

УДК 533.601.11

© 1991 г.

О. А. Гильман, Н. Н. Пилюгин

ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ ПРИ ДВИЖЕНИИ С БОЛЬШИМИ СВЕРХЗВУКОВЫМИ СКОРОСТЯМИ

Рассматривается задача оптимизации формы осесимметричного тела по трем критериям: волновому сопротивлению, лучистому и конвективному нагреву при движении в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Оптимальное решение в многокритериальной задаче определяется как оптимальное по Парето. Получена система интегродифференциальных уравнений для определения оптимального решения. Предложен численный алгоритм решения, на основе которого численно найдены оптимальные профили тел, обеспечивающие выполнение одного из следующих четырех критериев:

1) минимум лучистого нагрева тела, 2) минимум суммы лучистого и конвективного нагрева, 3) минимум полного нагрева и волнового сопротивления, 4) минимум конвективного нагрева и волнового сопротивления.

Приведены диаграммы Парето для полученных решений. Дано сравнение полного нагрева оптимальных тел и тел сравнения — сферы и параболоида.

При выборе формы летательных аппаратов необходимо учитывать большое число физических факторов (волновое сопротивление, нагрев поверхности и др.), характеризующих условие полета. Достаточно хорошо изучена (например, [1—5]) задача выбора формы, оптимальной по одному из критериев. Выяснено, в частности, что форма тела минимального волнового сопротивления существенно отличается от формы тела с минимальным нагревом. Возникает вопрос, какое тело считать оптимальным, когда необходимо учитывать несколько критериев, например волновое сопротивление и нагрев. Ниже предлагается при оптимизации по нескольким критериям применить понятие оптимальности по Парето [6].

Рассматриваются три функционала: лучистый нагрев $Q_R = \Phi_1$, волновое сопротивление $R = \Phi_2$ и конвективный нагрев $Q_C = \Phi_3$. Распределение лучистого потока тепла вдоль поверхности неразрушающегося осесимметричного тела ищется на основе решения уравнений газодинамики для невязкого объемно-излучающего ударного слоя около тела методом сильно сжатого слоя. Функционал Φ_1 для лучистого нагрева приведен в [5]. Для определения волнового сопротивления принята гиперзвуковая теория Ньютона [1]. Расчет конвективного теплообмена основан [2, 3] на гипотезе локального подобия по обтеканию пластины и гиперзвуковой теории Ньютона, причем функционал Φ_3 был получен для тел с плоским передним торцом и с ограниченным наклоном боковой поверхности. В результате получаются следующие выражения для функционалов:

$$\Phi_i = \int_0^1 L_i(u, u', t) dt + f_i(u_0), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$L_1 = L_2(u') (1 - W(u', t)), \quad L_2 = \frac{\varepsilon^3 u'^3}{1 + \varepsilon^2 u'^2}$$

$$L_3 = u'^\alpha \Pi^a \sqrt{(1 - \Pi^b)(1 + \varepsilon^2 u'^2)}$$

$$a = \frac{1}{\gamma} + \omega \eta b, \quad b = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad \Pi = \frac{\varepsilon^2 u'^2}{1 + \varepsilon^2 u'^2}, \quad u' = \frac{du}{dt}$$

$$W = P^{-1/\alpha}, \quad P = 1 + B \frac{\Pi^\alpha}{\sqrt{1 - \Pi}} \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - \Pi}}, \quad \alpha = n + 4$$

$$f_1 = f_2 = \frac{1}{2} \varepsilon u_0^2, \quad f_3 = \varepsilon \frac{\delta_*}{\kappa + 2} u_0^{\kappa+1}$$

$$\delta_* = \frac{1}{a} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\omega(1-\gamma)+1}$$

$$u = \frac{y}{r}, \quad t = \frac{x}{l}, \quad \varepsilon = \frac{r}{l}, \quad B = 2(n + 4) \Gamma$$

При этом предположение о совпадении скорости газа на кромке торца со скоростью звука приводит к ограничению на максимальное значение давления на боковой поверхности [3], что соответствует ограничению на максимальный угол наклона боковой поверхности:

$$\varepsilon u' \leq w, \quad w^2 = \frac{\Pi_*}{1 - \Pi_*}, \quad \Pi_* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/b}$$

Здесь и в (1) x, y — координаты вдоль оси тела и по нормали к ней, l — длина тела, r — радиус миделева сечения, ε — относительная толщина тела, $u_0 = u(0)$ — радиус плоской носовой части, γ — отношение теплоемкостей, ω — степень в зависимости вязкости от температуры, постоянные κ и η определяются режимом течения в пограничном слое: для ламинарного течения $\kappa = 2, \eta = 1$, для турбулентного — $\kappa = 5/4, \eta = 1/4$, n — показатель степени в зависимости коэффициента поглощения Планка от температуры, Γ — параметр излучения [4, 5], равный отношению характерного лучистого потока q_* за скачком к потоку кинетической энергии $(0,5\rho_\infty V_\infty^3)$ набегающего потока газа, ρ_∞, V_∞ — плотность и скорость набегающего газа.

Напомним понятие оптимальности по Парето [6]. Пусть имеются два критерия Φ_1 и Φ_2 , которые надо минимизировать. Решение называется оптимальным по Парето, если улучшение одного из критериев невозможно без ухудшения другого. Если задача имеет бесчисленное множество таких решений, то линия, образованная ими на плоскости $\Phi_1 \Phi_2$, есть диаграмма Парето. Возникает вопрос, как получить это множество решений. Определение двух крайних точек на линии очевидно: это решения, минимизирующие только функционал Φ_1 и только функционал Φ_2 . Кроме того, парето-оптимальное решение можно интерпретировать как минимум функционала Φ_1 при заданном значении Φ_2 ; это же решение можно интерпретировать как минимум функционала Φ_2 при заданном значении Φ_1 . Здесь очевидна аналогия двухкритериальной задачи с задачей с изопериметрическим ограничением. Таким образом, минимизируя линейную комбинацию функционалов, получим множество решений, оптимальных по Парето. Все сказанное распространяется и на несколько критериев.

Трехкритериальную задачу об оптимальной форме тела в сверхзвуковом потоке газа сформулируем следующим образом: среди функций $u(t)$, удовлетворяющих дифференциальному условию $\varepsilon u' \leq w$ и граничному условию $u(t=1) = 1$, найти такие, которые минимизируют свертку функционалов $\Phi = \rho_1 \Phi_1 + \rho_2 \Phi_2 + \rho_3 \Phi_3$. Решение здесь определяется значением весовых коэффициентов $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$. Обычно наиболее важный коэффициент полагают равным единице, а значения остальных параметров выбирают из интервала $(0, 1)$, причем, чем выше приоритет функционала Φ_i , тем большее значение получает соответствующий коэффициент ρ_i . Окончательное значение вектора ρ определяется в процессе решения с использованием диаграмм Парето.

При помощи метода множителей Лагранжа [1, 7] задача сводится к нахождению безусловного экстремума функционала

$$\psi = \min \left\{ \int_0^1 K(u, u', t) dt + f(u_0) \right\}, \quad u(1) = 1 \quad (2)$$

$$K = L + \lambda(t) [\varepsilon u' - w + \alpha^2(t)], \quad L = \sum_{i=1}^3 \rho_i L_i, \quad f = \sum_{i=1}^3 \rho_i f_i$$

Уравнения Эйлера задачи (2) допускают первый интеграл. Первый интеграл и три уравнения Эйлера для неизвестных функций $u(t)$, $v(t)$, $\lambda(t)$ и $\alpha(t)$ записываются в виде (H , $l = \text{const}$):

$$F(u, v, y, G) + \lambda(w - \alpha^2) = H, \quad K_{\lambda} \dot{=} v - w + \alpha^2 = 0$$

$$y = \int_t^1 \sqrt{1 + v^2} dt, \quad l = y(0), \quad K_{\alpha} \dot{=} 2\lambda\alpha = 0$$

$$G = \int_0^t \frac{B}{\alpha} uv^2 \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^{\alpha + 1/2} P^{-1-1/\alpha} dt, \quad \varepsilon u \dot{=} v \quad (3)$$

$$F = \frac{1}{1 + v^2} \left\{ 2\rho_1 L_1 + 2\rho_2 L_2 + \rho_3 L_3 \left[2a + b - 1 - b \left(1 - \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^b \right)^{-1} \right] \right\} + \\ + \rho_1 \left\{ u \frac{B}{\alpha} y \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^{\alpha + 3/2} P^{1-1/\alpha} (2\alpha + v^2) - G (1 + v^2)^{-1/2} \right\}$$

Как видно из системы (3), экстремаль для $t > 0$ может состоять из дуг следующего типа:

1°. Участок двустороннего экстремума

$$\lambda = 0, \quad F(u, v, y, G) - H = 0, \quad \alpha^2 = w - v \quad (4)$$

На этом решении должно выполняться условие $K_{vv} \geq 0$.

2°. Участок краевого экстремума

$$\alpha = 0, \quad v = w, \quad \lambda = (H - F)/w \quad (5)$$

На решении (5) должно выполняться условие $\lambda \geq 0$.

Сопряжение этих дуг проводится следующим образом:

1) в точках пересечения линий $F - H = 0$ и $v - w = 0$ на плоскости (u, v) , в этом случае условие Вейерштрасса — Эрдмана выполняется автоматически;

2) в угловых точках при помощи условия Вейерштрасса — Эрдмана [7]

$$[(u \dot{K}_u - K)] \delta t + [K_u] \delta u = 0$$

(Квадратные скобки означают разность между величинами, вычисленными слева и справа от угловой точки.) При учете уравнений (4), (5) это условие можно записать так:

$$(vL_v - L - wL_v)|_{(u, v)} + L|_{(u, w)} = 0$$

На концах экстремали должны выполняться условие $u(1) = 1$ и условие трансверсальности

$$(T(u, v, l) + \lambda(t))|_{t=0} = 0 \quad (6)$$

$$T(u, v, l) = \left\{ \rho_1 u \left\{ \frac{v^4 + 3v^2}{(1 + v^2)^2} (1 - W) + \frac{Bl}{\alpha} \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^{\alpha + 1} P^{-1-1/\alpha} (2\alpha + v^2) - 1 \right\} + \right. \\ \left. + \rho_2 u \frac{v^2 - 1}{(1 + v^2)^2} + \rho_3 \left\{ L_3 \frac{1}{v(1 + v^2)} (2a + b + v^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - b \left(1 - \left(\frac{v^2}{1 + v^2} \right)^b \right)^{-1} \right) - \delta_* \frac{\kappa + 1}{\kappa + 2} u^\kappa \right\} \right\}$$

Используя уравнения (4), (5), запишем условие (6) для дуг разного типа

$$1^\circ. T(u, v, l)|_{t=0} = 0; \quad 2^\circ. \left(T(u, w, l) + \frac{H - F}{w} \right) \Big|_{t=0} = 0$$

Таким образом, решение задачи (2) сводится к решению следующей системы интегродифференциальных уравнений с неизвестными функциями

$u(t)$, $v(t)$ и неизвестными H , l :

$$F_1(u, v, y(u, v), G(u, v)) = 0 \quad (7)$$

$$\varepsilon u' = v, \quad l = \int_0^1 \sqrt{1 + v^2} dt, \quad u(1) = 1, \quad T_1(u(0), v(0), l) = 0 \quad (8)$$

Здесь $F_1 = F - H$, $T_1 = T$ для дуг типа 1°, $F_1 = v - w$, $T_1 = T + (H - F)/w$ для дуги типа 2°.

Функции $\alpha(t)$, $\lambda(t)$ выражаются через $u(t)$, $v(t)$ в явном виде.

Решение системы (7), (8) строится следующим образом: вместо переменной t вводится u , что возможно в силу монотонной зависимости $u(t)$. Вводится функционал

$$Q(H, l, v(u)) = \left(\varepsilon \int_{u_0}^1 \frac{du}{v} - 1 \right)^2 + \left(\varepsilon \int_{u_0}^1 \frac{\sqrt{1+v^2}}{v} du - l \right)^2 \geq 0$$

На решениях системы интегродифференциальных уравнений (7), (8) функционал Q в силу уравнений (8) достигает минимума, равного нулю. Очевидно, что пара чисел H , l и функция $v(u)$, которые обращают в нуль функционал Q и удовлетворяют системе уравнений $F_1 = 0$, $T_1 = 0$, являются также решением системы (7), (8). Поэтому вместо того, чтобы решать систему интегродифференциальных уравнений, предлагается искать решение $v(H, l, u)$ интегрального уравнения (7), удовлетворяющее краевому условию $T_1 = 0$, и находить значения параметров H , l , при которых $Q(H, l, v(H, l, u)) = 0$, после чего все функции системы (7), (8) отыскиваются одной квадратурой.

Решение этой задачи будем искать методом последовательных приближений: направленным перебором] строятся последовательность] точек (H^k, l^k) на плоскости параметров H , l и соответствующая последовательность функций $v^k(H^k, l^k, u)$, обеспечивающие в пределе нулевой минимум функционала Q . Для каждого k решение интегрального уравнения (7) сведено к решению системы N алгебраических уравнений с одним неизвестным каждое.

По предложенному алгоритму численно определялись профили осесимметричных тел, обеспечивающие выполнение одного из следующих критериев:]

- 1) минимум лучистого нагрева $Q_R = \Phi_1$,
- 2) минимум суммы лучистого и конвективного нагрева

$$Q = Q_R + Q_C, \quad Q_C = \rho_3 \Phi_3$$

3) минимум по Парето (компромиссный) нагрева $Q = Q_R + Q_C$ и волнового сопротивления $R = \Phi_2$ ($\Phi = Q + \rho_2 R$),]

4) минимум по Парето конвективного нагрева Q_C и волнового сопротивления R .]

Все расчеты проведены при следующих значениях параметров: $n = 0$ ($\alpha = 4$); $\gamma = 1,1$; $\eta = 1$, $\kappa = 2$ (ламинарный пограничный слой).

Задача 1 была решена] ранее [4] численно методом локальных вариаций. Для гладких решений получено полное (с точностью толщины линий на фигуре) совпадение решений, что позволяет сделать вывод о пригодности разработанного алгоритма.

Предложенный алгоритм реализован на языке ФОРТРАН-4 (машинно-независимая версия). Время расчета одного варианта зависит от начальных условий, параметров задачи и числа N точек разбиения. На ЭВМ ЕС-1040 счет одного варианта при $N = 50$ не превосходит трех минут. Алгоритм] не проигрывает по времени счета методу локальных вариаций и, кроме того, является численно-аналитическим, что определяет не-

которые его преимущества по сравнению с другими численными методами (например, методом локальных вариаций). Алгоритм позволяет отыскивать решения с ограничениями на производную и с разрывом производной. Это дало возможность указать форму тела, оптимальную по сумме лучистого и конвективного нагрева. Гибкость численно-аналитического метода позволила получить решение в двухкритериальной (конвективный нагрев и волновое сопротивление) задаче оптимизации осесимметричного тела, где оптимальная образующая содержит участок краевого экстремума. В последней задаче предложенный алгоритм обладает относительно высоким быстродействием. Быстродействие по сравнению с общим случаем предлагаемого алгоритма обеспечивается тем, что оптимизация идет по одному параметру H , а не по H и l , как в общем случае. Для $N = 100$ счет одного варианта требует около двух минут для СМ-4 и нескольких секунд для ЕС-1040.

После решения вариационной задачи рассчитывались интегральные по поверхности найденного тела безразмерные тепловые потоки Q_R , Q_C и Q (размерные потоки отнесены к величине $1/2\rho_\infty V_\infty^3 S$), где S — площадь миделева сечения тела.

Проводилось также сопоставление суммарного нагрева найденных оптимальных тел Q_{opt} и тел сравнения (сфера, параболоид) Q_{eq} по формуле

$$q = (|Q_{eq} - Q_{opt}| / Q_{opt}) \cdot 100\%$$

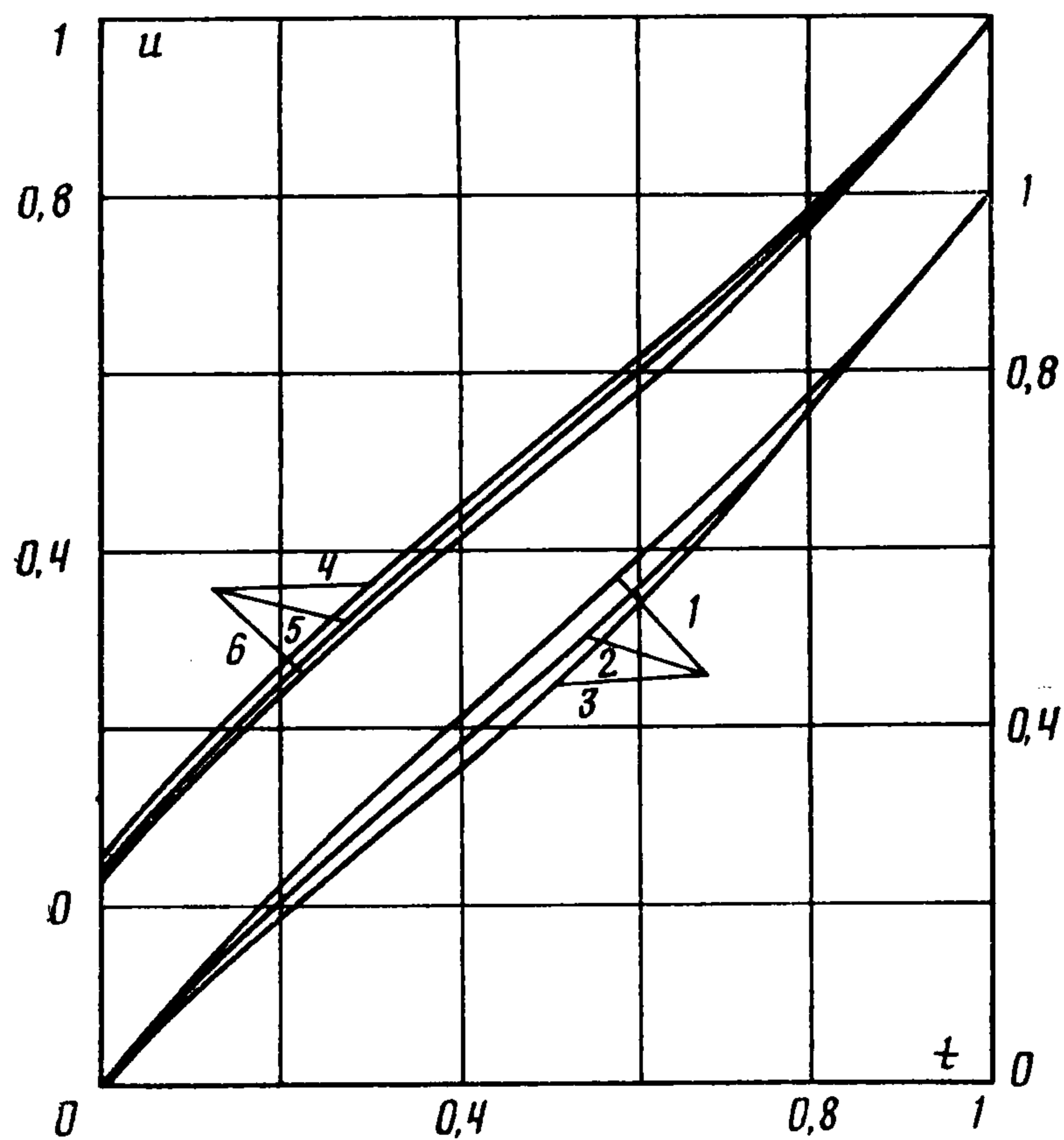
Результаты расчета формы тел с минимальным суммарным нагревом $Q = Q_R + Q_C$, $Q_C = \rho_3 \Phi_3$ приведены на фиг. 1 (задача 2). Расчет проводился для $\varepsilon = 1$ при $B = 1$ (кривые 1—3) и $B = 10$ (кривые 4—6).

Ранее [8] был рассчитан конвективный и лучистый нагрев полусферы при разных режимах обтекания. Показано, что отношение Q_C/Q_R заключено в пределах от 0,03 до 2. Приведено [9] распределение радиационных и конвективных тепловых потоков в точке торможения по траекториям для тел различной формы (сферическая, сфера — цилиндр, сфера — конус). Во всех случаях отмечалось существенное преобладание радиационных потоков ($Q_C/Q_R = 0,25$), хотя сами потоки изменяются в довольно широком диапазоне.

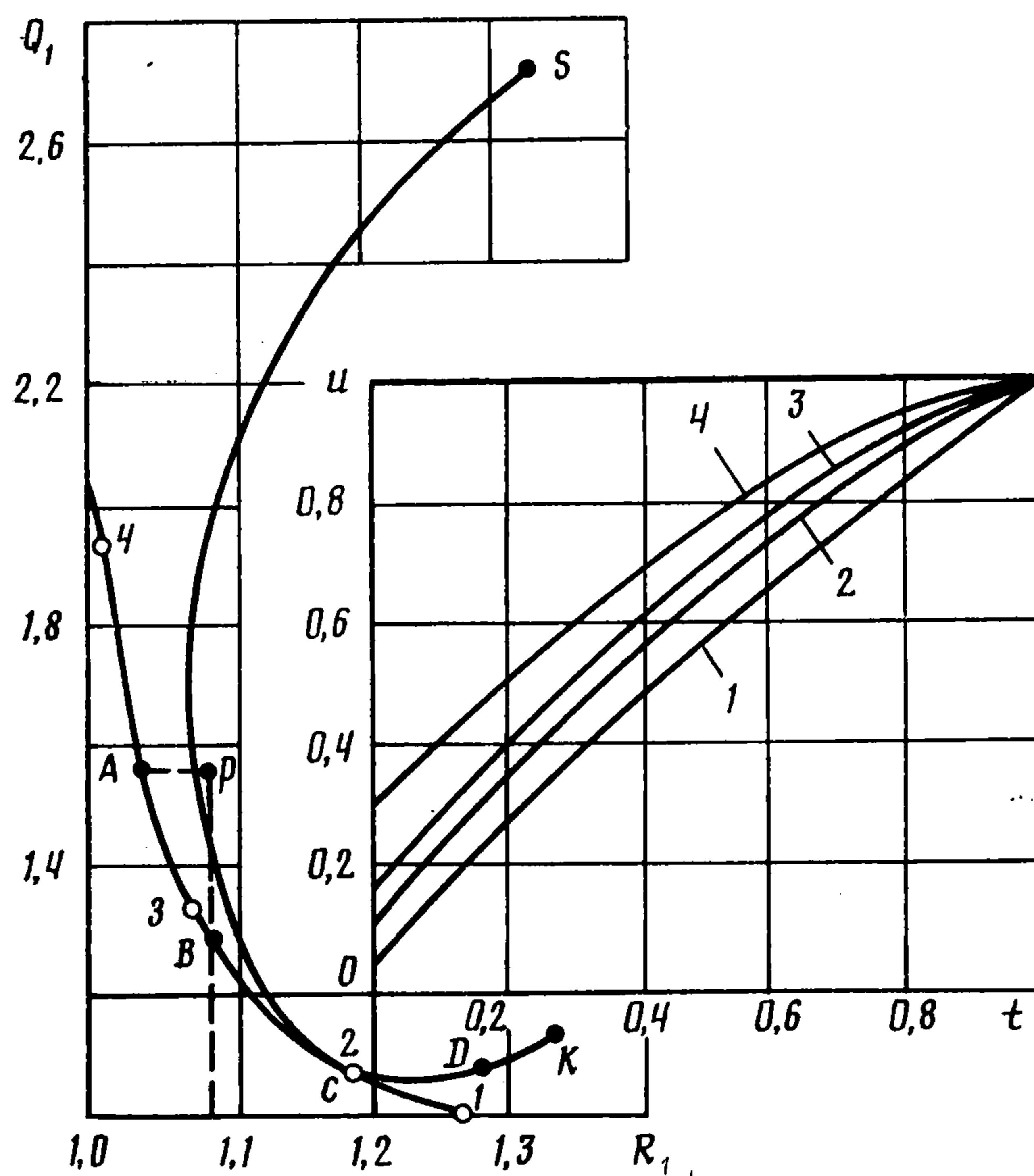
Исходя из результатов работ [8, 9], параметр ρ_3 , определяющий соотношение радиационного и конвективного потоков к телу, выбирали так, чтобы для сферы выполнялось соотношение $Q_C/Q_R = 1$ (кривые 2, 5 на фиг. 1) и $Q_C/Q_R = 2$ (кривые 3, 6 на фиг. 1). Кривые 1, 4 соответствуют задаче о минимуме лучистого нагрева ($\rho_3 = 0$) при наличии ограничения на наклон образующей. Представленные на фиг. 1 экстремали во всех случаях имеют торец при $t = 0$ (радиус торца убывает с уменьшением параметра излучения B) и состоят из дуг типа 1° и 2° (кривые 4, 5). Отметим, что при $B \leq 1$ размер торца при $t = 0$ невелик и не различим в масштабе фиг. 1. В окрестности $t = 0$ и $t = 1$ образующая является отрезком прямой $v = w$ (тип 2°), причем в окрестности $t = 1$ длина участка прямой увеличивается с убыванием B и ростом ρ_3 ($Q_C/Q_R \in [0, 2]$).

Для $\varepsilon = 1$ в таблице приведены значения конвективного Q_C и лучистого Q_R нагрева для тел оптимальной по суммарному нагреву формы и для тел сравнения (сфера, параболоид) для разных значений ρ_3 . Там же дан проигрыш в процентах по суммарному нагреву на сфере q_1 и на параболоиде q_2 по сравнению с оптимальным телом.

Фигура 1 показывает, что форма оптимального по суммарному нагреву тела мало меняется с ростом ρ_3 ($Q_C/Q_R \in [0, 2]$) и близка к форме тела, оптимального только по лучистому нагреву. Из таблицы видно, что оптимизация ведется в основном за счет лучистого нагрева, конвективный нагрев или уменьшается мало, или может даже возрасти. Этот факт объясняется тем, что функционал лучистого нагрева Q_R значительно из-



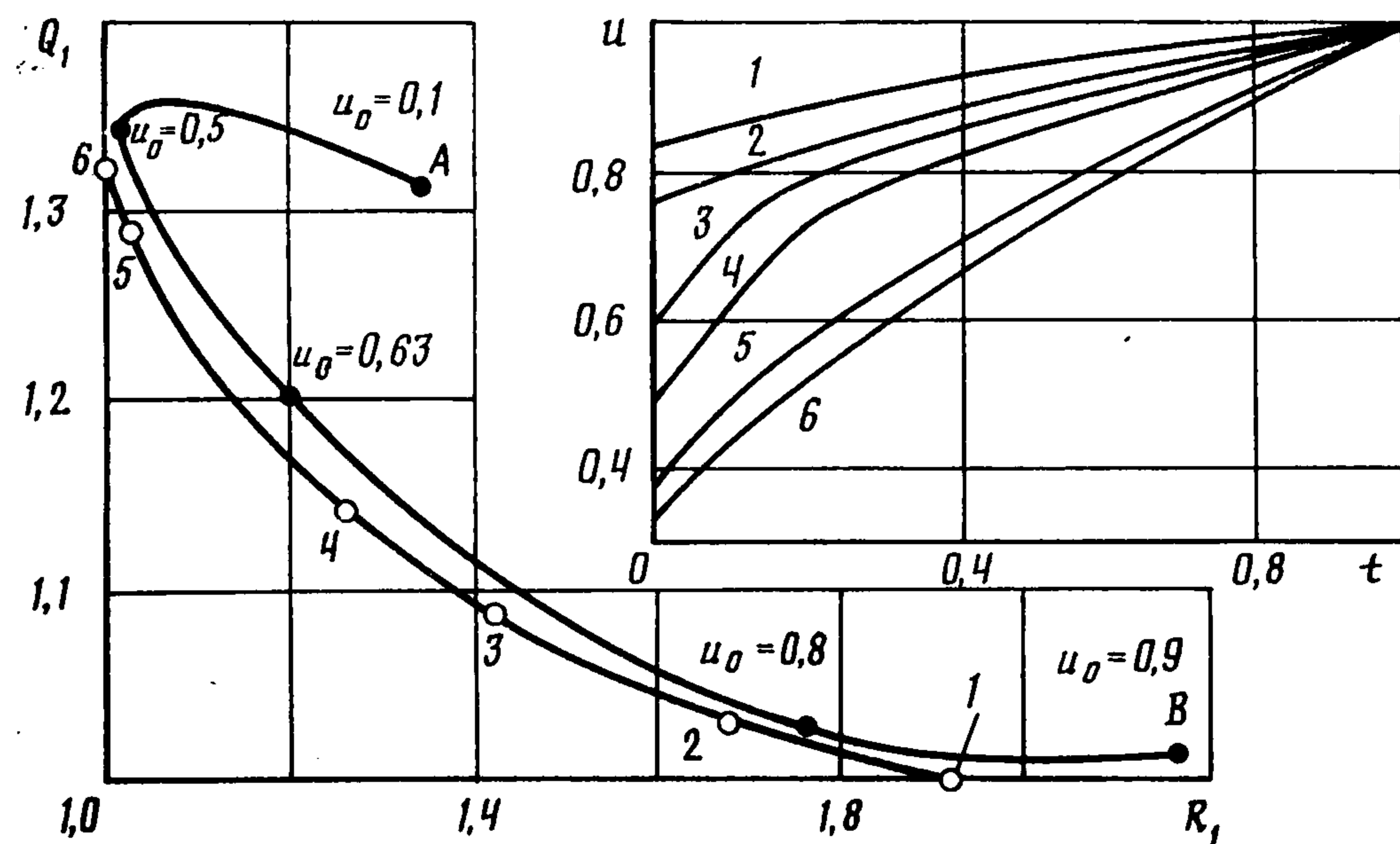
Фиг. 1



Фиг. 2

меняется даже при малом изменении формы тела, а функционал Q_C конвективного нагрева даже при значительном изменении формы меняется мало.

На фиг. 2 приведены экстремали $u(t)$ задачи 3 (решение оптимальное по Парето) для $\varepsilon = 1$, $B = 10$, $\rho_3 = 0.385$. Такое значение ρ_3 соответствует отношению конвективного и лучистого потоков к сфере $Q_C/Q_R = 0.25$. Кривые 1—4 на фиг. 2 соответствуют $\rho_2 = 0; 0.4; 1; 6$. На фиг. 2 дана также соответствующая этим телам диаграмма Парето — кривая $ABCD$, по оси абсцисс отложено нормированное значение волнового сопротивления $R_1 = \Phi_2(\rho_2)/\Phi_2(\rho_2 = \infty)$, по оси ординат — нормированный суммарный нагрев $Q_1 = Q(\rho_2)/Q(\rho_2 = 0)$. Точки 1—4 на этой диаграмме со-



Фиг. 3

ответствуют оптимальным телам $u(t)$ (1—4). Здесь же приведены соответствующие значения для затупленных по сфере конусов с разными радиусами затупления (линия KS , K — конус, S — сфера) и для параболоида (точка P).

Как видно из фиг. 2, любая парето-оптимальная форма по отношению к сфере выигрышна как по нагреву, так и по волновому сопротивлению. Параболоид при одинаковом волновом сопротивлении с парето-оптимальным телом проигрывает последнему по нагреву $\sim 28\%$, а при одинаковом нагреве $\sim 4\%$ по волновому сопротивлению; существует участок AB , где оптимальные формы по отношению к параболоиду дают выигрыш по обоим критериям. Однако представляет интерес и участок BD . Так, например, тело, соответствующее точке C на диаграмме Парето, проигрывает параболоиду $\sim 10\%$ в волновом сопротивлении и выигрывает $\sim 50\%$ в нагреве.

Результаты численного решения задачи 4 представлены на фиг. 3. Показаны парето-оптимальные формы $u(t)$ для $\varepsilon = 1$ и шести значений параметра ρ_2 ; форма 1 ($\rho_2 = 0$) оптимальна только по конвективному нагреву, форма 6 ($\rho_2 = \infty$) — только по волновому сопротивлению. Формы

B	1			10		
	ρ_2	0	0,632	1,264	0	1,542

	Сфера					
$Q_R \cdot 10^4$	332	332	332	809	809	809
$Q_C \cdot 10^4$	0	332	664	0	809	1618
$Q \cdot 10^4$	332	664	996	809	1618	2427

	Параболоид					
$Q_R \cdot 10^4$	128	128	366	366	366	366
$Q_C \cdot 10^4$	0	380	759	0	929	1859
$Q \cdot 10^4$	128	508	887	366	1295	2225

	Тело, оптимальное по суммарному нагреву					
$Q_R \cdot 10^4$	20,9	24,2	29,4	145	152	167
$Q_C \cdot 10^4$	0	369	731	0	919	1819
$Q \cdot 10^4$	20,9	393	760	145	1071	1986
q_1	510	29,1	16,8	458	51,0	22,2
q_2	149	68,6	30,8	152	20,9	12,0

2—5 ($\rho_2 = 0,05; 0,07; 0,1; 0,3$ соответственно) парето-оптимальны по волновому сопротивлению и конвективному нагреву. Эти кривые составлены из дуг типа 1° (кривые 1, 2, 6), типа $2^\circ - 1^\circ$ (кривые 3, 4, 5). На фиг. 3 представлена их диаграмма Парето. По оси абсцисс отложено нормированное значение волнового сопротивления $R_1 = \Phi_2(\rho_2)/\Phi_2(\rho_2 = \infty)$; а по оси ординат — нормированное значение конвективного нагрева $Q_1 = \Phi_3(\rho_2)/\Phi_3(\rho_2 = 0)$. Точки 1, 2, . . . , 6 на кривой соответствуют экстремалам 1, 2, . . . , 6 на фиг. 3. Кривая AB отмечает значения R_1, Q_1 на усеченном конусе, радиус торца в носике которого u_0 изменяется от 0,1 (точка A) до 0,9 (точка B).

Диаграмма Парето позволяет оценить выигрыш или проигрыш тел, оптимальных по Парето при различных ρ , и тел сравнения, а также позволяет выбрать наиболее приемлемые формы из множества компромиссно-оптимальных.

Авторы благодарят Г. Г. Черного и Г. Ю. Степанова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
2. Перминов В. Д., Солодкин Е. Е. Осесимметричные тела минимального сопротивления и минимального потока тепла к поверхности при различном характере течения в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 94—102.
3. Кочанов В. Г., Левин В. А., Пилюгин Н. Н. Форма осесимметричного тела, оптимальная по условиям конвективной теплопередачи, при ламинарном и турбулентном режимах обтекания // Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в сверхзвуковом потоке. М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 5—27.
4. Деев А. А., Левин В. А., Пилюгин Н. Н. Форма тела, оптимальная по условиям радиационной теплопередачи // Исследование оптимальных форм и обтекание тел, движущихся с большой сверхзвуковой скоростью: Науч. тр. Ин-та механики МГУ 1976. № 44. С. 16—20.
5. Деев А. А., Левин В. П., Пилюгин Н. Н. О форме тела с минимальным полным потоком лучистой энергии к его поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 4. С. 84—89.
6. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 25 с.
7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление: М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
8. Hoshizaki H., Wilson K. H. Convective and radiative heat transfer during superorbital entry // AIAA J. 1967. V. 5. № 1. P. 25—35.
9. Leibowitz L. P., KuO Ta-Jin. Outer planet entry nonequilibrium heating // AIAA Paper. 1975. № 1149. P. 1—12.