Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 532.517.4

Э. В. Теодорович

ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

При помощи использования фейнмановского операторного формализма строится решение уравнения диффузии в неоднородно и нестационарно движущейся среде. Для «распутывания операторной экспоненты» применяется предложенное Стратоновичем функциональное преобразование. В результате решение представляется в виде континуального интеграла, отличающегося от полученного Винером тем, что в него вместо интеграла по траекториям входит интеграл по скоростям движения вдоль траекторий. Статистическое решение уравнения диффузии получается после усреднения по случайным скоростям. Для гауссовой статистики поля скоростей континуальное интегрирование может быть выполнено в явном виде в марковском приближении или в случае пространственно однородного нестационарного поля скоростей. В первом случае результат сводится к перенормировке коэффициента вязкости (замене коэффициента молекулярной вязкости на эффективный), а во втором — к замене реального времени на эффективное. Проблеме нахождения способа «сложения» коэффициентов молекулярного и турбулентного переносов (для определенности будем говорить о диффузии) был посвящен ряд работ, изложение которых содержится в монографии [1].

1. Уравнение, описывающее распространение пассивной примеси в поле пульсаций скорости, имеет вид [1]

$$[\partial_t + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\,\partial - \varkappa\partial^2]\, C(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{1.1}$$

где $C(\mathbf{r}, t)$ — концентрация примеси, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — турбулентная скорость, $\varkappa$ — молекулярный коэффициент переноса.

Коэффициент диффузии может быть определен различным образом [2—4], однако наиболее естественно его связать со скоростью расплывания первоначально локализованного распределения концентрации примеси [3]. В силу линейности уравнения (1.1) решение соответствующей задачи Коши определяется через функцию Грина, описывающую отклик концентрации $C(\mathbf{r}, t)$ на изменение плотности источника пассивной примеси $\rho(\mathbf{r}', t')$

$$\overline{G} = \langle G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\rangle = \delta\langle C(\mathbf{r}, t)\rangle/\delta\rho(\mathbf{r}', t') \tag{1.2}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Функция Грина для индивидуальной реализации поля концентрации является функционалом от индивидуальной реализации поля скорости и удовлетворяет уравнению

$$L(\partial_t, \partial \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\, G(\mathbf{r}, t;\ \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) =$$
$$= [\partial_t + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\,\partial - \varkappa\partial^2]\, G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\delta(t - t') \tag{1.3}$$

Если случайное поле скорости однородно и стационарно, функция $\overline{G}$ зависит только от разности координат и времен, для нее можно выполнить преобразование Фурье и вести рассмотрение в пространстве фурье-образов. Методами квантовой теории поля [3, 5] можно показать, что средняя функция Грина представима в виде

$$\overline{G}(\mathbf{p}, \omega) = [-i\omega + \varkappa^*(\mathbf{p}, \omega)\, p^2]^{-1} \tag{1.4}$$

где $\varkappa^*(\mathbf{p}, \omega)$ следует рассматривать как коэффициент эффективной диффузии, описывающей процессы переноса пассивной примеси турбулентными пульсациями скорости.

К сожалению, не представляется возможным написать в замкнутой форме уравнение для G, поскольку уравнение для концентрации нелинейно по совокупности случайных полей $C(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, вследствие чего уравнение для статистических моментов порядка n будет содержать также моменты порядка $n+1$ даже в случае, когда статистика поля скорости гауссова. В этом заключается отличие мультипликативного шума (коэффициенты уравнения являются случайными функциями) от соответствующего ланжевеновскому подходу аддитивного шума (правые части уравнений — случайные функции): при аддитивном шуме гауссова статистика внешних возмущений приводит в линейной системе к гауссовой статистике для рассматриваемых величин. Цепочка уравнений для моментов может быть оборвана путем требования обращения в нуль семиинвариантов (кумулятивных средних) начиная с некоторого порядка (гипотеза квазинормальности), однако строгого обоснования подобной процедуры не имеется, отклонения от гауссовой статистики не обязаны быть малыми.

2. Единственная остающаяся возможность для вычисления функции $\bar{G}(\mathbf{r}, t)$ заключается в нахождении $G(\mathbf{r}, t;\ \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))$ при заданной скорости и последующем усреднении по ансамблю скоростей в соответствии с формулой (1.2). Однако сложность решения уравнения (1.3) состоит в том, что его коэффициенты — переменные случайные функции.

Можно попытаться искать решение методами теории возмущений в виде функционального ряда по степеням $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, рассматривая пропорциональный скорости член как возмущение [6]. Для этого представим уравнение (1.3) в интегральной форме

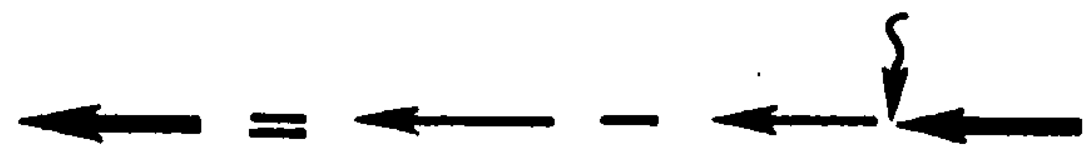
$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = G^{(0)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') - \\ - \int d\mathbf{r}'' dt'' G^{(0)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}'', t'')\, \mathbf{v}(\mathbf{r}'', t'')\, \partial'' G(\mathbf{r}'', t''; \mathbf{r}', t' \mid \mathbf{v}(\mathbf{r}', t')) \tag{2.1}$$

где $G^{(0)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ — решение уравнения (1.3) для покоящейся среды ($\mathbf{v}(r, t) = 0$).

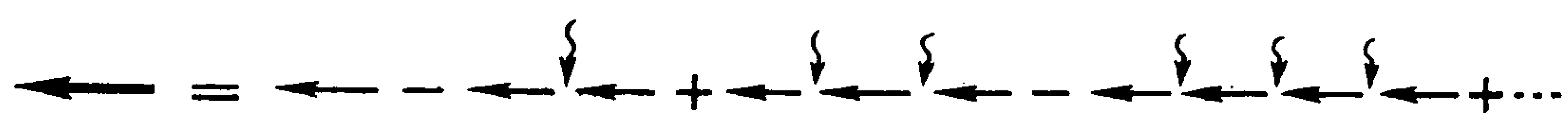
Уравнение (2.1) представлено графически на фиг. 1, где жирной стрелке соответствует функция Грина G, тонкой — $G^{(0)}$, а вставке волнистой линии — $\mathbf{v}\partial$. Итерационное решение уравнения (2.1) графически представляется бесконечным рядом (фиг. 2). Усреднению по ансамблю скоростей соответствует замена произведения скоростей их статистическими моментами, что графически показано на фиг. 3.

В случае гауссовой статистики статистические моменты представимы в виде суммы всевозможных попарных средних усредняемых полей (в теории поля это утверждение носит название теоремы Вика). Если графически парный коррелятор скорости обозначить волнистой линией с двумя стрелками, то для средней функции Грина будем иметь картину, показанную на фиг. 4. Поскольку представленные ряды не соответствуют какому-либо разложению по малому параметру, то нельзя ограничиться конечным числом членов итерационного ряда и необходимо искать решение задачи (1.3) вне рамок теории возмущений, что связано с попытками суммирования бесконечных подпоследовательностей полного ряда.

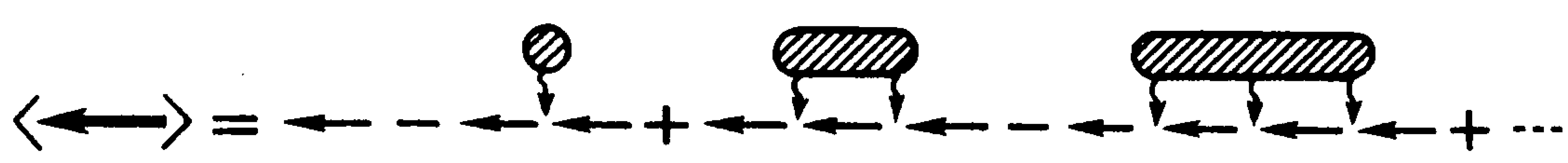
Суммирование одночастично неприводимых диаграмм (типа б и в на фиг. 4) сводится к решению уравнения Дайсона, учет диаграмм типа г — к вставке вместо свободной функции Грина $G^{(0)}$ полной функции Грина G, а учет диаграммы д сводится к замене одной из вершин (правой) на перенормированную. Отбрасывание диаграмм типа д (пренебрежение перенормировкой вершин) соответствует приближению прямых взаимодействий [7]. Суммирование диаграмм типа г осуществляется методом ренормализационной группы, а при попытке учета перенормировки вершин необходимо дополнительно рассматривать уравнение для вершины, содержащее моменты четвертых порядков, и снова приходится сталкиваться с проблемой замыкания цепочки уравнений для моментов. Таким образом, суммированием рядов теории возмущений при



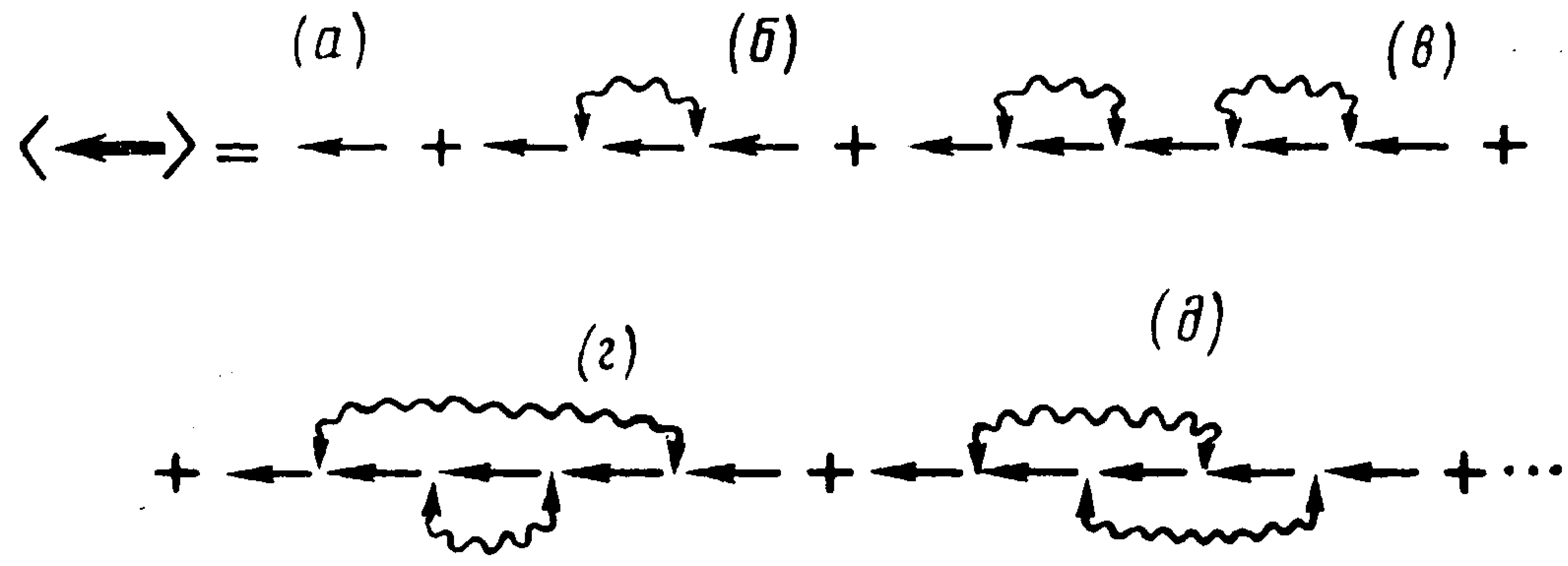
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

отсутствии малого параметра не удается продвинуться в получении строгих результатов, что приводит к необходимости отказа от попыток решения задачи в рамках теории возмущений.

Для построения общего решения уравнения (1.3) вне рамок теории возмущений может быть использован развитый в теории случайных процессов метод, основанный на статистическом подходе к нахождению решения уравнения диффузии и применением непрерывного преобразования меры винеровского процесса, исключающего конвективный член [8]. Однако эта задача может быть решена при помощи фейнмановского операторного формализма [9], обладающего более широкими возможностями по сравнению с методами, специально развитыми только для исследования диффузионных процессов. Фейнмановский операторный формализм является обобщением представления Фока для обратного оператора на случай наличия в операторе некоммутирующих величин.

Согласно Фоку функция Грина для оператора $L(\partial_t, \partial)$ может быть записана в виде

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = L^{-1}(\partial_t, \partial)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, \delta(t - t')$$

$$L^{-1}(\partial_t, \partial) = \int\limits_0^\infty d\tau \exp\left[-L(\partial_t, \partial)\,\tau\right]$$

Однако в рассматриваемом случае оператор L явно зависит от координат и времени и вследствие некоммутативности входящих в него величин

$$[\partial_t, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]_- = \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \qquad [\partial_i, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = \partial_i \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

необходимо определить последовательность действия операторов, стоящих в показателе экспоненты. С этой целью, следуя Фейнману [9], введем параметр упорядочения s и определим последовательность действия операторов $\partial_t(s)$, $\partial(s)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t; s)$ в порядке возрастания s («собственного времени»). При этом обратный оператор L^{-1} запишется в виде [1]

$$L^{-1}(\partial_t, \partial \,|\, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = \int\limits_0^\infty d\tau \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\, [\partial_t(s) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t; s)\, \partial(s) - \varkappa \partial^2(s)]\right\} \quad (2.2)$$

Для «распутывания операторной экспоненты» необходимо исключить вторую степень оператора $\partial(s)$ в показателе экспоненты, тогда возникает возможность интерпретировать выражения типа $\exp(a\partial_t)$ и $\exp(\mathbf{b}\partial)$ как операторы сдвига аргументов согласно тождествам

$$\exp(a\partial_t)\, f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t + a), \quad \exp(\mathbf{b}\partial)\cdot f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r} + \mathbf{b}, t) \quad (2.3)$$

С этой целью применим преобразование Стратоновича [10], являющееся функциональным аналогом преобразования Вейерштрасса [11],

$$\exp\left[a\int\limits_0^\tau ds \mathbf{f}^2(s)\right] = \int \frac{d[\zeta]}{A(a, \tau)} \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\left[\frac{\zeta^2(s)}{4a} - \mathbf{f}(s)\,\zeta(s)\right]\right.$$

$$A(a, \tau) = \int d[\zeta] \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\, \frac{\zeta^2(s)}{4a}\right\} \quad (2.4)$$

Здесь $\zeta(s)$ — произвольные функции, задаваемые на отрезке $(0, \tau)$, $d[\zeta]$ — интегральная мера (элементарный объем в функциональном пространстве).

В результате применения формулы (2.4) к (2.2) и использования формул (2.3) при учете правил для последовательности действия некоммутирующих операторов найдем

$$L^{-1}(\partial_t, \partial \,|\, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{A(\varkappa, \tau)} \int d[\zeta] \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4\varkappa}\int\limits_0^\tau ds\, [\zeta(s) + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t, \tau, s;\ \zeta)]^2 \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\, [\partial_t(s) - \zeta(s)\, \partial(s)]\right\}\right.$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t, \tau, s; \zeta) = \mathbf{v}\left(\mathbf{r} + \int\limits_s^\tau ds' \zeta(s'), t - \tau + s\right) \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) после осуществления сдвигов аргументов не осталось некоммутирующих операторов, вследствие чего оказалось возможным опустить зависимость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t; s)$ от «собственного времени» s.

При $\mathbf{v} = 0$ формула (2.5) совпадает с винеровским представлением для решения уравнения диффузии в виде интеграла по траекториям. При этом формально введенная при проведении преобразования Стратоновича функциональная переменная $\zeta(s)$ совпадает со скоростью движения вдоль траектории. Обобщение на случай $\mathbf{v} \neq 0$ сводится к учету неоднородного сноса траекторий за счет движения среды, что соответствует предположению, сделанному без достаточного обоснования в работе [12].

Из (2.5) видно, что аргументами функции Грина являются $(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ и (r, t), причем зависимость от последних входит только через функцию $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Поэтому представляется полезным выполнить преобразование Фурье по переменным $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $t - t'$, а для устранения квадрата скорости в показателе экспоненты (2.8) снова воспользоваться функциональным преобразованием Стратоновича (2.4). После его выполнения убеж-

[1] *Теодорович Э. В.* Об инфракрасных расходимостях и роли локальных и нелокальных взаимодействий в формировании режима развитой турбулентности: Препринт № 388. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1989, 26 с.

даемся, что зависимость от скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ оказывается выделенной в виде отдельного сомножителя. В результате этого при усреднении по ансамблю скоростей будем иметь равенство

$$\langle L^{-1}(-i\omega, i\mathbf{p}\,|\,\mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\rangle = \overline{G}(\mathbf{p}, \omega) = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{B(\varkappa, \tau)} \int d[\zeta]\, d[\eta] \times$$

$$\times \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\,[\varkappa\eta^2(s) - i\omega - i[\mathbf{p} + \eta(s)]\,\zeta(s)]\right\} \times$$

$$\times \left\langle \exp\left\{i\int\limits_0^\tau ds\,\eta(s)\,\mathbf{V}(\mathbf{r}, t, \tau, s; \zeta)\right\}\right\rangle$$

$$B(\varkappa, \tau) = A(\varkappa, \tau)\, A(1/(4\varkappa), \tau)$$

где стоящее в правой части среднее представляет собой характеристический функционал поля скорости.

Для гауссова случайного процесса характеристический функционал выражается через парную корреляционную функцию, которая в случае статистически однородного и стационарного случайного процесса зависит только от разностей координат и времен

$$\langle v_i(\mathbf{r}, t)\, v_i(\mathbf{r}', t')\rangle = C_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$$

При этом в силу условия несжимаемости она удовлетворяет уравнению

$$\partial_i C_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \partial_j' C_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0$$

Характеристический функционал гауссова процесса определен соотношением

$$\left\langle \exp\left\{i\int\limits_0^\tau ds\,\eta_i(s)\, v_i\left(\mathbf{r} + \int\limits_s^\tau ds'\zeta(s'), t - \tau + s\right)\right\}\right\rangle = \exp\{-w(\tau, 0; \eta, \zeta)\}$$

$$w(t, t'; \eta, \zeta) = \frac{1}{2}\int\limits_{t'}^t ds \int\limits_{t'}^t ds'\,\eta_i(s)\,\eta_j(s')\, C_{ij}\left(\int\limits_{s'}^s d\xi\,\zeta(\xi), s - s'\right)$$

В результате для фурье-образа усредненной функции Грина найдем

$$\overline{G}(\mathbf{p}, \omega) = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{B(\varkappa, \tau)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\int\limits_0^\tau ds\,[\varkappa\eta^2(s) - i\omega - i[\mathbf{p} + \eta(s)]\,\zeta(s)] - w(\tau, 0; \eta, \zeta)\right\} \qquad (2.6)$$

Приведем еще формулы, получающиеся после выполнения обратных преобразований Фурье по времени и координатам

$$\overline{G}(\mathbf{p}, t - t') = \frac{\theta(t - t')}{B(\varkappa, t - t')} \int d(\zeta)\, d[\eta] \times$$

$$\times \exp\left\{-\int\limits_{t'}^t ds\,[\varkappa\eta^2(s) - i[\mathbf{p} + \eta(s)]\,\zeta(s)] - w(t, t'; \eta, \zeta)\right\} \qquad (2.7)$$

Формула для $\overline{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ получается из (2.7), если в показателе экспоненты положить $\mathbf{p} = 0$ и потребовать.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\int\limits_{t'}^t ds\,\zeta(s)$$

Отметим, что в рамках модели статистически однородного и стационарного гауссова процесса для флуктуаций поля скорости формулы (2.6), (2.7) являются точными, их вывод не связан с теорией возмущений и каким-либо предположением о существовании малого параметра. Хотя континуальное интегрирование выполнимо точно только для некоторых частных случаев (см. ниже), формулы (2.6), (2.7) могут служить источником получения асимптотических разложений или использоваться при численном интегрировании. В частности из (2.6) можно получить информацию о влиянии крупномасштабных случайных движений на мелкомасштабные, что представляет интерес в теории турбулентности в связи с задачей об отделении описывающих эффекты переноса прямых взаимодействий вихрей с существенно различающимися масштабами от динамических взаимодействий, осуществляющих передачу энергии вдоль спектра волновых чисел (см. ссылку на стр. 278).

3. В случае, когда флуктуации скорости представляют собой марковский случайный процесс («белый шум»)

$$C_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\ t-t') = C_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t') \tag{3.1}$$

можно все вычисления провести до конца, так как удается выполнить функциональное интегрирование в (2.6). Для d-мерной турбулентности представим корреляционную функцию поля скорости при учете несжимаемости в виде

$$C_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}\right) C(q)\, e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \tag{3.2}$$

Подстановка выражения (3.2) в (2.6) с использованием равенства (3.1) дает

$$\bar{G}(\mathbf{p},\omega) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{B(\varkappa,\tau)} \int d[\zeta]\, d[\eta] \exp\left\{-\int_0^\tau ds\left[\varkappa^*\eta^2(s) - i\omega - i[\mathbf{p}+\eta(s)]\,\zeta(s)\right]\right\} \tag{3.3}$$

$$\varkappa^* = \varkappa + \delta\varkappa = \varkappa + \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\left[1 - \frac{(\zeta\mathbf{q})^2}{\zeta^2 q^2}\right] C(q) \tag{3.4}$$

Интеграл в (3.4) от функции $\zeta(s)$ не зависит, что становится очевидным после интегрирования по угловым переменным, которое может быть выполнено в явном виде. Имеем

$$\int d\Omega_d \left[1 - \frac{(\zeta^2\mathbf{q})^2}{\zeta^2 q^2}\right] = \int d\Omega_d \sin^2\theta = s_{d-1}\int_0^\pi \sin^d\theta\, d\theta = \frac{d-1}{d}\, s_d$$

где θ — угол между векторами $\zeta(s)$ и $\mathbf{q}$, s_d — площадь поверхности d-мерной сферы единичного радиуса.

Таким образом, получим

$$\varkappa^* = \varkappa + \frac{d-1}{2d}\,\frac{s_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty q^{d-1} C(q)\, dq \tag{3.5}$$

Функциональные интегрирования в (3.3) осуществляются по схеме:

$$\bar{G}(\mathbf{p},\omega) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{B(\varkappa,\tau)} \exp(i\omega\tau) \int d[\zeta] \exp\left\{-\int_0^\tau ds\left[\frac{\zeta^2(s)}{4\varkappa} + \mathbf{p}\zeta(s)\right]\right\} \times$$

$$\times \int d[\eta] \exp\left\{-\int_0^\tau ds\varkappa^*\left[\eta(s) - \frac{i}{2\varkappa}\zeta(s)\right]^2\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\tau}{B(\varkappa,\tau)} \exp\left[-(-i\omega + \varkappa^*\mathbf{p}^2)\,\tau\right] \int d[\zeta] \exp\left\{-\frac{1}{4\varkappa^*}\int_0^\tau ds\left[\zeta(s) + 2\varkappa\mathbf{p}\right]^2\right\} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau\, \frac{B(\varkappa^*,\tau)}{B(\varkappa,\tau)} \exp\left[-(-i\omega + \varkappa^* p^2)\right] = \left[-i\omega + \varkappa^* p^2\right]^{-1}$$

где последовательно выполнены следующие операции: сведение интеграла по η к гауссову виду, выполнение интегрирования по η и сведение интеграла по ξ к гауссову виду, выполнение интегрирования по ζ и использование легко проверяемого для гауссовых интегралов соотношения $A(\varkappa, \tau) A(\alpha^2/\varkappa, \tau) = A^2(\alpha, \tau)$.

Таким образом, для марковского случайного процесса (это предположение означает, что снос траекторий в данной точке поля не зависит от формы траектории на предшествующих участках, которая определяется суммарным действием молекулярного и турбулентного движения) эффект турбулентного перемешивания сводится к перенормировке коэффициента молекулярной диффузии, т. е. к замене $\varkappa \to \varkappa^* = \varkappa + \delta\varkappa$, что соответствует более быстрому протеканию диффузионных процессов. Для марковского процесса подтверждается гипотеза Тейлора [13] об аддитивности коэффициентов молекулярного и турбулентного переноса.

Однако в действительности случайные флуктуации поля скорости не являются марковским процессом и в общем случае функциональное интегрирование провести не удается. Тем не менее существует еще один частный случай, когда это можно сделать — случай пространственно однородных случайных скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(t)$. При этом по формуле (2.7) после выполнения функционального интегрирования по ζ найдем

$$G(\mathbf{p}, \omega \mid \mathbf{v}(t)) = \int_0^\infty d\tau \exp\left\{-\int_0^\tau ds\,[-i\omega + \varkappa p^2 + i\mathbf{p}\mathbf{v}(t - \tau + s)]\right\} \qquad (3.6)$$

Усреднение по ансамблю реализаций случайных скоростей дает

$$\langle G(\mathbf{p}, \omega \mid \mathbf{v}(t))\rangle = \int_0^\infty d\tau \exp[-(-i\omega + \varkappa p^2)]\, W(\mathbf{p}, t, \tau) \qquad (3.7)$$

где

$$W(\mathbf{p}, t, \tau) = \left\langle \exp\left[-i\int_0^\tau ds\,\mathbf{p}\mathbf{v}(t - \tau + s)\right]\right\rangle$$

— характеристический функционал поля скоростей. Для гауссова случайного процесса

$$W(\mathbf{p}, t, \tau) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\tau ds \int_0^\tau ds' \langle \mathbf{p}\mathbf{v}(t - \tau + s)\cdot \mathbf{p}\mathbf{v}(t - \tau + s')\rangle\right\}$$

В связи с формулой (3.6), отметим ее совпадение с выражением для функции Грина в приближении переноса [2].

В случае статистически стационарного и изотропного поля скорости имеем

$$\langle v_j(t)\, v_j(t')\rangle = \delta_{ij} C(t - t')$$

и в результате после выполнения обратного преобразования Фурье найдем

$$\bar{G}(\mathbf{r}, t) = \frac{\theta(t)}{[4\pi\varkappa t^*]^{d/2}} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\varkappa t^*}\right\}$$
$$t^* = t + \frac{1}{2\varkappa}\int_0^t ds \int_0^t ds'\, C(s - s') \qquad (3.8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае эволюция концентрации происходит как и в случае обычных диффузионных процессов, но с заме-

[2] *Белиничер В. И., Львов В. С.* Масштабно-инвариантная теория развитой гидродинамической турбулентности: Препринт № 333. Новосибирск: Ин-т автоматики и электрометрии СО АН СССР, 1986, 59 с.

ной времени t на эффективное время t^*, определяемое вторым соотношением (3.8). Для марковского процесса $C(t-t') = C_0\delta(t-t')$ эффективное время пропорционально обычному:

$$t^* = [1 + C_0/(2\varkappa)]\, t$$

и результат сводится к перенормировке коэффициента диффузии $\varkappa \to \varkappa^* = \varkappa + {}^1/_2 C_0$, как и в случае марковских неоднородных пульсаций скорости.

Хотя в действительности турбулентные пульсации скорости не являются марковским процессом [6, 14], тем не менее при оценке влияния мелкомасштабных пульсаций скорости на крупномасштабные процессы марковское приближение должно давать разумные результаты, поскольку

$$C_{ij}(\mathbf{q}, t-t') = C_{ij}(\mathbf{q}) \exp[-\nu(q)\, q^2 \mid t-t' \mid]$$

и при больших q время корреляций будет малым. Оценка поправок к марковскому приближению в задаче диффузии рассматривалась Друммондом [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
2. *Carnevale G. F., Frederiksen J. S.* Viscosity renormalization based on direct interaction closure // J. Fluid Mech. 1983. V. 131. P. 289—304.
3. *Теодорович Э. В.* Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 218—224.
4. *Чефранов С. Г.* К теории турбулентной вязкости // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. Вып. 1. С. 171—186.
5. *Теодорович Э. В.* Применение методов теории поля и ренормализационной группы для описания развитой турбулентности // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 1. С. 81—121.
6. *Phythian R., Curtis W. D.* The effective long-time diffusivity for a passive scalar in a Gaussian model fluid flow // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. № 2. P. 241—250.
7. *Kraichnan R. H.* The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. № 4. P. 497—543.
8. *Feynman R. P.* An operator calculus having applications in quantum electrodynamics / Phys. Rev. 1951. V. 84. № 1. P. 118—128.
9. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука 1987. 397 с.
10. *Стратонович Р. Л.* Об одном методе вычисления квантовых функций распределения // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. № 6. С. 1097—1100.
11. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 312 с.
12. *Drummond I. T.* Path-integral methods for turbulent diffusion // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 59—68.
13. *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence // Proc. Roy. Soc. 1935. V. 151A. № 874. P. 421—478.
14. *Kraichnan R. H.* Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence // Phys. Fluids. 1968. V. 11, № 5. P. 945—953.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1990