbf{e}) u_{k0}^* (\mathbf{z}_j)\, ds(\mathbf{e})$$

$$\frac{\partial I_L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{2} \int_{V_t^j} U_{ik,t}^j (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) (u_{k0}^*(\mathbf{y}) - u_{k0}^*(\mathbf{z}_j))\, dv(\mathbf{y}) +$$
$$+ \int_{\|\mathbf{e}\| = 1} D_{ik}^j (\mathbf{e}) u_{k0}^* (\mathbf{z}_j)\, ds(\mathbf{e}) \tag{5.11}$$

Здесь сокращены подобные члены, возникающие при дифференцировании $u_{k0}(z_j)$:

$$u_{k0,t}(\mathbf{z}_j) = e_m c_j u_{k0,m}(\mathbf{z}_j)$$

(предполагается, что $u_{k0,m} = \partial u_{k0} / \partial x_m$ существуют). Все интегралы в (5.11) существуют.

В результате формулу (2.9) можно записать в следующем интегральном виде:

$$\rho u_i(\mathbf{x},t)\,H_{S^-}(\mathbf{x})\,H(t)=\sum_{k=1}^{2}\int_0^t d\tau\int_{S_\tau^k}\Big(U_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\,p_i(\mathbf{y},t-\tau)-$$

$$-T_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\Big(u_j(\mathbf{y},t-\tau)-u_j'\Big(\mathbf{y},t-\frac{r}{c_k}\Big)\Big)\Big)\,ds(\mathbf{y})-$$

$$-\int_{S_t^k}\dot{u}_j\Big(\mathbf{y},t-\frac{r}{c_k}\Big)H_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,ds(\mathbf{y})+\int_{V_t^k}\big(U_{ij}^k(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,\dot{u}_{j0}(\mathbf{y})\,H_{S^-}(\mathbf{y})+$$

$$+U_{ij,t}^k(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\,(u_{j0}^*(\mathbf{y})-u_{j0}^*(\mathbf{z}_k))\big)\,dv(\mathbf{y})+\int_{\|\mathbf{e}\|=1}D_{ij}^k(\mathbf{e})\,u_{j0}^*(\mathbf{x}+\mathbf{e}c_kt)\,ds(\mathbf{e})+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{S^-}U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)\,G_j(\mathbf{y},t-\tau)\,dv(\mathbf{y})$$

При $\mathbf{x}\in S$ эта формула дает сингулярные ГИУ для решения краевых задач нестационарной теории упругости с произвольными граничными и начальными условиями. Исходя из предложенного вывода, можно сформулировать необходимые условия, которым должны удовлетворять граничные и начальные функции. Достаточным условием является их непрерывность и непрерывность $\partial u_{k0}/\partial x_j$.

В случае $N = 3$ формула, аналогичная (5.9), построена Н. М. Хуторянским [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Петрашень Г. И.* Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Т. 18. Л.: Наука, 1978. 248 с.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
4. *Партон В. З.*, *Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
5. *Кеч В.*, *Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
6. *Угодчиков А. Г.*, *Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию 23.V.1990