

УДК 532.584:537.24

© 1991 г.

Н. Л. Васильева, Г. Л. Седова, Л. Т. Черный

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ЗОНД В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ, НЕКОЛЛИНЕАРНОМ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Получено решение задачи о цилиндрическом зонде с произвольным (некруговым) хорошо обтекаемым профилем, расположенным под нулевым углом атаки в несжимаемом электрогидродинамическом потоке, без учета влияния объемного электрического заряда в потоке и сопротивления зонда. Рассматривается общий случай, когда скорость набегающего потока направлена под произвольным углом к напряженности невозмущенного электрического поля. Исследуются все режимы обтекания зонда и получены соответствующие им кулон-амперные характеристики зонда. Предлагается методика диагностики концентраций различных сортов заряженных частиц в потоках многокомпонентных и многофазных сред.

Эти результаты могут использоваться при разработке методов диагностики различных электрогидродинамических потоков в природе и технике, а также при расчете процесса нанесения покрытий на хорошо обтекаемые тела при помощи электрического поля.

Для цилиндрического зонда кругового сечения была получена кулон-амперная характеристика зонда в покоящейся среде [1] и исследован ряд частных случаев обтекания зонда электрогидродинамическим потоком, неколлинеарным напряженности невозмущенного электрического поля [2]. Однако кулон-амперная характеристика зонда была найдена [2] только для режимов обтекания, соответствующих электрогидродинамическим потокам, коллинеарным напряженности электрического поля.

1. Рассмотрим плоскую стационарную задачу об обтекании цилиндрического металлического зонда электрогидродинамическим потоком. Пусть параметр электрогидродинамического взаимодействия, характеризующий обратное влияние электрического поля на движение среды, пренебрежимо мал, а зонд имеет хорошо обтекаемый профиль, расположенный под нулевым углом атаки к набегающему потоку. В связи с этим будем считать поле скорости среды заданным и аппроксимируем его распределением скорости, соответствующим потенциальному, безотрывному, безциркуляционному движению несжимаемой среды [3], что допустимо при $Re \equiv 2Ru^0/\nu \gg 1$, $M \equiv u^0/c \ll 1$, где R — характерный поперечный размер зонда, u^* , ν — скорость и кинематическая вязкость среды, c — скорость звука в ней. Здесь и ниже верхний индекс 0 приписан значениям соответствующих параметров невозмущенного зондом электрогидродинамического потока в точке введения зонда.

При расчете возмущения напряженности электрического поля, вносимого зондом, будем пренебрегать влиянием объемного электрического заряда в потоке и электрическим сопротивлением материала зонда, что допустимо при

$$4\pi R \sum e_j n_j^0 / \epsilon E^0 \ll 1, \quad \sum e_j b_j n_j^0 / \sigma_p \ll 1 \quad (1.1)$$

где e_j , b_j , n_j — заряд, подвижность и концентрация частиц j -го сорта ($j = 1, 2, \dots, N$) в электрогидродинамическом потоке, E^* — напряженность электрического поля, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, σ_p —

проводимость материала зонда. Под частицами понимаются ионы или заряженные частицы дисперсной фазы, которые настолько малы, что их инерция несущественна, а сила сопротивления удовлетворяет закону Стокса.

Неравенства (1.1) всегда выполняются для металлических зондов достаточно малых размеров. В этом случае распределение напряженности электрического поля вокруг цилиндрического зонда с зарядом Q^* (на единицу длины) можно аппроксимировать распределением напряженности электрического поля вокруг идеально проводящего тела такой же формы с тем же зарядом, находящегося в незаряженной среде с диэлектрической проницаемостью ε и во внешнем электрическом поле с напряженностью E^0 [4].

Сформулированные предположения позволяют сразу записать явное выражение для скорости частиц j -го сорта $v_j^* = u^* + b_j E^*$ в комплексном представлении в плоскости $z = x + iy$

$$v_j^x - iv_j^y = |b_j| E^0 \frac{dG_j}{d\zeta} \frac{d\zeta^*}{dz}; \quad \zeta = \frac{\zeta^*}{R}, \quad \zeta^* = \xi^* + i\eta^* \quad (1.2)$$

$$G_j(\zeta, \text{Re}_j^E, Q_j \psi_j) = [\text{Re}_j^E + \exp(-i\psi_j)] \zeta + \\ + [\text{Re}_j^E - \exp(i\psi_j)] \frac{1}{\zeta} + 2Q \text{Ln} \zeta \quad (1.3)$$

$$\text{Re}_j = \frac{u^0}{|b_j| E^0}, \quad Q_j = \frac{b_j Q^*}{\varepsilon R |b_j| E^0}, \quad \psi_j = \arccos \frac{b_j (E^0 u^0)}{|b_j| E^0 u^0} \quad (1.4)$$

Здесь x, y — декартова система координат в плоскости течения, выбранная так, что $u^0 = (u^0, 0)$, где $u^0 > 0$, ψ_j — угол между векторами u^0 и $b_j E^0$, $\zeta^*(z)$ — конформное отображение внешности зонда в плоскости течения на внешность круга некоторого радиуса R в плоскости ζ^* , удовлетворяющее условию $d\zeta^*/dz = 1$ при $z = \infty$. Это условие однозначно определяет указанное отображение, включая и величину R [5], которую, таким образом, удобно рассматривать в качестве характерного поперечного размера зонда.

Например, для цилиндрического зонда, имеющего в сечении в плоскости z вытянутый вдоль оси x эллипс с полуосями a, b ($a > b$), имеем

$$\zeta^* = 1/2 (\sqrt{z^2 + b^2 - a^2} + z), \quad R = 1/2 (a + b)$$

Здесь выбирается ветвь корня, для которой $\sqrt{z^2 + b^2 - a^2}/z = 1$ при $z = \infty$. В частности, для пластинки шириной l имеем $a = l/2, b = 0$ и, следовательно, $R = l/4$.

Произведение $R |b_j| E^0 G_j$ представляет собой комплексный потенциал скорости заряженных частиц j -го сорта в плоскости ζ^* при потенциальном, безотрывном, безциркуляционном обтекании идеально проводящего цилиндра $|\zeta^*| = R$ с зарядом Q несжимаемым электрогидродинамическим потоком с пренебрежимо малым объемным электрическим зарядом и следующими значениями u^*, E^* при $\zeta^* = \infty$ (в комплексном представлении)

$$(u^\xi + iu^\eta)_{\zeta^*=\infty} = u^0, \quad b_j (E^\xi + iE^\eta)_{\zeta^*=\infty} = |b_j| E^0 \exp(i\psi_j)$$

При расчете возмущения концентрации заряженных частиц, вносимого зондом, будем пренебрегать их диффузией и объемными реакциями с участием различных сортов частиц, что допустимо при выполнении условий

$$\text{Re}_j^E \equiv \frac{R |b_j| E^0}{D_j} \gg 1, \quad \frac{n_j |b_j| E^0}{R v_j^0} \gg 1, \quad \frac{K_j}{|b_j| E^0} \gg 1 \quad (1.5)$$

Здесь D_j , n_j , v_j , K_j — коэффициент диффузии, концентрация, локальная скорость рождения (или уничтожения) за счет объемных реакций, скорость поверхностной реакции прилипания и разрядки на зонде для частиц j -го сорта. Первые два условия (1.5) всегда выполняются в достаточно сильных электрических полях, а последнее — для металлических зондов, обладающих высокой скоростью реакции разрядки заряженных частиц на их поверхности. В результате из уравнений баланса различных сортов заряженных частиц и соленоидальности полей u , E для определения возмущенной концентрации частиц j -го сорта получим соотношение

$$(u^* + b_j E^*) \nabla n_j = 0$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой постановке задачи концентрация частиц n_j остается постоянной вдоль их линий тока. Для линий тока частиц, приходящих на зонд из бесконечности, эта постоянная равна значению n_j^0 в невозмущенном потоке в точке введения зонда. Для линий же тока частиц, начинающихся на зонде, она равна нулю, так как по условию эмиссия заряженных частиц на зонде отсутствует. На основании такого распределения концентрации заряженных частиц вокруг зонда и при учете соотношений (1.2) для текущего на зонд электрического тока заряженных частиц j -го сорта J_j^* (отнесенного к единице длины зонда) справедливо выражение

$$J_j^* \equiv -e_j n_j^0 \int_{L_j} (v_j \nu) dl = -e_j n_j^0 |b_j| E^0 R \operatorname{Im} [G_j(\zeta_j^+) - G_j(\zeta_j^-)] \quad (1.6)$$

Здесь интеграл берется по части L_j контура зонда в плоскости z , на которой заканчиваются приходящие из бесконечности линии тока j -го сорта заряженных частиц, ζ_j^\pm — точки на окружности $|\zeta| = 1$ в плоскости ζ , соответствующие концам L_\pm контура L при конформном отображении $\zeta = \zeta^*(z)/R$. Обозначение концов контура L выбирается так, что движение от L_- к L_+ вдоль L осуществляется против часовой стрелки в плоскости z .

Отметим, что конформное отображение не меняет качественной картины линий тока заряженных частиц. Поэтому для определения значений ζ_j^\pm достаточно найти концы участка окружности $|\zeta| = 1$, на котором заканчиваются приходящие из бесконечности линии тока заряженных частиц в плоскости ζ , являющиеся образами их линий тока в плоскости z при конформном отображении $\zeta = \zeta^*(z)/R$. Так как вдоль линий тока заряженных частиц их функция тока $\operatorname{Im} G_j(\zeta, \operatorname{Re}_j E, Q_j, \psi_j) = \operatorname{const}$, то картина линий тока в плоскости ζ , в частности, значения ζ_j^\pm , а также безразмерный электрический ток на зонд J_j j -го сорта частиц

$$J_j \equiv \frac{J_j^*}{2\pi \operatorname{Re}_j n_j^0 |b_j| E^0} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} [G_j(\zeta_j^+) - G_j(\zeta_j^-)] \quad (1.7)$$

полностью определяются безразмерными параметрами $\operatorname{Re}_j E$, Q_j , ψ_j , присутствующими в выражении (1.3) для $G_j(\zeta)$.

2. Исследуем поведение линий тока каждого сорта заряженных частиц и зависимость их электрических токов J_j , текущих на зонд, от характерных параметров $\operatorname{Re}_j E$, Q_j , ψ_j . Так как в рассматриваемой постановке осаждение различных сортов частиц на зонд происходит независимо, достаточно провести исследование для какого-нибудь одного j -го сорта. Далее в этом разделе индекс j у величин J_j , $\operatorname{Re}_j E$, Q_j , ψ_j , указывающий номер сорта частиц, опускается.

Рассмотрим сначала случай $\text{Re}^E > 1$ и $0 < Q < 1$. Трансформация качественной картины линий тока заряженных частиц в плоскости ζ при уменьшении угла ψ между векторами u^0 , bE^0 от π до 0 проиллюстрирована на фиг. 1. Видно, что при $\psi = \pi$ нет линий тока, приходящих из бесконечности на поверхность зонда (фиг. 1, а). Поэтому при $\psi = \pi$ имеем $J = 0$. При уменьшении ψ симметрия нарушается, происходит непрерывная деформация линий тока, но их качественное поведение остается таким же, как на фиг. 1, а, пока при некотором критическом значении $\psi = \psi_c$ не произойдет слияние сепаратрис $O_- l_- I_-$ и $B_+ l_+ I_+$. При $\psi < \psi_c$ они снова расщепляются, качественная картина линий тока принимает вид, изображенный на фиг. 1, б, причем появляются линии тока, приходящие из бесконечности на зонд, и, следовательно, $J > 0$. При дальнейшем уменьшении угла ψ ток J увеличивается, пока при значениях $\psi = \psi_{\pm}$, где $\psi_{\pm} = \arccos(\mp Q)$ последовательно не исчезнут прилегающие к зонду верхняя (при $\psi = \psi_+$) и нижняя (при $\psi = \psi_-$) заштрихованные зоны (см. фиг. 1, б), после чего ток J перестает зависеть от ψ .

При $\psi < \psi_{\pm}$ в точках ζ_{\pm} будет иметь место касание линий тока и окружности $|\zeta| = 1$. Это обстоятельство позволяет на основе соотношений (1.3) и (1.7) получить точные аналитические выражения для ζ^{\pm} (при $\psi < \psi_{\pm}$) и J (при $\psi < \psi_-$)

$$\zeta^{\pm} = e^{i\psi} (-Q^* \mp i\sqrt{1-Q^{*2}}) = \exp[i(\pi + \psi \pm \arccos Q^*)]; \quad \psi < \psi_{\pm} \quad (2.1)$$

$$J = 2\pi^{-1} (\sqrt{1-Q^2} - Q \arccos Q); \quad 0 \leq \psi < \arccos Q \quad (2.2)$$

Так как $\text{Im} G = \text{const}$ вдоль линий тока, то при $\psi > \psi_{\pm}$ имеем $\text{Im} G(\zeta^{\pm}) = \text{Im} G(l_{\pm})$ (см. фиг. 1, б), причем особые точки находятся из условия $dG/d\zeta = 0$.

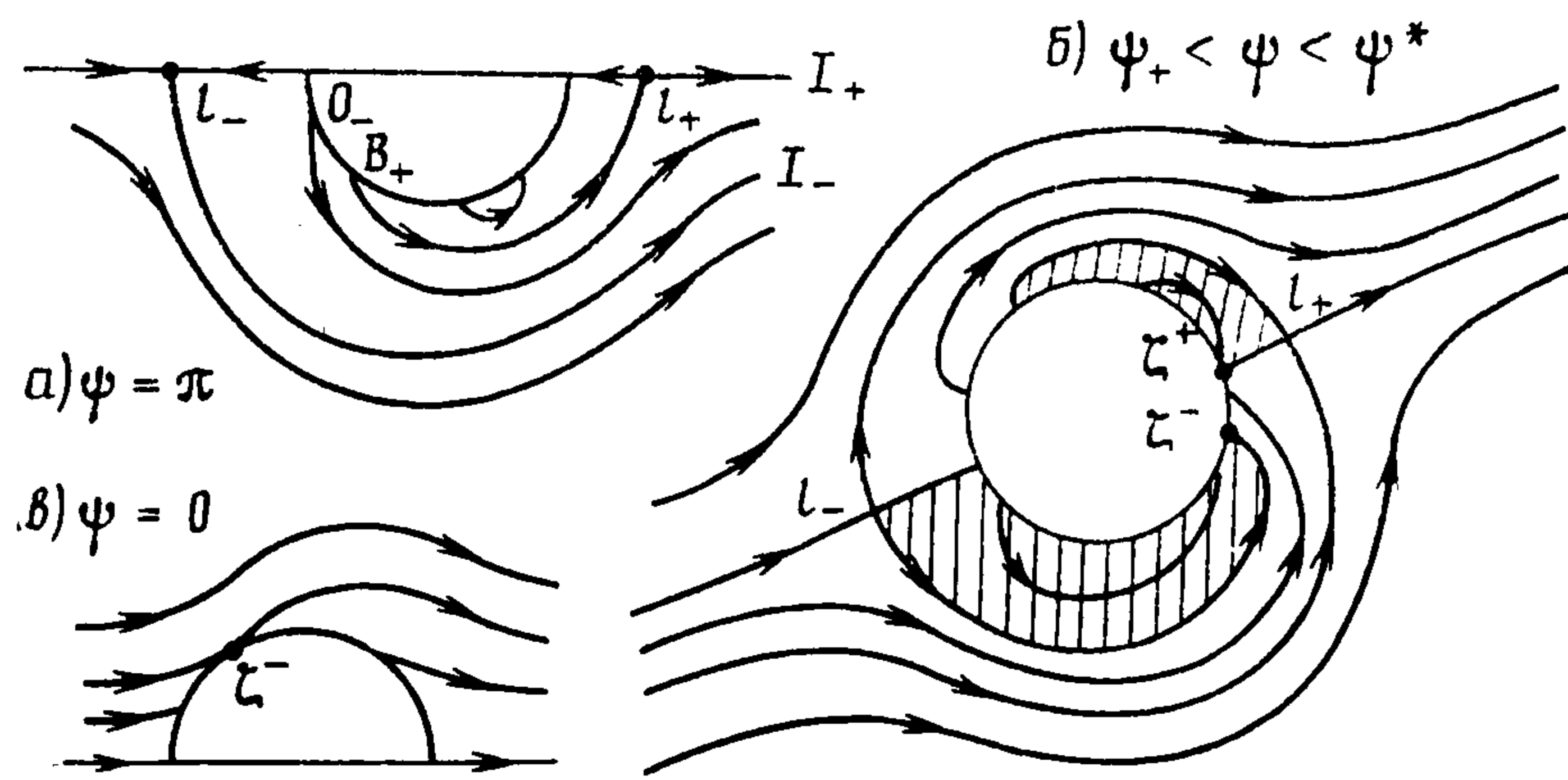
$$l_{\pm} = \frac{-Q}{\text{Re}^E + e^{-i\psi}} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{\text{Re}^E + e^{-i\psi}}\right)^2 + \frac{\text{Re}^E - e^{i\psi}}{\text{Re}^E + e^{-i\psi}}} \quad (2.3)$$

Численные расчеты по формуле (1.7) при учете этих обстоятельств и соотношений (1.3), (2.1)–(2.3) приводят к зависимостям $J(\text{Re}^E, Q, \psi)$, представленным на фиг. 2 и охватывающим всю область изменения угла ψ .

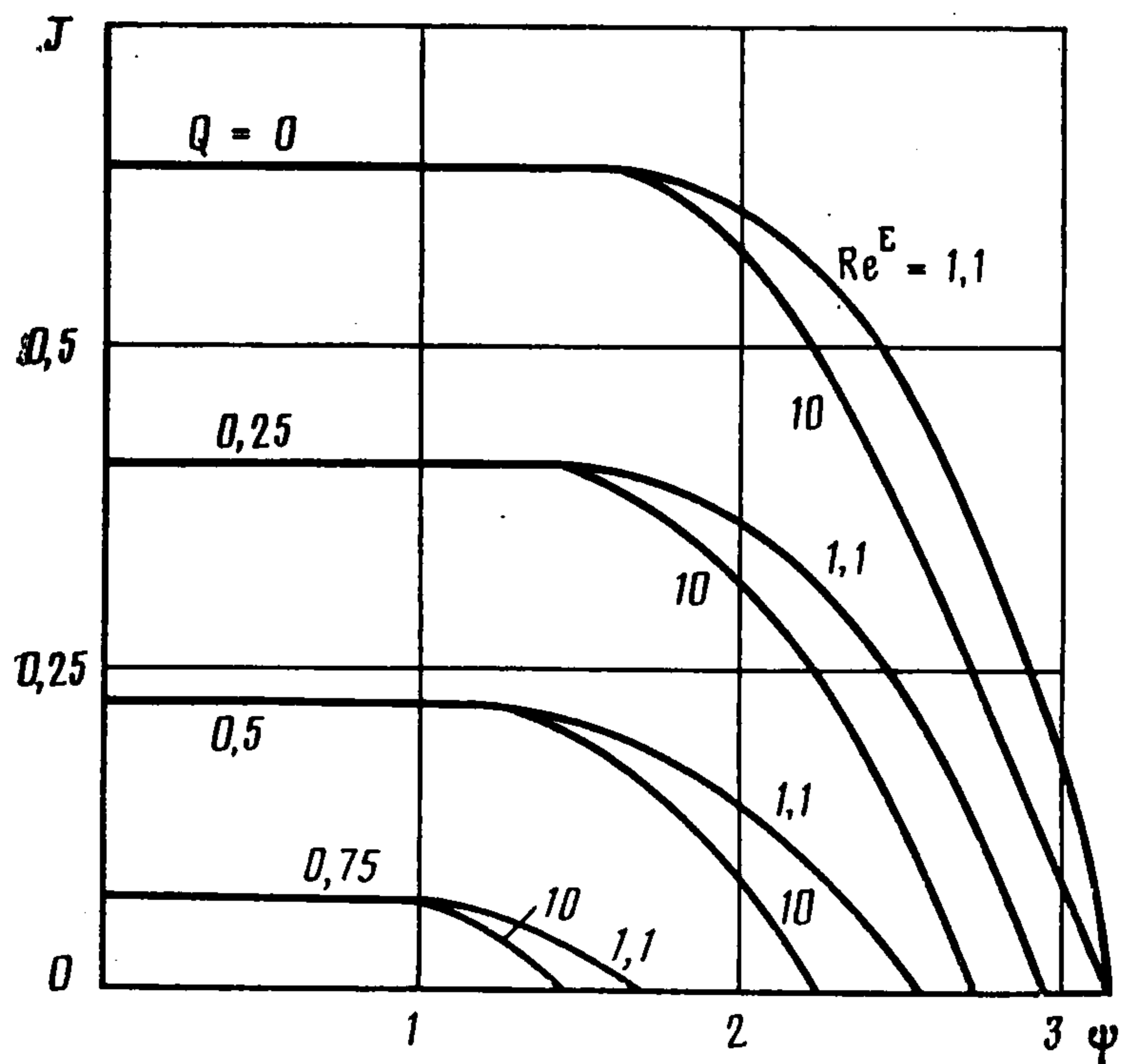
Рассмотрим теперь случай $\text{Re}^E < 1$, $0 < Q < 1$. Трансформация качественной картины линий тока заряженных частиц в плоскости ζ при уменьшении ψ от π до 0 проиллюстрирована на фиг. 3 ($Q < Q_0$, $Q_0 = \sqrt{1 - (\text{Re}^E)^2}$) и фиг. 4 ($Q > Q_0$). При $\psi = \pi$ и $Q < Q_0$ для тока на основании соотношений (1.7), (2.3) и равенства $\text{Im} G(\zeta^{\pm}) = \text{Im} G(l_{\pm})$ (см. фиг. 3, а) имеем

$$J = 2\pi^{-1} [\sqrt{1 - (\text{Re}^E)^2} - Q \arccos(Q/Q_0)]; \quad \psi = \pi, \quad \text{Re}^E < 1 \quad (2.4)$$

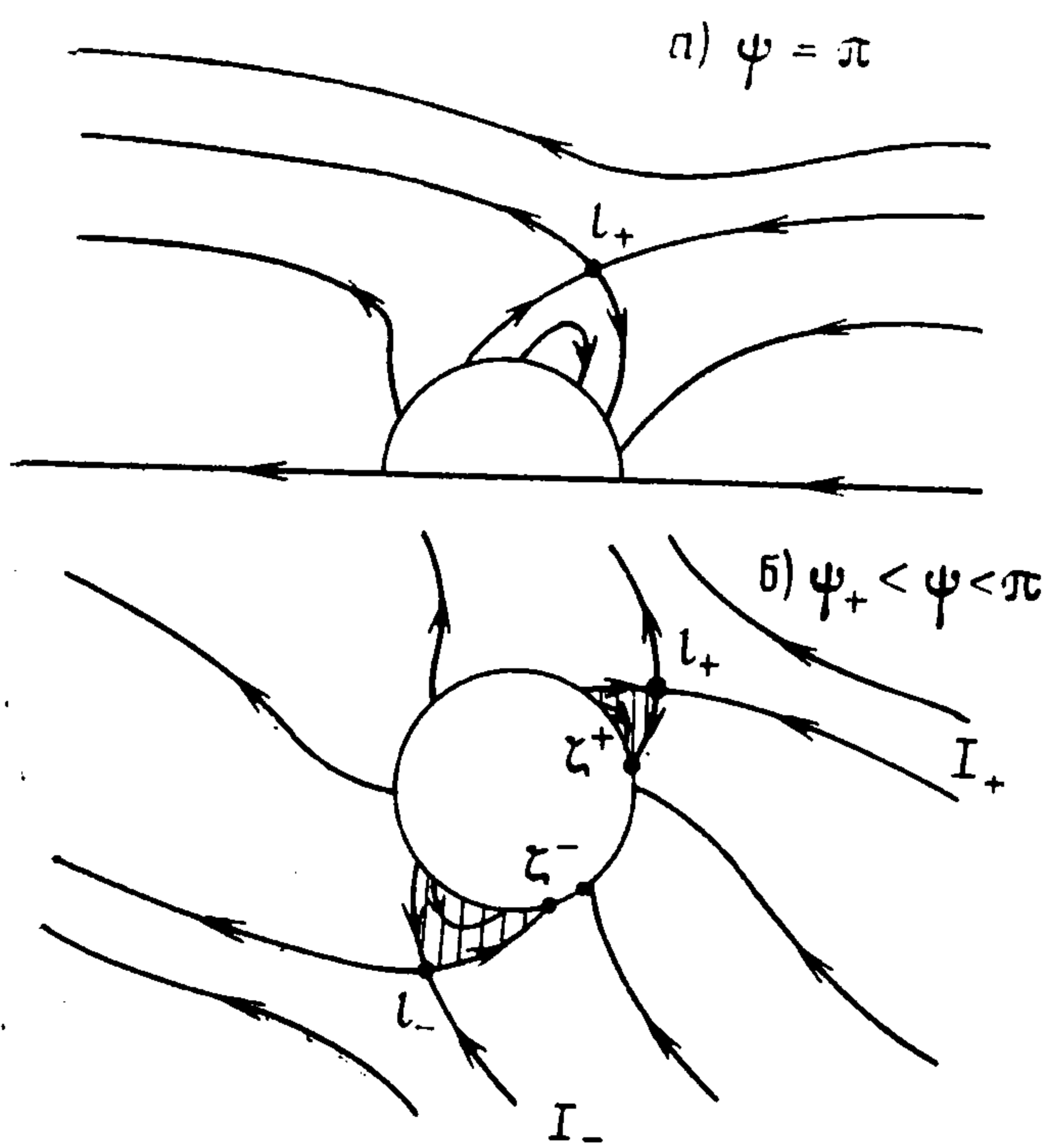
При уменьшении ψ ток J изменяется, пока при значениях $\psi = \psi_{\pm}$ последовательно не исчезнут верхняя (при $\psi = \psi_+$) и нижняя (при $\psi = \psi_-$) заштрихованные зоны на фиг. 3, б. После этого (т. е. при $0 < \psi < \psi_-$) ток J остается постоянным и равным величине (2.4). Если же $\psi = \pi$ и $Q > Q_0$, то линий тока, приходящих из бесконечности на поверхность зонда, нет (см. фиг. 4, а) и, следовательно, $J = 0$. Такое положение сохраняется при деформации линий тока, соответствующей уменьшению ψ до некоторого критического значения ψ_{cc} . При $\psi < \psi_{cc}$ появляются указанные линии тока и $J > 0$. На фиг. 4, б, в показано изменение качественной картины линий тока при переходе угла ψ через значение ψ_{cc} . При дальнейшем уменьшении ψ ток J изменяется, пока при значениях $\psi = \psi_{\pm}$ последовательно не исчезнут верхняя и нижняя заштрихованные зоны



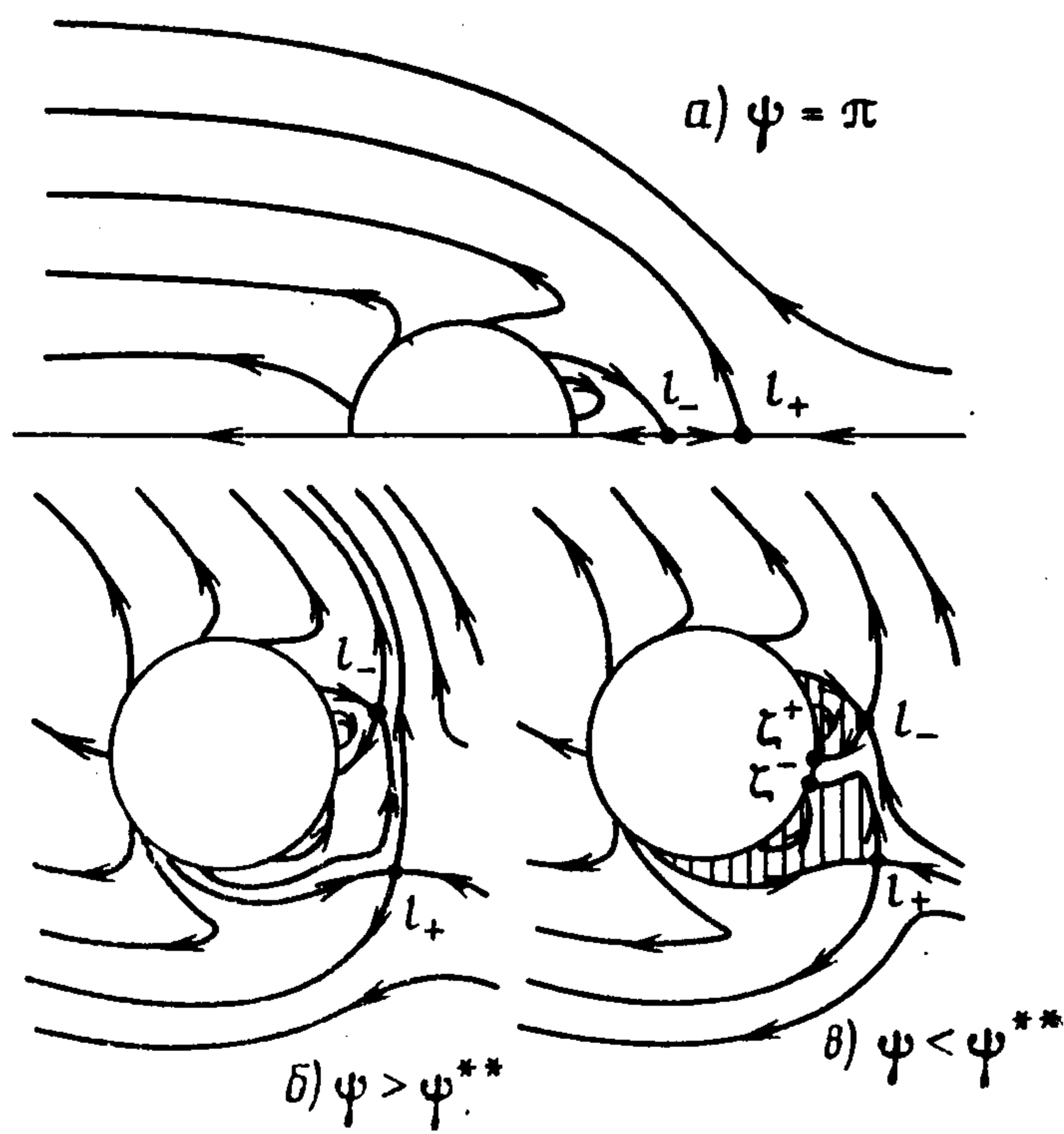
Фиг. 1



Фиг. 2



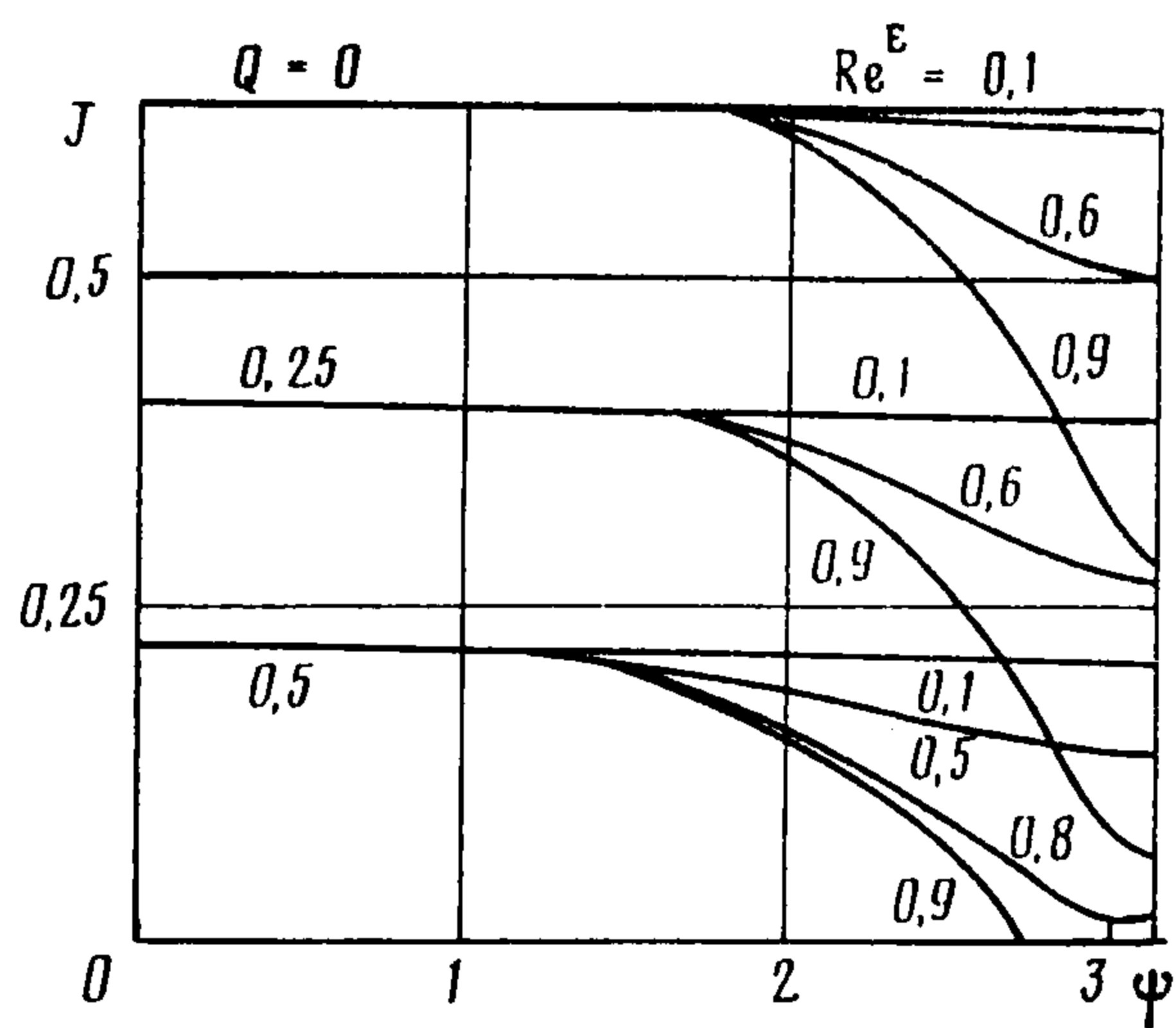
Фиг. 3



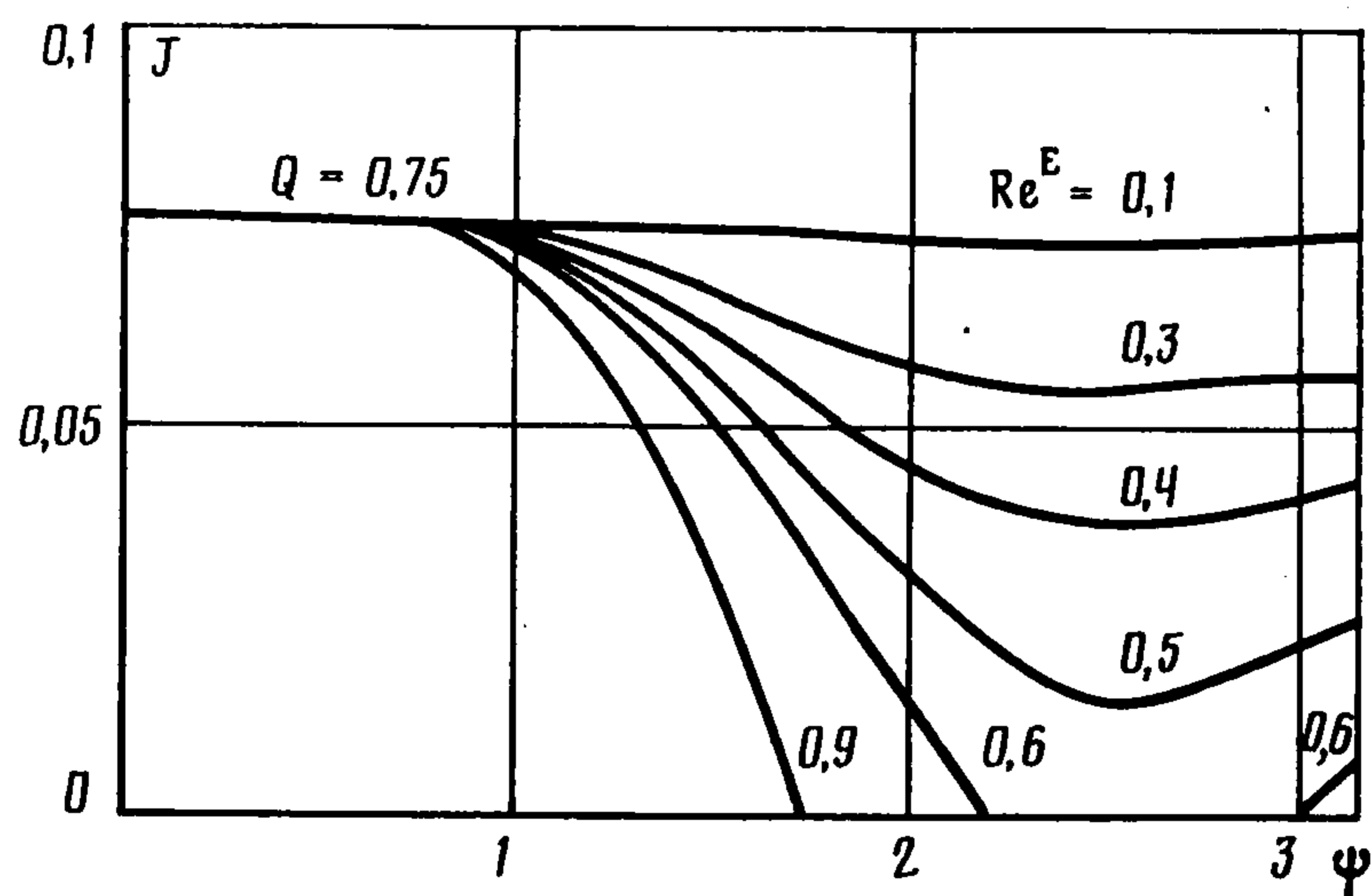
Фиг. 4

на фиг. 4, в. После этого (т. е. при $0 < \psi < \psi_-$) ток J остается постоянным и равным величине (2.1).

Численные расчеты тока J (во всем диапазоне $0 < Q < 1$, $0 < \psi < \pi$) при учете соотношений (1.7), (2.1)–(2.4) и того, что при $\psi > \psi_{\pm}$ имеем $\text{Im}(\zeta_{\pm}) = \text{Im} G(l_{\pm})$ (см. фиг. 3, б, 4, в), приводят при $\text{Re}^E < 1$ к зависимостям $J^*(\text{Re}^E, Q, \psi)$ представленным на фиг. 5, 6.



Фиг. 5



Фиг. 6

Отметим, что зависимость $J(\psi)$ при $\text{Re}^E < 1$ и $Q < Q_0$ не монотонна. Это связано с тем, что, как показывают расчеты, при уменьшении угла ψ канал $I_+ l_+ \zeta^+ \zeta^- l_- I_-$ (фиг. 3, б), по которому происходит осаждение частиц на зонд, сначала суживается, а затем расширяется. В частности, при значениях Re^E и Q , достаточно близких соответственно к 1 и Q_0 , возможно полное перекрытие указанного канала в некотором диапазоне значений угла ψ и, как следствие этого, обращение в нуль тока J (см. зависимость $J(\psi)$ на фиг. 6 при $\text{Re}^E = 0,6$, $Q = 0,75$).

Наконец, можно показать, что при $Q > 1$ (и любых Re^E, ψ) отсутствуют линии тока заряженных частиц, приходящие из бесконечности на зонд, и, следовательно, $J = 0$.

Для $Q < 0$ все исследования качественной картины линий тока заряженных частиц и расчеты их электрического тока J на зонд проводятся аналогичным образом. Оказывается, что картины линий тока для любого значения $Q < 0$ получаются из приведенных выше картин линий для противоположного значения $-Q > 0$ путем поворота последних на 180° и изменения направления движения на них на обратное. Отсюда вытекает, что функция $J(\text{Re}^E, Q, \psi)$ ($Q \leq 0$) удовлетворяет соотношению]

$$J(\text{Re}^E, Q, \psi) - J(\text{Re}^E, -Q, \psi) = -2Q$$

из которого зависимость $J(\text{Re}^E, Q, \psi)$ при $Q < 0$ выражается через зависимость $J(\text{Re}^E, Q, \psi)$ при $Q > 0$, исследованную выше. При этом оказывается, что формулы (2.2), (2.4) остаются справедливыми во всем диапазоне $-1 < Q < 1$, а при $|Q| > 1$ имеем $J = |Q| - Q$ для любых Re^E, ψ .

3. Рассмотрим применение развитой теории для диагностики концентраций различных сортов заряженных частиц в электрогидродинамических

потоках. На основании полученных результатов кулон-амперная характеристика зонда дается выражением

$$J^*(Q^*, \mathbf{E}^0, \mathbf{u}^0) = 2\pi R \sum_{j=1}^N e_j n_j^0 |c_j| E^0 J_j(Q_j, \text{Re}j^E, \psi_j) \quad (3.1)$$

Если провести измерения N значений J_k^* ($k = 1, \dots, N$) электрического тока, текущего на зонд при N различных наборах параметров Q_k^* , \mathbf{E}_k^0 (величину и направление \mathbf{E}^0 можно изменять, прикладывая достаточно сильное внешнее поле), то из соотношения (3.1) получим

$$J_k^* = \sum_{j=1}^N c_{kj} n_j^0, \quad c_{kj} = 2\pi e_j R |b_j| E^0 \times \\ J \times j \left(\frac{b_j Q_k}{\epsilon R |b_j| E_k^0}, \frac{u^0}{|b_j| E_k^0}, \arccos \frac{b_j (E_k^0 u^0)}{|b_j| E_k^0 u^0} \right) \quad (3.2)$$

Зависимость функции J_j от своих аргументов была определена выше. Система линейных (относительно n_j^0) уравнений (3.2) позволяет определить значения концентраций всех N сортов заряженных частиц в электрогидродинамическом потоке по измеренным значениям J_k^* , Q_k^* , E_k^* ($k = 1, \dots, N$), если известны свойства отдельных частиц каждого сорта (т. е. величины ϵ_j, j), а $\det \| c_{kj} \| \neq 0$. Для выполнения последнего условия, в общем случае, обязательно надо проводить измерения при закритических углах ψ_j , т. е. при $\psi_j > \psi_j^-$. Действительно, при $\psi_j < \psi_j^-$ функции J_j определяются соотношением (2.2) и, например, для униполярно заряженных электрогидродинамических потоков вообще не зависят от j , а $\det \| c_{kj} \| = 0$.

Зондирование же электрогидродинамических потоков при значениях напряженности электрического поля, неколлинеарных скорости потока, дает возможность по измерениям кулон-амперной характеристики восстанавливать концентрации всех сортов заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М.: Энергия, 1974. 480 с.
2. Ушаков В. В. К теории зонда Сато в электрогазодинамике // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 134—140.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.