

УДК 532.5 : 534.1

© 1991 г.

В. А. Бужинский, И. М. Мельникова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ПЛАСТИН В ЖИДКОСТИ

На основании приближенного подхода [1] рассматриваются методы определения вихревого сопротивления пластин, совершающих гармонические колебания в несжимаемой жидкости. Согласно этому подходу задача сводится к определению коэффициентов интенсивности скоростей (КИС) на кромках пластины и вычислению некоторого интеграла по граничному контуру. В математическом плане КИС аналогичны коэффициентам интенсивности напряжений (КИН) [2] в механике разрушения. Представлены наиболее важные точные решения и замкнутые выражения для КИС в плоской и пространственной задачах. Для численного решения разработан вариант прямого метода граничных элементов (МГЭ). Приведены примеры применения метода конечных элементов (МКЭ) и МГЭ к конкретным задачам. Предложены способы повышения точности численных решений. Изложены результаты экспериментальных исследований, дано их сравнение с расчетами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания пластины в покоящейся вдали несжимаемой жидкости. Введем обозначения: R — характерный линейный размер пластины, v_0 и ω — ее характерные амплитуда скорости и частота колебаний, ρ и ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости, $Re = v_0 R / \nu$ и $Sh = R \omega / \nu_0$ — числа Рейнольдса и Струхала. Будем считать, что выполняется условие

$$Re^{-1/2} \ll Sh^{-1/3} \ll 1 \quad (1.1)$$

Оно устанавливает соотношение порядков между толщиной колеблющегося пограничного слоя, размером области завихренности в окрестности острых кромок и размером пластины [1]. Вне малых областей существенной завихренности движение жидкости будем считать потенциальным.

Представим потенциал скоростей жидкости в виде $\Phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \cos \omega t$, где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, t — время.

На поверхности пластины имеем граничное условие $\partial\varphi/\partial n = \mp v_n(\mathbf{r})$. Знаки «минус» и «плюс» относим к «положительной» и «отрицательной» сторонам поверхности пластины, которую считаем бесконечно тонкой, \mathbf{n} — орт внешней нормали.

При принятых допущениях коэффициент сопротивления можно определить следующим образом [1]:

$$c_D = k Sh^{1/3}, \quad k = 3/4 B(Re) I(v_n) \quad (1.2)$$

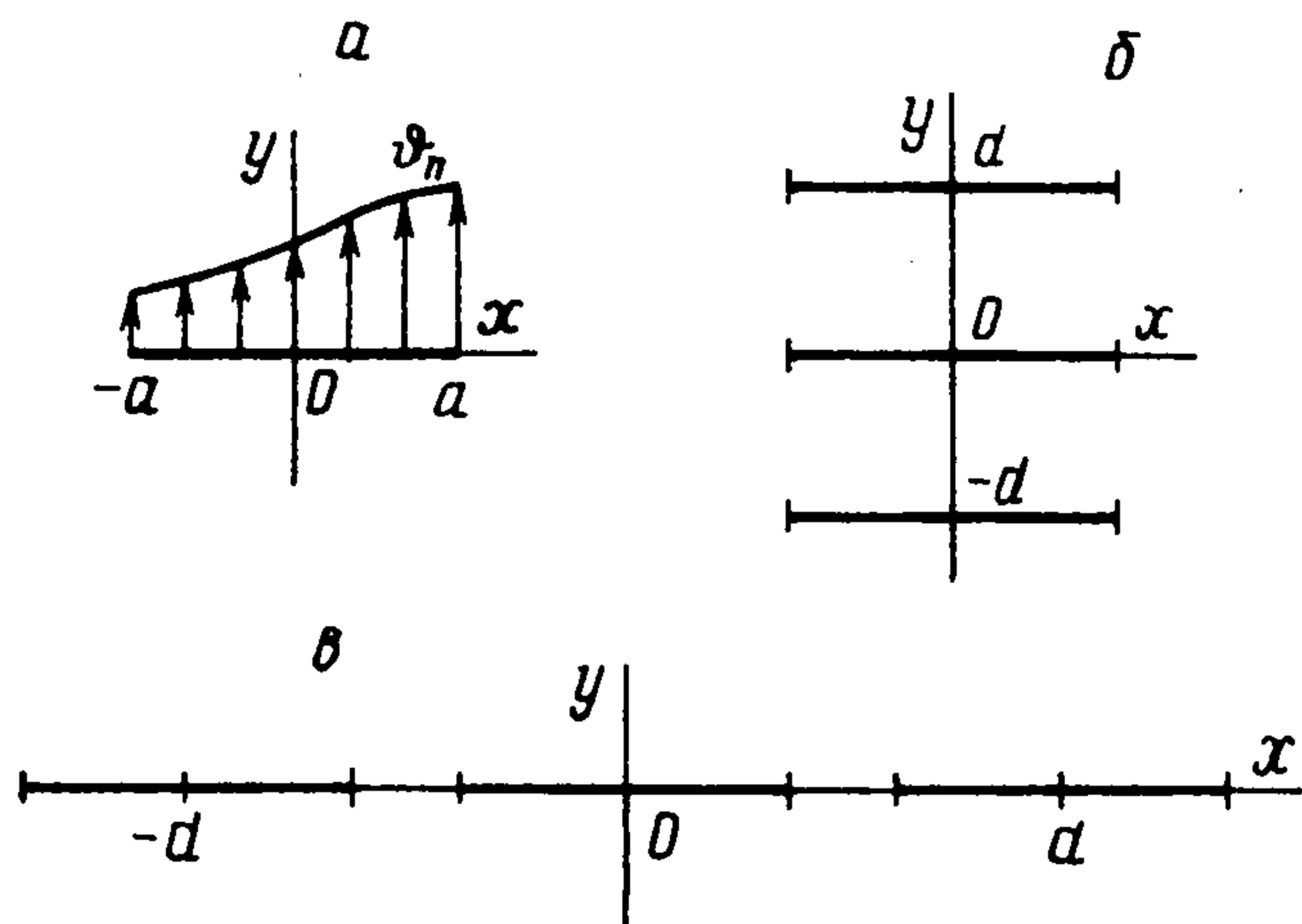
$$(v_n) = \oint_l \left(\frac{K_v^2}{Rv_0^2} \right)^{1/3} d \frac{l}{R} \quad (1.3)$$

В общем случае это определение соответствует действующей на пластину обобщенной силе сопротивления $Q = -1/2 c_D \rho v_0^2 R^2 |\cos \omega t| \cos \omega t$. В (1.3) l — граничный контур пластины, а КИС вычисляется как

$$K_v(l) = - \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1/2} \partial\varphi/\partial n = \lim_{r \rightarrow 0} (2r/\pi)^{-1/2} \varphi_+ \quad (1.4)$$

где r — расстояние в касательной плоскости по наружной и внутренней нормали к l в первой и второй формуле соответственно, n — здесь выбранный положительный орт нормали к касательной плоскости. В (1.2) при больших числах Рейнольдса $B(Re) \approx 2 + O(Re^{-1/2})$ [1]. Другие [3, 4] экспериментальные данные и расчеты методом дискретных вихрей подтверждают зависимость (1.2), но не позволяют ее уточнить.

Так как согласно условию (1.1) области существенной завихренности малы, задача определения форм колебаний пластины, если она является упругой, в первом приближении может решаться независимо. Будем считать, что эта задача решена, и функция $v_n(r)$ известна. Тогда для определения сопротивления необходимо найти гармоническую функцию ϕ по заданному граничному условию и вычислить КИС на контуре пластины. Ниже будут рассмотрены точные и приближенные методы решения этой задачи.



Фиг. 1

2. Точные решения плоской задачи.

Обозначим через $w(z) = u - iv$ функцию скоростей абсолютного течения жидкости в комплексной плоскости $z = x + iy$.

Рассмотрим колебания плоской пластины при заданной эюре распределения ее скоростей $v_n(x)$ (фиг. 1, а). Применяя интеграл типа Коши, получим

$$w(z) = -\frac{1}{\pi g(z)} \int_{-a}^a \frac{g(\tau) v_n(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.1)$$

где $g(z) = (z^2 - a^2)^{1/2}$ — аналитическая ветвь, выделяемая условием $g(z)/z \rightarrow 1$ при $|z| \rightarrow \infty$. Вычисляя КИС по формуле (1.4), находим

$$K_v(\pm a) = \frac{1}{(\pi a)^{1/2}} \int_{-a}^a \left(\frac{a \pm \tau}{a \mp \tau} \right)^{1/2} v_n(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

При поступательных колебаниях, когда $v_n(x) = v_0$, из (2.2) имеем $K_v(\pm a) = v_0 (\pi a)^{1/2}$. При вращении вокруг центральной оси, когда $v_n(x) = v_0 x/a$, имеем $K_v(\pm a) = \pm^{1/2} v_0 (\pi a)^{1/2}$. Так как задача линейная, то, используя эти два выражения, можно определить КИС суперпозицией для произвольных колебаний пластины как твердого тела. В частности, для угловых колебаний вокруг левой кромки при $v_n(x) = v_0 (1 + x/a)$ будет $K_v(a) = 3/2 v_0 (\pi a)^{1/2}$, $K_v(-a) = 1/2 v_0 (\pi a)^{1/2}$. Для упругих колебаний пластины по форме $v_n(x) = v_0 (x/a)^2$ из (2.2) получим $K_v(\pm a) = 1/2 v_0 (\pi a)^{1/2}$.

В плоской задаче при определении сопротивления на единицу длины пластины интеграл (1.3) будем заменять суммированием по всем острым кромкам $I(v_n) = \Sigma [K_v^2 / (R v_0^2)]^{1/2}$. Так, например, для вращения вокруг центральной оси $I(v_n) = 2 (\pi/4)^{1/2}$ и в (1.2) $k = 3 (\pi/4)^{1/2} = 2,17$, а момент сопротивления

$$M = -1/2 c_D \rho \theta^* 2a^3 |\cos \omega t| \cos \omega t, \quad \theta^* = v_0/a, \quad R = a$$

Способ учета особенностей в жидкости (источники, вихри и др.) известен [5]. Эта задача может быть решена независимо, когда пластина

принимается; неподвижной. Так, если в точке z_0 имеется источник q и вихрь γ , то

$$w(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{z - z_0} - \frac{\bar{\beta}}{z - \bar{z}_0} \right) \frac{1}{(z^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{z - z_0} + \frac{\bar{\alpha}}{z - \bar{z}_0} \right)$$

$$\alpha = (q + i\gamma)/(2\pi), \quad \beta = \alpha (z_0^2 - a^2)^{1/2}$$

Отсюда, вычисляя предел (1.4), получим

$$K_v(\pm a) = (\pi a)^{1/2} \operatorname{Im} [\alpha (z_0^2 - a^2)^{1/2} / (a \mp z_0)] \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) можно использовать в качестве функции Грина для нахождения других решений, в частности (2.2).

Рассмотрим периодическую систему параллельных пластин, имеющих одинаковую форму колебаний (фиг. 1, б). Функция $\zeta = f(z) = \operatorname{th}(\pi z/d)$ имеет период id и отображает полосу $-d/2 < y < d/2$ в плоскости z на полную плоскость ζ с разрезом на действительной оси, т. е. приводит задачу к рассмотренной выше. Используя формулу (2.1) и учитывая свойства конформных отображений, находим

$$w(z) = - \frac{f'(z)}{\pi g(\zeta(z))} \int_{-a}^a \frac{g(\tau(t)) v_n(\tau(t))}{\tau(t) - \zeta(z)} dt \quad (2.4)$$

$$g(\zeta) = [\zeta^2 - \operatorname{th}^2(\pi a/d)]^{1/2}, \quad \tau(t) = \operatorname{th}(\pi t/d)$$

Вычисляя предел (1.4), получим

$$K_v(\pm a) = \frac{1}{[(d/2) \operatorname{sh}(2\pi a/d)]^{1/2}} \int_{-a}^a \left[\frac{\operatorname{th}(\pi a/d) \pm \operatorname{th}(\pi t/d)}{\operatorname{th}(\pi a/d) \mp \operatorname{th}(\pi t/d)} \right]^{1/2} v_n(t) dt \quad (2.5)$$

Если $a/d \ll 1$, то (2.5), приводится к (2.2). При поступательных колебаниях, когда $v_n(x) = v_0$, интеграл в (2.5) вычисляется с использованием теории вычетов:

$$K_v(\pm a) = v_0 [d \operatorname{th}(\pi a/d)]^{1/2} \quad (2.6)$$

Формула (1.2) для определения сопротивления в этом случае применима, если условие (1.1) выполняется не только при $R = a$, но и при $R = d$. При малых d/a нижняя граница допустимых чисел Струхала повышается.

Рассмотрим периодическую систему компланарных пластин, имеющих одинаковую форму колебаний (фиг. 1, в). Воспользуемся функцией $\zeta = f(z) = i \operatorname{tg}(\pi z/d)$, которая имеет период d и отображает полосу $-d/2 < x < d/2$ в плоскости z на полную плоскость ζ с разрезом на действительной оси. В данном случае результаты можно получить из (2.4)–(2.6), если заменить гиперболические функции на соответствующие тригонометрические. Так, при $v_n(x) = v_0$ будет аналогично (2.6) $K_v(\pm a) = v_0 [d \operatorname{tg}(\pi a/d)]^{1/2}$, и, очевидно, эта зависимость справедлива также для колебаний пластины в плоском канале $-d/2 < x < d/2$ с жесткими стенками. Сопротивление пластины в канале выше, чем в безграничной жидкости. Для малых зазоров формула (1.2) применима, если условие (1.1) выполняется и при $R = d/2 - a$.

В качестве приложения рассмотрим колебания плоскости с ребрами под беспредельным слоем жидкости. Предполагается, что ребра расположены равномерно, перпендикулярно плоскости и имеют одинаковую высоту a . Очевидно, что КИС определяется по формуле (2.6). Энергию вихреобразования за период колебаний на единицу длины L и ширины l плоскости можно записать в виде [1],

$$E/(Ll) = B (\operatorname{Re}) \operatorname{Sh}^{-2/3} \rho v_0^2 a [(a/d)/(a v_0^2 / K_v^2)^{-1/3}] \quad (2.7)$$

Из (2.7) находим, что при заданной высоте ребер максимальное сопротивление будет при $d/a = 1,93$. Оказывается, что сопротивление слабо зависит от расстояния между ребрами. На границах диапазона $1 < d/a < 3$ оно всего на 10% меньше максимального.

Замкнутые выражения для КИС можно получить, рассматривая колебания системы из нескольких компланарных пластин, если воспользоваться формулой Келдыша — Седова [5].

Была отмечена [6] математическая аналогия плоских задач гидродинамики и сложного сдвига в теории упругости, поэтому для КИС можно найти аналоги КИН K_{III} продольного сдвига [7].

3. Точные решения пространственной задачи. Рассмотрим колебания плоской пластины в безграничной жидкости. Введем прямоугольную систему координат xuz так, что оси y и z лежат в плоскости пластины. Очевидно, что потенциал скоростей антисимметричен относительно плоскости $x = 0$, поэтому задачу можно сформулировать для полупространства: при $x = 0$ $\partial\phi/\partial x = v_n(y, z)$ в области S внутри контура пластины и $\phi = 0$ вне S . Имеются точные решения этой задачи для круговой и эллиптической области S . Общее решение для круга радиуса a имеет вид [8, 9]

$$v(0, y, z) = - \frac{1}{\pi^2 (y^2 + z^2 - a^2)^{1/2}} \iint_S \frac{(a^2 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2} v_n(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(y - \xi)^2 + (z - \eta)^2}$$

$$y^2 + z^2 > a^2, \quad \xi^2 + \eta^2 \leq a^2$$

Вычисляя предел (1.4), получим

$$K_v(\theta) = \frac{1}{\pi (\pi a)^{1/2}} \iint_S \frac{(a^2 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2} v_n(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(a \cos \theta - \xi)^2 + (a \sin \theta - \eta)^2} \quad (3.1)$$

где θ — полярный угол. Для поступательных колебаний, когда $v_n(y, z) = v_0$, и угловых колебаний вокруг оси z , когда $v_n(y, z) = v_0 y/a$, из (3.1) следует [7]

$$K_v(\theta) = 2v_0 (a/\pi)^{1/2}, \quad K_v(\theta) = 4/3 v_0 (a/\pi)^{1/2} \cos \theta \quad (3.2)$$

соответственно. Теперь можно записать выражение для КИС при любой форме колебаний круглой пластины как твердого тела.

Для колебаний вокруг диаметра, используя K_v из (3.2) и вычисляя интеграл (1.3), находим $I(v_n) = 1,31$. В результате момент сопротивления будет

$$M = -1/2 c_D \rho \theta^2 a^5 |\cos \omega t| \cos \omega t$$

$$c_D = 0,92 \text{Sh}^{1/3}, \quad \theta = v_0/a$$

Сформулированная выше задача для гармонической в полупространстве функции имеет важное значение в механике трещин [9]. При этом на границе полупространства $x = 0$ потенциал скоростей с точностью до постоянного множителя соответствует смещению по x , а нормальная компонента скорости $v_n(y, z)$ — нормальной нагрузке на поверхности трещины — $p(y, z)$. Внутри сред это соответствие не имеет места, но КИН отрыва K_I вычисляется также по формуле (1.4), поэтому при $p(y, z) = -v_n(y, z)$ будет $K_v = K_I$. Это позволяет использовать решения для плоской трещины или для системы компланарных трещин. Некоторые замкнутые выражения КИН K_I для эллиптической области S приведены в [7]. Вследствие установленного соответствия они справедливы и для КИС. В остальных случаях необходимо обращаться к приближенным или чисто численным методам.

4. Применение МГЭ. Воспользовавшись методом взвешенных остатков [10], запишем

$$\int_Q w \nabla^2 \varphi dQ = \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - v_n \right) w d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\varphi - f) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (4.1)$$

где Q — область, занятая жидкостью, Γ_1 — граница, на которой задана нормальная компонента скорости $\partial \varphi / \partial n = v_n$, Γ_2 — граница, на которой заданы значения потенциала $\varphi = f$, n — орт внешней нормали к $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Примем в (4.1) в качестве весовой функции w фундаментальное решение уравнения

$$\nabla^2 w_{ei} = \partial \delta_i / \partial e \quad (4.2)$$

где справа стоит производная по направлению e от δ -функции Дирака в точке i . Дважды интегрируя левую часть равенства (4.1) по частям и используя уравнение (4.2), получим

$$v_{ei} + \int_{\gamma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} w_{ei} d\Gamma = \int_{\gamma_1} (\varphi_+ - \varphi_-) \frac{\partial w_{ei}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\gamma_2} \varphi \frac{\partial w_{ei}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.3)$$

Здесь γ_1 — одна из сторон части границы Γ , взаимодействующей с жидкостью с двух сторон: «положительной» $\gamma_1^+ = \gamma_1$ и «отрицательной» γ_1^- ; φ_+ , φ_- — значения потенциала на γ_1^+ и γ_1^- соответственно. Предполагается, что в жидкости имеются твердые тела с поверхностью γ_2 и бесконечно тонкие пластины с поверхностью $\gamma_1^+ + \gamma_1^-$, при этом $\Gamma = \gamma_1^+ + \gamma_1^- + \gamma_2$. Интеграл по $\gamma_1^+ + \gamma_1^-$ в левой части равенства (4.3) исчезает в силу непрерывности нормальной скорости. Если полные граничные условия известны, то из (4.3) определяются скорости жидкости v_{ei} (первый индекс указывает направление, второй — точку области).

Система уравнений МГЭ получается следующим образом. Граница области $\gamma_1 + \gamma_2$ разбивается на N элементов. На граничном элементе (ГЭ) j функции $u = (\varphi_+ - \varphi_-$ на γ_1 и φ на γ_2) и $\partial \varphi / \partial n$ в простейшем случае принимаются постоянными и равными u_j , v_{nj} , т. е. используется кусочно-постоянная аппроксимация. В центре элемента j согласно (4.2) определяется весовая функция w_{nj} , где n — внешняя нормаль к границе, и уравнение (4.3) записывается для каждого ГЭ. В результате приходим к замкнутой системе линейных алгебраических уравнений

$$v_{ni} + \sum_{j=1}^M v_{nj} \int_{\Gamma_j} w_{ni} d\Gamma + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} \frac{\partial w_{ni}}{\partial n} d\Gamma \quad (4.4)$$

так как N из $2N$ величин u_j , v_{nj} ($j = 1, 2, \dots, N$) заданы граничными условиями.

Здесь Γ_j — граница элемента j , а ГЭ пронумерованы так, что первые M из них принадлежат γ_2 , а остальные — γ_1 . Сингулярные интегралы в (4.4) понимаются в смысле главного значения и определяются как предел при стремлении точки i по нормали к границе изнутри области жидкости.

Принятая аппроксимация не обеспечивает точности решения вблизи острых кромок. Поэтому для получения приемлемых значений КИС используется их связь с кинетической энергией [1], которую представим в виде

$$v_0^2 \partial \mu / \partial n = \rho \int K_v^2 dl \quad (4.5)$$

Вычисляя обобщенную присоединенную массу μ для пластины с размерами, измененными на Δl по нормали к контуру в касательной плоскости, получим оценку $\partial\mu/\partial n$ и интеграла в (4.5). Оказывается, что эта оценка не хуже, чем значения μ . Кроме того, погрешность вычисления μ можно значительно уменьшить применением нелинейного преобразования Шенкса [11, 12]

$$\mu = (\mu_1\mu_3 - \mu_2^2)/(\mu_1 + \mu_3 - 2\mu_2) \quad (4.6)$$

если имеется возможность провести расчеты и получить ряд значений μ_1 , μ_2 , μ_3 на геометрически подобных сетках, начиная с грубого разбиения на ГЭ.

Из (4.5) может быть определен только один параметр, как в плоской задаче, когда $K_v(l) = \text{const}$. В пространственных задачах численное определение КИС по формуле (1.4), имея высокую погрешность, все же верно отражает вид изменения $K_v(l)$ по контуру пластины и приводит задачу к одному параметру, который находится из (4.5). Такая процедура может применяться к части контура, например для одной стороны прямоугольной пластины.

Заметим, что в ряде случаев зависимость (4.5) дает удобный способ аналитического определения КИС. Покажем это на примере рассмотренных выше колебаний круглой пластины вокруг диаметра. Очевидно, что в этом случае $K_v(\theta) = C \cos \theta$, а присоединенный момент инерции жидкости [13] $J = (16/45) \rho a^5$. Подставляя J и K_v в (4.5), находим $C = = 4/3 \theta^* (a^3/\pi)^{1/2}$.

5. Численное решение плоских задач. Для ограниченной области жидкости одинаково эффективно применение МКЭ и МГЭ. В МКЭ матрицы имеют большую размерность, но являются ленточными. В МГЭ задача сводится к одномерной, матрицы имеют меньшую размерность, но являются полностью заполненными. Для неограниченной области жидкости использование МГЭ предпочтительнее. Так как применение МКЭ в гидромеханике хорошо известно [14], то ниже рассмотрим только алгоритм МГЭ.

Введем прямоугольные системы координат xu и $\xi\eta$, связанные с ГЭ i и j , которые являются прямыми отрезками, аппроксимирующими контур l (фиг. 2, а). Обозначим: R — радиус-вектор из центра ГЭ i , θ — угол между R и осью η , ψ — угол между осями x и η . Из (4.2) находим

$$w_{ni} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x}{R^2}, \quad \frac{\partial w_{ni}}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\psi - 2\theta)}{R^2} \quad \text{на } \Gamma_j \quad (5.1)$$

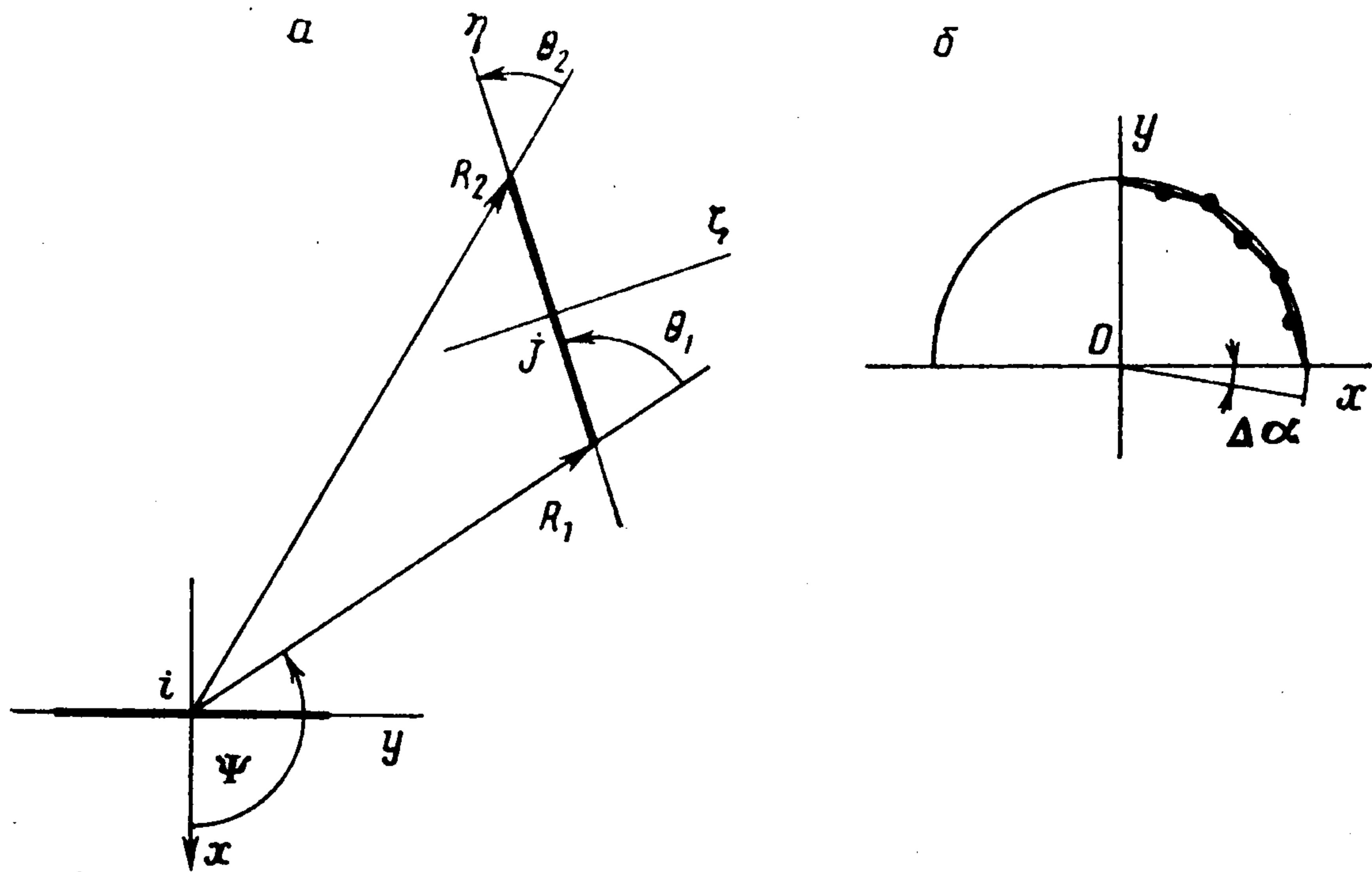
Интегралы от функций (5.1), входящие в уравнения (4.4), вычисляются аналитически

$$\int_{\Gamma_j} w_{ni} d\Gamma = \frac{\sin \psi}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{\cos \psi}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

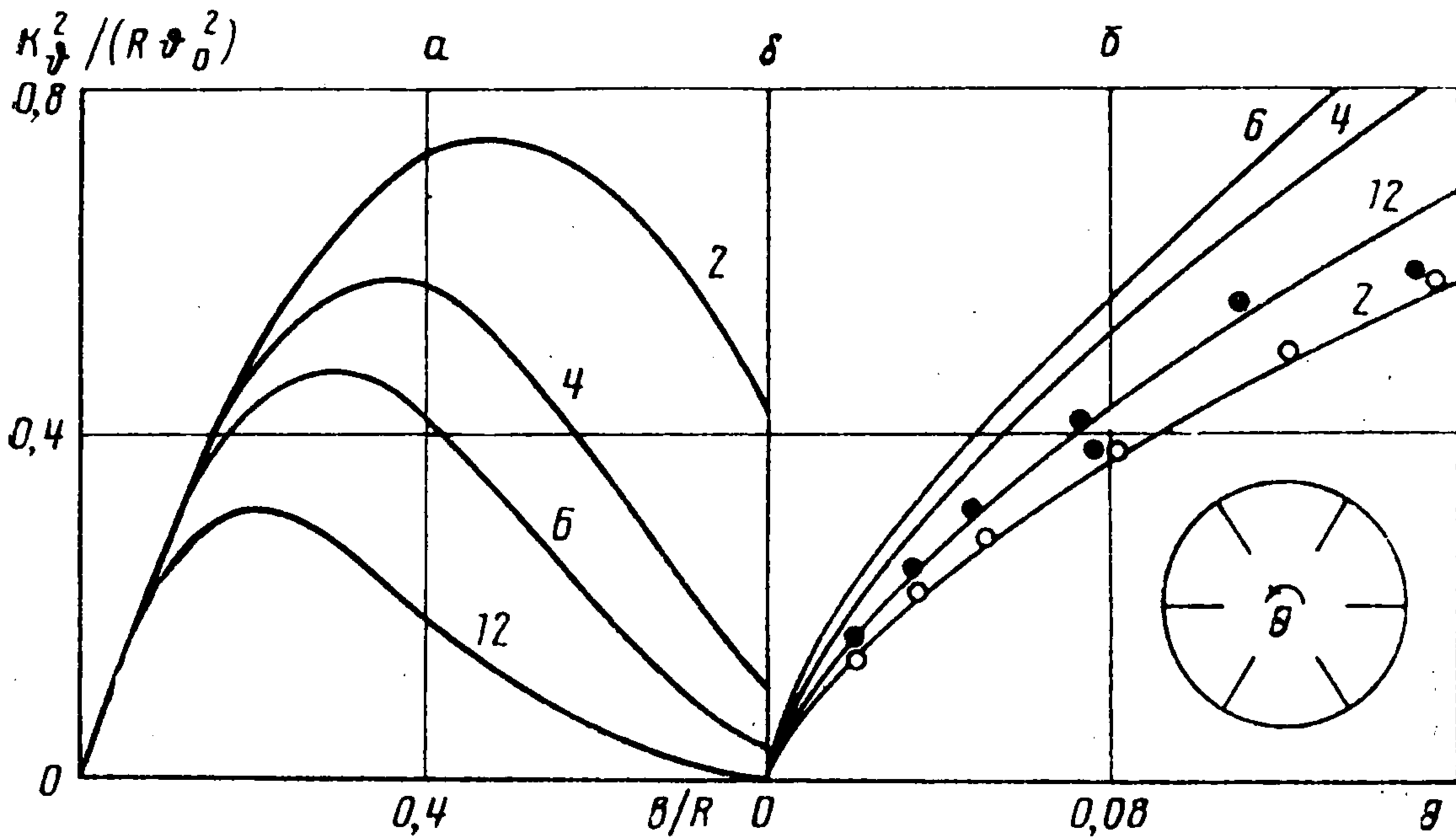
$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial w_{ni}}{\partial n} d\Gamma = \frac{\sin(\psi - \theta_1 - \theta_2)}{2\pi} \left(\frac{\cos \theta_1}{R_2} - \frac{\cos \theta_2}{R_1} \right) \quad (5.2)$$

Используемые в (5.1), (5.2) обозначения показаны на фиг. 2. Уравнения (4.4) и соотношения (5.2) дают весьма эффективный алгоритм решения плоской задачи для произвольной области и легко программируются.

В качестве примера приведем расчет колебаний в безграничной жидкости пластины с сечением в форме дуги полуокружности вдоль плоскости симметрии (фиг. 2, б). Учитывая симметрию, на ГЭ разбивали половину дуги. При вычислении КИС по формуле (4.5) принимали изменение угла полураствора дуги $\pm 0,01$. Результаты представлены в табл. 1, где в скобках даны уточнения по формуле (4.6). Сравнивая их с аналитическим решением $\mu/(\rho a^2) = 3\pi/2$ и $K_v^2/(a v_0^2) = \pi/2$, видим, что использование небольшого числа ГЭ позволяет получить достаточно точные значения. Это имеет важное значение при решении пространственных задач.



Фиг. 2



Фиг. 3

Рассмотрим задачу о демпфировании колебаний вокруг продольной оси круговой цилиндрической емкости с плоским дном, заполненной жидкостью, при наличии в ней равномерно расположенных радиальных ребер (фиг. 3). При исследовании [15] общей задачи о движении твердого тела с плоскостью, содержащей жидкость малой вязкости, предполагалось, что стенки полости достаточно гладкие. В окрестности острых кромок концепция пограничного слоя неприменима. При характерных размерах полости порядка 1 м вихревое демпфирование, связанное с обтеканием острых кромок ребер, на порядок и более выше демпфирования, обусловленного пристеночным пограничным слоем.

Обозначим: R — радиус полости, b — ширина ребер, H — высота жидкости, θ — амплитуда угла поворота вокруг продольной оси. Принимая $v_0 = R\omega\theta$ и учитывая одинаковый характер обтекания всех ребер, зависимость для декремента колебаний [1] представим в виде

$$\delta = k\theta^{2/3}, \quad k = \frac{NB(\text{Re})\rho HR^4}{I_0 + IH} \left(\frac{K_v^2}{Rv_0^2} \right)^{1/3} \quad (5.3)$$

где N — количество ребер, I — присоединенный момент инерции единичного слоя жидкости, I_0 — момент инерции емкости без жидкости.

Приведем решение задачи МКЭ. Учитывая симметрию полости, расчеты выполнялись для одного сектора. Использовалось до 2000 линейных треугольных элементов. Полученные значения I согласуются с приведенными в [16, 17]. Результаты определения КИС представлены на фиг. 3, а рядом линий, числом возле которых указано количество ребер. Используя эти зависимости в (5.3), можно выбрать ширину и число ребер, необходимые для обеспечения требуемого демпфирования.

Число ГЭ	4	8	16	32
$\mu/(\rho a^2)$	4,958	4,850	4,785 (4,689)	4,749 (4,705)
$K_v^2/(a v_0^2)$	1,448	1,525	1,551 (1,565)	1,562 (1,571)

Таблица 2

a/b	1	2	3	4
c_m , МГЭ	0,578	0,756	0,831	0,871
c_m , [18]	0,557	0,742	0,828	0,873
k_x , МГЭ	4,64	5,30	5,72	5,98

Приведем сравнение с экспериментальными данными, полученными Г. А. Чуриловым для полости с $R = 0,35$ м, $b/R = 0,3$, $I_0/(\rho H R^4) = 0,884$. Для этого случая теоретические зависимости (5.3) представлены на фиг. 3, б рядом линий. Максимальное демпфирование получено при 6 ребрах. При 4 и 8 ребрах демпфирование практически одинаковое и представлено одной линией. Экспериментальные результаты показаны светлыми точками для 2 ребер и темными для 4 ребер. Согласование расчетных и экспериментальных данных при 2 ребрах хорошее. Для полости с 4 ребрами расчетная линия проходит заметно выше, что может быть связано с влиянием свободной поверхности жидкости и образующихся при больших амплитудах колебаний крупномасштабных вихрей. Если ребра имеют малую ширину $b/R < 0,1$, то можно пользоваться результатами решения задачи о колебаниях плоскости с ребрами под беспредельным слоем жидкости.

6. Решение пространственной задачи МГЭ. Введем системы прямоугольных координат $x y z$ и $\xi \eta \zeta$ с началом в центре ГЭ i и j так, что оси x и ξ направлены вдоль соответствующих нормалей. Из (4.2) следует

$$w_{ni} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x}{R^3}, \quad \frac{\partial w_{ni}}{\partial n} = \nabla w_{ni} \frac{\partial R}{\partial \xi} \quad \text{на } \Gamma_j$$

Ограничимся ниже рассмотрением колебаний плоской пластины в безграничной жидкости. В этом случае поверхность γ_2 отсутствует (в (4.4) $M = 0$), а интеграл

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial w_{ni}}{\partial n} d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{d\theta}{r}$$

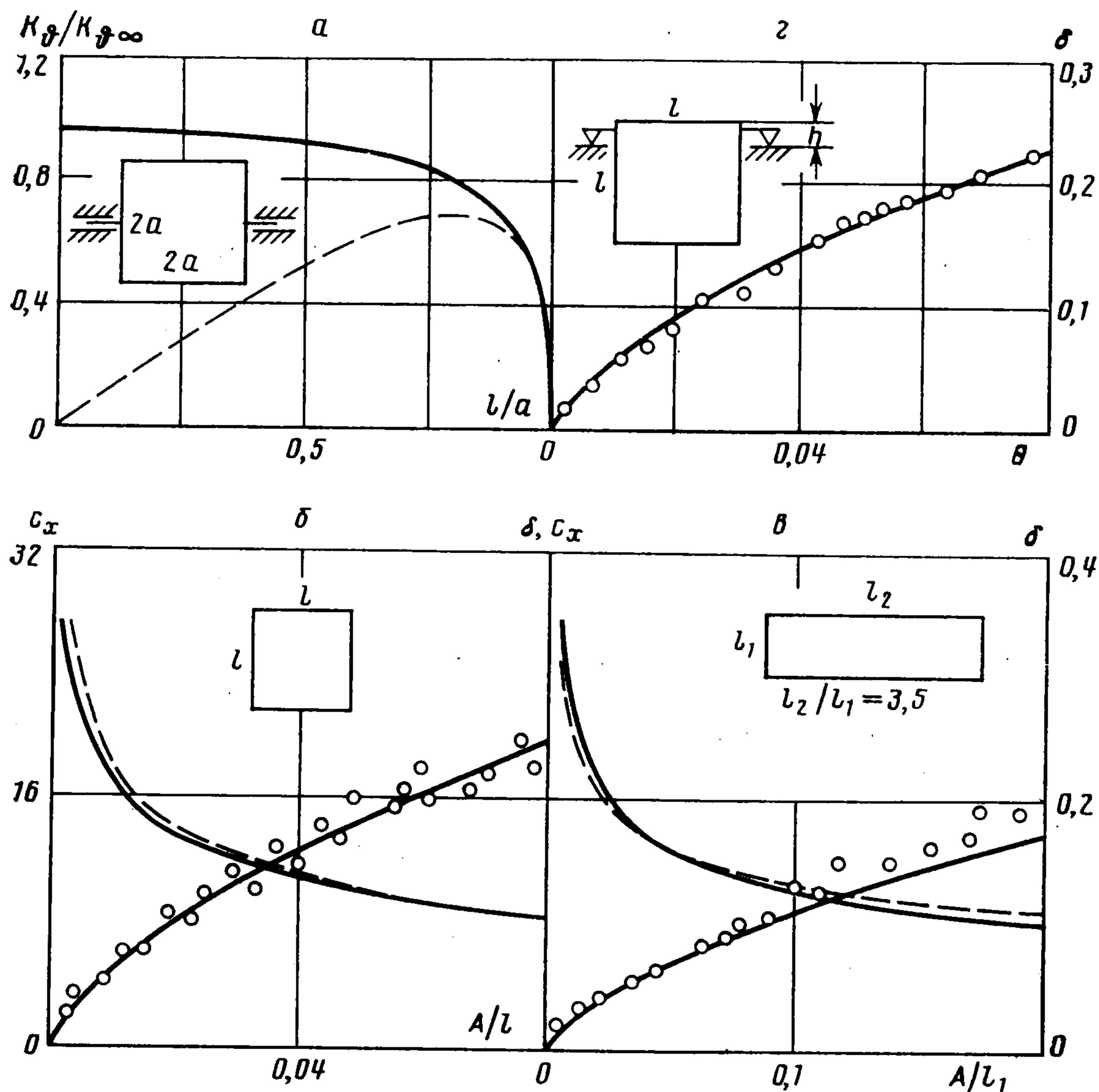
для треугольных и прямоугольных кусочно-постоянных ГЭ легко вычисляется в аналитическом виде в цилиндрической системе координат $x r \theta$, связанной с точкой i .

Исследовались поступательные колебания прямоугольной пластины с размерами сторон $2a$ и $2b$ ($a \geq b$) перпендикулярно ее плоскости. Расчеты проводились для четверти пластины. Использовалось до 256 ГЭ. При определении различных величин применялись зависимости (4.5), (4.6).

Для удобства представления результатов расчетов введем коэффициент присоединенной массы $c_m = \mu/(2\pi \rho b^2 a)$ и коэффициент сопротивления на единицу площади S $c_x = c_D R^2/S = k_x \text{Sh}^{1/2}$ ($\text{Sh} = b\omega/v_0$), где, согласно (1.2), $k_x = kR^2/S$.

В табл. 2 приведены значения c_m , полученные МГЭ и по эмпирической формуле [18], аппроксимирующей экспериментальные данные, и полученные МГЭ значения k_x . Расчетные и экспериментальные данные по c_m хорошо согласуются. Для пластины бесконечного размаха ($a \rightarrow \infty$) $c_m = 1$, $k_x = 6,9$. Чем меньше длина пластины, тем ниже c_m и k_x , и для квадратной пластины они составляют 58% и 66% соответственно от их предельных значений. Зависимости $K_v(l)$ по длине сторон пластины можно найти в [7, 19], принимая во внимание, что $K_v/v_0 = -K_I/p$.

Исследовались колебания пластины вокруг средней линии (вращение), параллельной стороне a . Использовалось до 256 ГЭ на четверть пластины. На фиг. 4, а в качестве примера приведены полученные МГЭ зависимости $K_v(l)$ вдоль сторон квадратной пластины: параллельной оси вращения — сплошная линия, перпендикулярной оси вращения — штриховая линия, причем l отсчитывается от середины



Фиг. 4

соответствующей стороны. Для пластины бесконечного размаха выше получено $K_{r\infty} = = 1/2 (\pi b)^{1/2}$.

Представим момент силы сопротивления в виде

$$M = -1/2 c_{\theta} \rho \theta^2 S b^3 |\cos \omega t| \cos \omega t$$

где θ — амплитуда угловой скорости. При этом $c_{\theta} = k_{\theta} Sh^{1/3}$, $k_{\theta} = kb^2/S$, а коэффициент k определяется по формулам (1.2), (1.3), в которых полагаем $R = b$, $v_0 = = b\omega\theta = b\theta'$, и, следовательно, $Sh^{-1} = \theta$. Коэффициент присоединенной массы определим через присоединенный момент инерции жидкости J_f по формуле]

$$c_m = 8J_f/(\pi r b^4 a).$$

Ниже приведены значения c_m и k_{θ} для некоторых отношений сторон пластины

a/b	0,25	0,5	0	2	4
c_m	0,455	0,653	0,810	0,898	0,945
k_{θ}	0,830	0,884	0,960	1,012	1,043

Для пластины бесконечного размаха $J_f = \pi r b^4/8$ и $k = 2,174$, что соответствует $c_m = 1$ и $k_{\theta} = 1,087$.

7. Экспериментальное исследование сопротивления колебаний [прямоугольных пластин. Проводились испытания прямоугольных панелей в воздушной среде. Были выбраны квадратная пластина со стороной $l = 1,35$ м и прямоугольная пластина со сторонами $l_1 = 0,5$ м и $l_2 = 1,85$ м, изготовленные из листа АмГ-6 толщиной 1,5 мм. С целью исключения изгибных деформаций они подкреплялись трапециевидным профилем высотой 7 мм, однако на расстоянии 90—100 мм от кромок оставлялись гладкими. Пластины вывешивались вертикально так, чтобы свести к минимуму влияние трения в подвесе, которое в последующем все равно исключалось путем проведения дополнительных специальных испытаний. Подбором пружин частота колебаний в разных сериях испытаний изменялась от 0,39 Гц до 1,3 Гц. По измерению силы тензодатчиками, связанными с одной из пружин, регистрировались свободные затухающие колебания пластины на подвесе. Обработкой осциллограмм определялась зависимость логарифмического декремента затухания от амплитуды колебаний.

Представление зависимости декремента от амплитуды в логарифмическом масштабе показывает, что экспериментальные данные хорошо ложатся на прямую, исключая амплитуды меньше 2—4 толщин пластины; при которых велика и погрешность измерений. Это свидетельствует о степенной зависимости декремента от амплитуды. При теоретической величине показателя степени 2/3 для него получались значения от 0,65 до 0,77. По известной зависимости декремента от амплитуды колебаний вычислялся коэффициент сопротивления, для чего в испытаниях дополнительно определялась обобщенная масса μ .

Для колебаний квадратной пластины перпендикулярно ее плоскости на фиг. 4, б представлены экспериментальные зависимости декремента δ (точки) и полученная ее обработкой зависимость коэффициента сопротивления c_x (штриховая линия) от относительной амплитуды колебаний $A/l = v_0/(\omega l)$. Сплошными линиями показаны результаты расчетов. Теоретическая зависимость для c_x соответствует значению k в табл. 2 при $a/b = 1$. Декремент колебаний рассчитывался по формуле [2] $\delta = D \text{Sh}^{-2/3}$, $D = B (\text{Re}) I(v_n) \rho R^3/\mu$, $\text{Sh} = \omega R/v_0 = R/A$, $R = l$. При этом принималось $\rho = 1,293 \text{ кг/м}^3$ (воздух) и $\mu = 11,74 \text{ кг}$. Масса пластины вместе с присоединенной массой воздуха μ была определена из опыта. По коэффициенту сопротивления декремент можно вычислить, используя связь $D/k_x = 4\rho R S/(3\mu)$.

Аналогичные результаты для прямоугольной панели представлены на фиг. 4, в. Теоретические зависимости здесь получены путем линейной интерполяции значений k_x из табл. 2 при $a/b = 3$ и $a/b = 4$ и при $\mu = 7,355 \text{ кг}$.

Угловые колебания квадратной пластины в эксперименте были реализованы вокруг оси, отстоящей вниз от верхней кромки на расстояние $h = 85 \text{ мм}$. Экспериментальная зависимость декремента колебаний от амплитуды угла θ представлена на фиг. 4, г точками, а расчетная — сплошной линией. Момент инерции пластины при учете присоединенной массы воздуха $J = 4,627 \text{ кг м}^2$. Необходимые для расчета значения КИС на кромках пластины были получены с использованием принципа суперпозиции

$$K_v = \left(1 - \frac{l}{2R}\right) K_{v1} + \frac{l}{2R} K_{v2}, \quad R = l - h$$

где K_{v1} , K_{v2} — полученные в разд. 6 КИС для поступательных колебаний и угловых колебаний относительно средней линии. При этом используется характерный размер $a = l/2$. Поэтому, если принять $v_0 = R\omega\theta$, то в зависимости для декремента колебаний $\delta = D \text{Sh}^{-2/3}$ коэффициент $D = B (\text{Re}) \rho a^3 R^2 I(v_n)/J$ и $\text{Sh} = \omega a/v_0 = a/(R\theta)$. Вычисления по формуле (1.3) дают $I(v_n) = 2,938$.

Видно, что во всех случаях согласование расчетных и экспериментальных данных удовлетворительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бужинский В. А. Вихревое сопротивление пластинки при колебаниях в маловязкой жидкости // ПММ. 1990. Т. 54. вып. 2. С. 233—238.
2. Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 3. P. 361—364.
3. Graham J. M. R. The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 1980. V. 97. Pt 2. P. 331—346.
4. De Bernardinis B., Graham J. M. R., Parker K. H. Oscillatory flow around disks and through orifices // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 279—299.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинками. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с.
8. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
9. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
10. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Бужинский В. А., Сталбецов В. И. Определения гидродинамических характеристик полости, частично заполненной жидкостью, имеющей внутри маятник // Изв. АН СССР. МЖГ. 1937. № 6. С. 91—100.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
14. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 263 с.

15. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
16. Докучаев Л. В. О присоединенном моменте инерции жидкости в цилиндре с перегородками, вращающемся около продольной оси // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 2. С. 168—171.
17. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
18. Римап И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы // Тр. ЦАГИ. 1947. № 635. 45 с.
19. Weaver J. Three-dimensional crack analysis // Intern. J. Solids and Struct. 1977. V. 13. № 4. P. 321—330.

Москва

Поступила в редакцию
11.IV.1990