

УДК 532.72 : 534.2

© 1991 г.

Н. А. Гумеров

О СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ РАДИУСА ПАРОВОГО ПУЗЫРЯ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Исследуются нелинейные эффекты тепломассообмена парового пузыря с окружающей жидкостью при периодических колебаниях давления, вызываемых акустической волной, длина которой существенно превышает радиус пузыря. На основе замкнутой системы уравнений, описывающей сферически-симметричные процессы около одиночного пузыря [1], методом многих масштабов [2, 3] получены асимптотические уравнения, описывающие поведение среднего радиуса пузыря в квадратичном по амплитуде поля приближении.

Линейные и слабонелинейные колебания паровых пузырей в акустических полях изучались в ряде работ, основные результаты которых изложены в монографиях [1, 4]. Наиболее полное исследование «эффекта выпрямленной теплопередачи» для паровых пузырей, означающего изменение среднего радиуса пузыря за время, равное большому числу периодов колебаний, вследствие нелинейности тепломассообмена, представлено в [4]. В отличие от предыдущих работ по «выпрямленной теплопередаче» в данной статье последовательно учитываются неравновесность фазовых переходов, оказывающая в определенном диапазоне параметров существенное влияние на динамику среднего радиуса пузыря, и температурная неоднородность пара в пузыре. Кроме того, применение метода многих масштабов позволило обосновать некоторые допущения, принимаемые ранее при выводе уравнения динамики среднего радиуса пузыря методом усреднения [4, 5].

1. Постановка задачи. Будем изучать поведение сферического парового пузыря, расположенного в безграничном пространстве, занятом идеальной несжимаемой жидкостью, когда давление на бесконечности p_∞ периодически изменяется около равновесного значения $p_* = p_s(T_*)$, $T_* = T_\infty$ (T — температура, индекс s означает параметры на линии насыщения, звездочка — параметры невозмущенного состояния)

$$p_\infty = p_* (1 + \varepsilon \varphi(t)), \quad \varphi(t) = \varphi(t + 2\pi/\omega), \quad |\varphi| \leq 1 \quad (1.1)$$

где φ — периодическая функция, представимая в виде ряда Фурье, ω — циклическая частота, t — время, ε — относительная амплитуда возмущения, которая считается малым параметром $\varepsilon \ll 1$.

В широком классе задач, связанных с нелинейной неравновесной динамикой паровых пузырей, можно пренебречь поверхностным натяжением и скачком температуры на межфазной поверхности, пар полагать идеальным совершенным газом, принять условие гомобаричности газа и считать процессы около пузыря сферически-симметричными [1]. При этом замкнутая система уравнений и граничных условий, описывающая тепломассообмен пузыря с жидкостью в поле переменного давления, может быть представлена в виде [1]

$$\begin{aligned} p_g(t) &= R_g T_g(r, t) \rho_g(r, t), \quad \rho_l = \text{const} \\ \rho_l c_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + w_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) &= \lambda_l \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) \\ \rho_g c_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + w_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) &= \lambda_g \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_g}{\partial r} \right) + \frac{dp_g}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_l &= w_{la} \frac{a^2}{r^2}, \quad w_g = \frac{\gamma-1}{\gamma p_g} \lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} - \frac{r}{3\gamma p_g} \frac{dp_g}{dt} \\
w_{la} &= \frac{da}{dt} - \frac{\xi}{\rho_l}, \quad w_{ga} = \frac{da}{dt} - \frac{\xi}{\rho_{ga}} \\
a \frac{dw_{la}}{dt} + \left(2 \frac{da}{dt} - \frac{1}{2} w_{la} \right) w_{la} &= \frac{p_g - p_\infty}{\rho_l} \\
w_{ga} &= -\frac{\gamma-1}{\gamma p_g} q_g - \frac{k}{3\gamma p_g} \frac{dp_g}{dt} \\
q_g - q_l &= \xi l, \quad q_g = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad q_l = -\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=a} \\
\xi &= \frac{\beta [p_s(T_a) - p_g]}{\sqrt{2\pi R_g T_a}}, \quad p_s(T) = p_* \exp \left[\frac{1}{k_s} \left(1 - \frac{T_*}{T} \right) \right], \quad k_s = \frac{R_g T_*}{l} \\
T_g \Big|_{r=a} &= T_l \Big|_{r=a} = T_a, \quad \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad T_l \Big|_{r=\infty} = T_*
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь r — радиальная координата, отсчитываемая от центра пузыря; ρ , w , q , ξ — плотность, радиальная скорость, тепловой поток на границе и интенсивность испарения, отнесенная к единице поверхности, a — радиус пузыря, γ , R_g , l , c , λ — величины, считающиеся постоянными, — показатель адиабаты газа, газовая постоянная, удельная теплота парообразования, теплоемкость (для газа — при постоянном давлении) и теплопроводность, $\beta(p_g, T_a)$ — коэффициент аккомодации, зависимость которого от давления и температуры полагается известной. Индексы g и l относятся соответственно к газу и к жидкости, параметры на межфазной границе снабжены индексом a .

2. Метод решения. Уравнения теплопроводности (1.2) при пространственно-временном преобразовании $(r, t) \rightarrow (\eta, t)$, где $\eta = r/a(t)$ ($\partial/\partial r \rightarrow a^{-2}\partial/\partial\eta$, $\partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t - (a^{-1}da/dt)\eta\partial/\partial\eta$) сводятся к задачам в областях с фиксированной границей. Радиальные скорости w_l , w_g , w_{ga} и плотность газа ρ_g выражаются через прочие неизвестные, которые представляются в виде асимптотических рядов:

$$\begin{aligned}
T_a &= T_* (\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots), \quad T_\alpha = T_* (u_0^{(\alpha)} + \varepsilon u_1^{(\alpha)} + \varepsilon^2 u_2^{(\alpha)} + \dots) \\
a &= a_0 (1 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots), \quad w_{la} = \kappa_g a_0^{-1} (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots) \\
p_g &= p_* (p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots), \quad q_\alpha = \lambda_\alpha T_* a^{-1} (q_0^{(\alpha)} + \\
&\quad + \varepsilon q_1^{(\alpha)} + \varepsilon^2 q_2^{(\alpha)} + \dots)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\xi = \rho_{g*} \kappa_g a_0^{-1} (j_0 + \varepsilon j_1 + \varepsilon^2 j_2 + \dots), \quad \alpha = g, l \quad (\kappa_\alpha = \lambda_\alpha \rho_{\alpha*}^{-1} c_\alpha^{-1}) \quad \blacksquare$$

Процедура построения равномерно-пригодных разложений методом многих масштабов [2] аналогична описанной в [3]. Функциональная зависимость неизвестных от t рассматривается как зависимость от набора времен $\{t_k\}$, $t_k = \varepsilon^k t$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и оператор дифференцирования по t раскладывается в асимптотический ряд:

$$d/dt = \partial/\partial t_0 + \varepsilon \partial/\partial t_1 + \varepsilon^2 \partial/\partial t_2 + \dots \tag{2.2}$$

Функцию $\varphi(t)$ из (1.1) следует считать функцией только от «быстрого» времени t .

Подставляя соотношения (1.1), (2.1), (2.2) в (1.2) и собирая члены при одинаковых степенях ε , можно видеть, что $u_0^{(\alpha)} \equiv 1$, $q_0^{(\alpha)} \equiv 0$ ($\alpha = l, g$), $p_0 \equiv \theta_0 \equiv 1$, $w_0 \equiv j_0 \equiv 0$, $a_0 = a_0(t_1, t_2, \dots)$, а для определения m -го

($m > 0$) приближения получается линейная неоднородная система

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{\partial u_m^{(l)}}{\partial t_0} - \frac{k_\kappa}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial u_m^{(l)}}{\partial \eta} \right) &= f_m^{(l)} \\ \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left(\frac{\partial u_m^{(g)}}{\partial t_0} - k_\gamma \frac{\partial p_m}{\partial t_0} \right) - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial u_m^{(g)}}{\partial \eta} \right) &= f_m^{(g)} \\ u_m^{(l)}|_{\eta=1} = u_m^{(g)}|_{\eta=1} = \theta_m, \quad u_m^{(l)}|_{\eta=\infty} = 0, \quad \partial u_m^{(g)}/\partial \eta|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{a_0^2}{\kappa_g} \frac{\partial a_m}{\partial t_0} - k_\rho j_m - w_m = f_m^{(a)}, \quad \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left(\frac{1}{3\gamma} \frac{\partial p_m}{\partial t_0} + \frac{\partial a_m}{\partial t_0} \right) + q_m^{(g)} - j_m = f_m^{(p)} \\ \tau_w \partial w_m / \partial t_0 - p_m = f_m^{(w)}, \quad j_m - a_0 d_\sigma^{-1} (\theta_m - k_s p_m) = f_m^{(\theta)} \\ q_m^{(\alpha)} = -\partial u_m^{(\alpha)} / \partial \eta|_{\eta=1}, \quad \alpha = g, l, \quad k_s k_\gamma^{-1} (q_m^{(g)} - k_\lambda q_m^{(l)}) - j_m = f_m^{(j)} \\ k_\gamma = 1 - 1/\gamma, \quad k_\rho = \rho_{g*} / \rho_l, \quad k_\lambda = \lambda_l / \lambda_g, \quad k_\kappa = \kappa_l / \kappa_g \\ d_\sigma = \kappa_g \sqrt{2\pi R_g T_* / (\beta_* l)}, \quad \tau_w = \kappa_g \rho_l / p_*, \quad \beta_* = \beta(p_*, T_*) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $f_m^{(\alpha)}$ — функции, зависящие от низших, чем m , приближений ($\alpha = l, g, a, w, p, j, \theta$).

Рассмотрим условие существования решений (2.3) в классе t_0 -периодических функций, т. е. функций, представимых в виде ряда Фурье по «быстрому» времени [3]

$$x(t_0, t_1, t_2, \dots) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x_n^0(t_1, t_2, \dots) e^{in\omega t_0} \right\} \quad (2.4)$$

где x_n^0 — комплексная амплитуда. В этом случае для комплексных амплитуд в m -м приближении получаются системы типа (2.3) с множителем $i\omega n$ вместо оператора $\partial/\partial t_0$.

Решение неоднородных задач теплопроводности для комплексных амплитуд температур в жидкости и в газе при условии, что соответствующие интегралы сходятся, имеет вид [3]

$$\begin{aligned} u_{mn}^{(l)0} &= \eta^{-1} [A_{mn} e_n^-(\eta) + G_{mn}^{(l)}(\eta)] \\ u_{mn}^{(g)0} &= k_\gamma p_{mn}^0 + \eta^{-1} [B_{mn} S_n(\eta) + G_{mn}^{(g)}(\eta)] \\ A_{mn} &= \theta_{mn}^0 - G_{mn}^{(l)}(1), \quad B_{mn} = (\theta_{mn}^0 - G_{mn}^{(g)}(1) - k_\gamma p_{mn}^0) / S_n(1) \\ G_{mn}^{(l)}(\eta) &= \frac{1}{2} (k_\kappa / s_n)^{1/2} \left[e_n^-(\eta) \int_1^\eta e_n^+(x) x f_{mn}^{(l)0}(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + e_n^+(\eta) \int_\eta^\infty e_n^-(x) x f_{mn}^{(l)0}(x) dx \right] \\ G_{mn}^{(g)}(\eta) &= s_n^{-1/2} \int_0^\eta [C_n(\eta) S_n(x) - S_n(\eta) C_n(x)] x f_{mn}^{(g)0}(x) dx \\ e_n^\pm(\eta) &= e^{\pm(\eta-1)\sqrt{s_n/k_\kappa}}, \quad S_n(\eta) = \operatorname{sh}(\eta\sqrt{s_n}), \quad C_n(\eta) = \operatorname{ch}(\eta\sqrt{s_n}) \\ s_n &= i\omega n a_0^2 / \kappa_g, \quad \operatorname{Re}\{\sqrt{s_n}\} \geq 0 \\ q_{mn}^{(l)0} &= h_n^{(l)} \theta_{mn}^0 - k_\kappa^{-1} F_{mn}^{(l)}, \quad h_n^{(l)} = 1 + (s_n/k_\kappa)^{1/2} \\ q_{mn}^{(g)0} &= -h_n^{(g)} (\theta_{mn}^0 - k_\gamma p_{mn}^0) + F_{mn}^{(g)}, \quad h_n^{(g)} = \sqrt{s_n} \operatorname{cth} \sqrt{s_n} - 1 \\ F_{mn}^{(l)} &= \int_1^\infty \eta f_{mn}^{(l)0} e_n^-(\eta) d\eta, \quad F_{mn}^{(g)} = [S_n(1)]^{-1} \int_0^1 \eta f_{mn}^{(g)0} S_n(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом из (2.3)–(2.5) следует, что в m -м приближении неизвестные комплексные амплитуды удовлетворяют линейному неоднородному

алгебраическому уравнению

$$L_n X_{mn} = Y_{mn} \quad (2.6)$$

$$L_n = \begin{vmatrix} s_n & -1 & 0 & 0 & -k_\rho \\ 0 & \kappa_g a_0^{-2} s_n \tau_w & -1 & 0 & 0 \\ s_n & 0 & \frac{1}{3} \gamma^{-1} s_n + k_\gamma h_n^{(g)} & -h_n^{(g)} & -1 \\ 0 & 0 & a_0 d_\sigma^{-1} k_s & -a_0 d_\sigma^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & k_s h_n^{(g)} & -k_s k_\gamma^{-1} (h_n^{(g)} + k_\lambda h_n^{(l)}) & -1 \end{vmatrix}$$

$$X_{mn} = (a_{mn}, w_{mn}, p_{mn}, \theta_{mn}, j_{mn})^T$$

$$Y_{mn} = (f_{mn}^{(a)0}, f_{mn}^{(w)0}, f_{mn}^{(p)0} - F_{mn}^{(g)}, f_{mn}^{(\theta)0}, f_{mn}^{(j)0} - k_s k_\gamma^{-1} [F_{mn}^{(g)} + k_\lambda k_\gamma^{-1} F_{mn}^{(l)}])^T$$

Здесь индекс T означает транспонирование.

Ранее [6, 7] рассматривалась задача о стационарных пульсациях пузыря в монохроматическом акустическом поле; было отмечено, что решения существуют при любых частотах $\omega \neq 0$, то есть при $s_n \neq 0$ имеем $\det L_n \neq 0$ и решение X_{mn} существует и единственно. При $n = 0$ матрица системы вырождается, причем $\text{rank } L_0 = 4$. Необходимым и достаточным условием существования решения в этом случае будет $\text{rank } (L_0 | Y_{m0}) = 4$, где $(L_0 | Y_{m0})$ — расширенная матрица системы в m -м приближении при $n = 0$. Это условие в развернутой форме имеет вид

$$-(1 + \delta_\sigma a_0^{-1}) f_{m0}^{(p)0} = k_s^2 k_\gamma^{-1} k_\lambda f_{m0}^{(w)0} + \delta_\sigma a_0^{-1} f_{m0}^{(\theta)0} - f_{m0}^{(j)0} + k_s k_\lambda (k_\gamma k_\lambda)^{-1} F_{m0}^{(l)} - (1 - k_s k_\gamma^{-1} + \delta_\sigma a_0^{-1}) F_{m0}^{(g)} \quad (2.7)$$

$$F_{m0}^{(l)} = \lim_{s_n \rightarrow 0} F_{mn}^{(l)} = \int_1^\infty \eta f_{m0}^{(l)0} d\eta, \quad F_{m0}^{(g)} = \lim_{s_n \rightarrow 0} F_{mn}^{(g)} = \int_0^1 \eta^2 f_{m0}^{(g)0} d\eta, \quad \delta_\sigma = \frac{k_s k_\lambda}{k_\gamma} d_\sigma$$

Таким образом, решение системы в классе t_0 -периодических функций существует только тогда, когда выполнено условие (2.7). В последнем случае такое решение единственно с точностью до решения однородной системы (2.3)

$$a_m = a_m(t_1, t_2, \dots), \quad w_m = p_m \equiv \theta_m \equiv j_m \equiv 0, \quad u_m^{(l)} \equiv 0, \quad u_m^{(g)} \equiv 0$$

3. Первое приближение. Из (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) следует, что в первом приближении ($m = 1$)

$$f_1^{(\alpha)} \equiv 0, \quad \alpha = l, g, \theta, j; \quad f_1^{(a)} = f_1^{(p)} = -a_0 \kappa_g^{-1} \partial a_0 / \partial t_1; \quad f_1^{(l)} = -\varphi \quad (3.1)$$

Условие существования t_0 -периодических решений дает

$$(a_0 + \delta_\sigma) \partial a_0 / \partial t_1 = -k_s^2 k_\gamma^{-1} k_\lambda \kappa_g \varphi_0^\circ \quad (3.2)$$

Интегрируя по t_1 , получим

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \delta_\sigma a_0 = -k_s^2 k_\gamma^{-1} k_\lambda \kappa_g \varphi_0^\circ t_1 + C(t_2, t_3, \dots) \quad (3.3)$$

Пусть условие (3.2) выполнено. При $n \neq 0$, как следует из (3.1), вектор неоднородности в (2.6) равен $Y_{1n} = (0, -\varphi_n^\circ, 0, 0, 0)^T$. Отсюда, пользуясь правилом Крамера, найдем

$$\alpha_{1n}^\circ = -\varphi_n^\circ \Delta_n^{(\alpha)} / \Delta_n, \quad \alpha = a, w, p, \theta, j; \quad \Delta_n = \det L_n \quad (3.4)$$

$$\Delta_n^{(a)} = [a_0 d_\sigma^{-1} k_\gamma (1 - k_s k_\gamma^{-1})^2 + \frac{1}{3} \gamma^{-1} k_s k_\gamma^{-1} s_n + k_s k_\lambda h_n^{(l)}] h_n^{(g)} + k_s k_\gamma^{-1} k_\lambda (a_0 d_\sigma^{-1} k_s + \frac{1}{3} \gamma^{-1} s_n) h_n^{(l)} + \frac{1}{3} \gamma^1 a_0 d_\sigma^{-1} s_n, \quad \Delta_n^{(w)} = s_n \Delta_n^{(a)}$$

$$\Delta_n^{(p)} = -s_n [a_0 d_\sigma^{-1} + k_s k_\gamma^{-1} (h_n^{(g)} + k_\lambda h_n^{(l)})], \quad \Delta_n^{(\theta)} = -s_n k_s (a_0 d_\sigma^{-1} + h_n^{(g)})$$

$$\Delta_n^{(j)} = s_n a_0 d_\sigma^{-1} [k_s k_\gamma^{-1} k_\lambda h_n^{(l)} - (1 - k_s k_\gamma^{-1}) h_n^{(g)}], \quad \Delta_n = s_n^2 a_0^{-2} \kappa_g \tau_w \Delta_n^{(a)} - \Delta_n^{(p)}$$

При записи (3.4) величиной k_p по сравнению с единицей пренебрегалось в коэффициентах $(1 - k_p)$.

Соотношения (3.4) согласуются с полученными [6] для стационарных колебаний парового пузыря в монохроматическом акустическом поле. Анализ комплексной амплитуды колебаний радиуса пузыря приведен в [1, 4, 7].

Комплексные амплитуды распределений температуры в фазах согласно (2.5), (3.1) имеют вид

$$u_{1n}^{(l)\circ} = \theta_{1n}^\circ \eta^{-1} e_n^-(\eta), \quad u_{1n}^{(g)\circ} = k_\gamma p_{1n}^\circ + (\theta_{1n}^\circ - k_\gamma p_{1n}^\circ) \eta^{-1} S_n(\eta) / S_n(1) \quad (3.5)$$

При $n = 0$ определитель системы равен нулю. Из (2.6) и (3.2), обеспечивающего совместность уравнений, решения находятся с точностью до решения однородной системы

$$\begin{aligned} w_{10}^\circ &= k_s^2 k_\gamma^{-1} k_\lambda a_0 (a_0 + \delta_\sigma)^{-1} \varphi_0^\circ, & \theta_{10}^\circ &= k_s^{-1} k_\gamma k_\lambda^{-1} w_{10}^\circ \\ j_{10}^\circ &= -w_{10}^\circ, & p_{10}^\circ &= \varphi_0^\circ, & a_{10}^\circ &= a_{10}^\circ(t_1, t_2, \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Согласно (3.2), (3.3), если $\varphi_0^\circ \neq 0$, то в зависимости от знака φ_0° пузырь будет в среднем расти до бесконечности или уменьшаться до нуля. Это фактически связано с тем, что колебания давления происходят около неравновесного значения $p_*(1 + \varepsilon\varphi_0^\circ)$. Если же $\varphi_0^\circ = 0$ (система в среднем равновесна), то в первом приближении радиус пузыря будет совершать стационарные колебания ($\partial a_0 / \partial t_1 = 0$), средний радиус пузыря при этом может изменяться в более «медленном», нежели t_1 , масштабе времени (нелинейный эффект).

4. Уравнение динамики среднего радиуса пузыря. Пусть $\varphi_0^\circ = 0$. Тогда все искомые функции в первом приближении, кроме, быть может, a_{10}° , от t_1 не зависят. Будем считать $a_{10}^\circ = 0$, вкладывая в a_0 смысл среднего радиуса. Отсюда и из (1.1), (1.2), (2.1)–(2.3) находятся неоднородности $f_2^{(\alpha)}$ во втором приближении ($m = 2$)

$$\begin{aligned} f_2^{(a)} &= -\kappa_g^{-1} a_0 \partial a_0 / \partial t_2, & f_2^{(j)} &= a_1 j_1 \\ f_2^{(w)} &= -\tau_w \left[a_1 \partial w_1 / \partial t_0 + \left(2 \partial a_1 / \partial t_0 - \frac{1}{2} \kappa_g a_0^{-2} w_1 \right) w_1 \right] \\ f_2^{(\theta)} &= a_0 d_\sigma^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{2} k_s^{-1} + \beta_T - \frac{3}{2} \right) \theta_1^2 + \left[\beta_p - k_s \left(\beta_T - \frac{1}{2} \right) \right] p_1 \theta_1 - k_s \beta_p p_1^2 \right\} \\ f_2^{(p)} &= -\frac{a_0}{\kappa_g} \frac{\partial a_0}{\partial t_2} - \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left[(a_1 + p_1) \frac{\partial a_1}{\partial t_0} + \frac{2a_1}{3\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial t_0} \right] + (a_1 + \theta_1) j_1 \\ f_2^{(l)} &= \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left\{ \left[\left(\eta - \frac{1}{\eta^2} \right) \frac{\partial a_1}{\partial t_0} + \frac{k_p \kappa_g}{a_0^2 \eta^2} j_1 \right] \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial \eta} - 2a_1 \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial t_0} \right\} \\ f_2^{(g)} &= \frac{u_1^{(g)}}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{a_0^2}{\kappa_g} \left\{ \left(\frac{\partial a_1}{\partial t_0} + \frac{1}{3\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial t_0} \right) \eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \right. \\ &\quad \left. - \left[(p_1 + 2a_1) \frac{\partial u_1^{(g)}}{\partial t_0} - k_\gamma (u_1^{(g)} + 2a_1) \frac{\partial p_1}{\partial t_0} \right] \right\} \\ \beta_p &= \frac{p_*}{\beta_*} \frac{\partial \beta}{\partial p} \Big|_{p_*, T_*}, & \beta_T &= \frac{T_*}{\beta_*} \frac{\partial \beta}{\partial T} \Big|_{p_*, T_*} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где β_p, β_T — безразмерные производные коэффициента аккомодации по давлению и температуре, характеризующие «нелинейную неравновесность» фазового перехода.

Для существования t_0 -периодических решений у системы (2.3) при $m = 2$ достаточно, чтобы нулевые гармоники $f_{20}^{(\alpha)}$ удовлетворяли условию (2.7). Нулевая гармоника произведения двух t_0 -периодических функ-

ций $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ со средними значениями $x_0^{(1)\circ} = x_0^{(2)\circ} = 0$, вычисляется по определению (2.4)

$$(x^{(1)}x^{(2)})_0^\circ = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} x^{(1)}x^{(2)} dt_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \overline{x_n^{(1)\circ}} x_n^{(2)\circ} \}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Вычисляя соответствующие интегралы по η , условие (2.7) можно записать в форме дифференциального уравнения

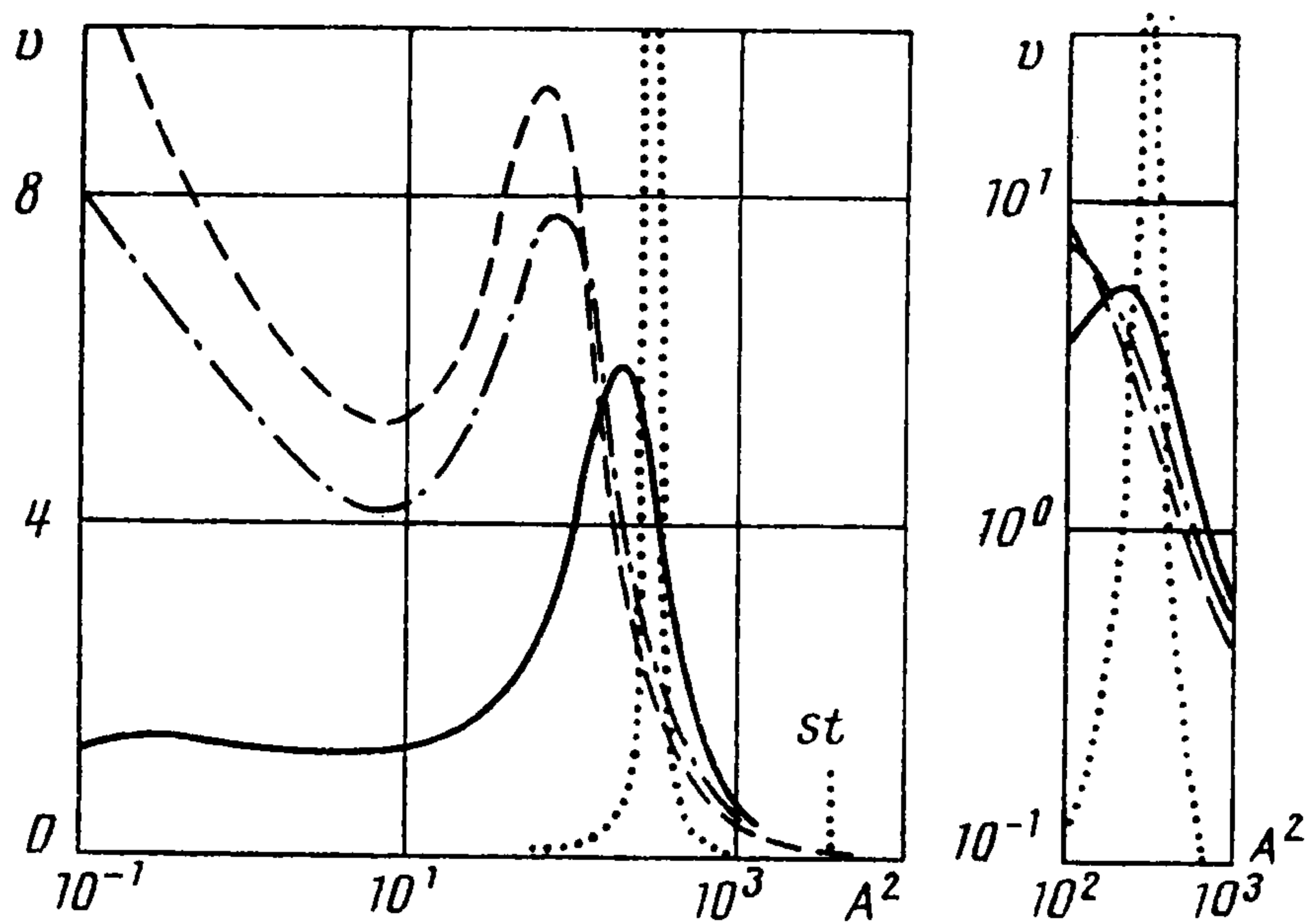
$$\begin{aligned} (a_0 + \delta_\sigma) \frac{\partial a_0}{\partial t_2} = & \frac{\kappa_g k_s}{2k_\gamma k_\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{\kappa_g \tau_w k_s}{2a_0^2} |s_n a_{1n}^\circ|^2 + \left(\frac{1}{2k_s} + \beta_T - \frac{3}{2} \right) |\theta_{1n}^\circ|^2 - \right. \\ & - k_s \beta_p |p_{1n}^\circ|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{k_\gamma}{k_s k_\lambda} \left(1 - \frac{k_s}{k_\gamma} + \frac{2\sigma_\sigma}{a_0} \right) a_{1n}^\circ \overline{j_{1n}} - \right. \\ & - \frac{1}{k_\lambda} \left(1 - \frac{2}{3\gamma} \right) s_n a_{1n}^\circ \overline{p_{1n}} + (\beta_p - k_s \beta_T) p_{1n}^\circ \overline{\theta_{1n}} + \\ & \left. + \left[\frac{1}{k_\lambda} - \frac{k_\rho}{k_\kappa} (1 - E_n) \right] \theta_{1n}^\circ \overline{j_{1n}} + \frac{s_n}{k_n} E_n \theta_{1n}^\circ \overline{a_{1n}} \right\} \\ E_n = & e^{\sqrt{s_n/k_\kappa}} E_3(\sqrt{s_n/k_\kappa}), \quad E_3(z) = \int_1^\infty e^{-z\xi} \xi^{-3} d\xi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если считать поле давления монохроматическим ($\varphi_1^\circ = 1$, $\varphi_n^\circ = 0$, $n > 1$), фазовые переходы — квазиравновесными ($d_\sigma \rightarrow 0$), пузырь — температурно-однородным ($h_n^{(g)} = 1/3 s_n$, что соответствует главному члену асимптотики $h_n^{(g)}$ при $s_n \rightarrow 0$), то уравнение (4.2), (3.4) согласуется с уравнением динамики среднего радиуса пузыря, полученным в [4, 5].

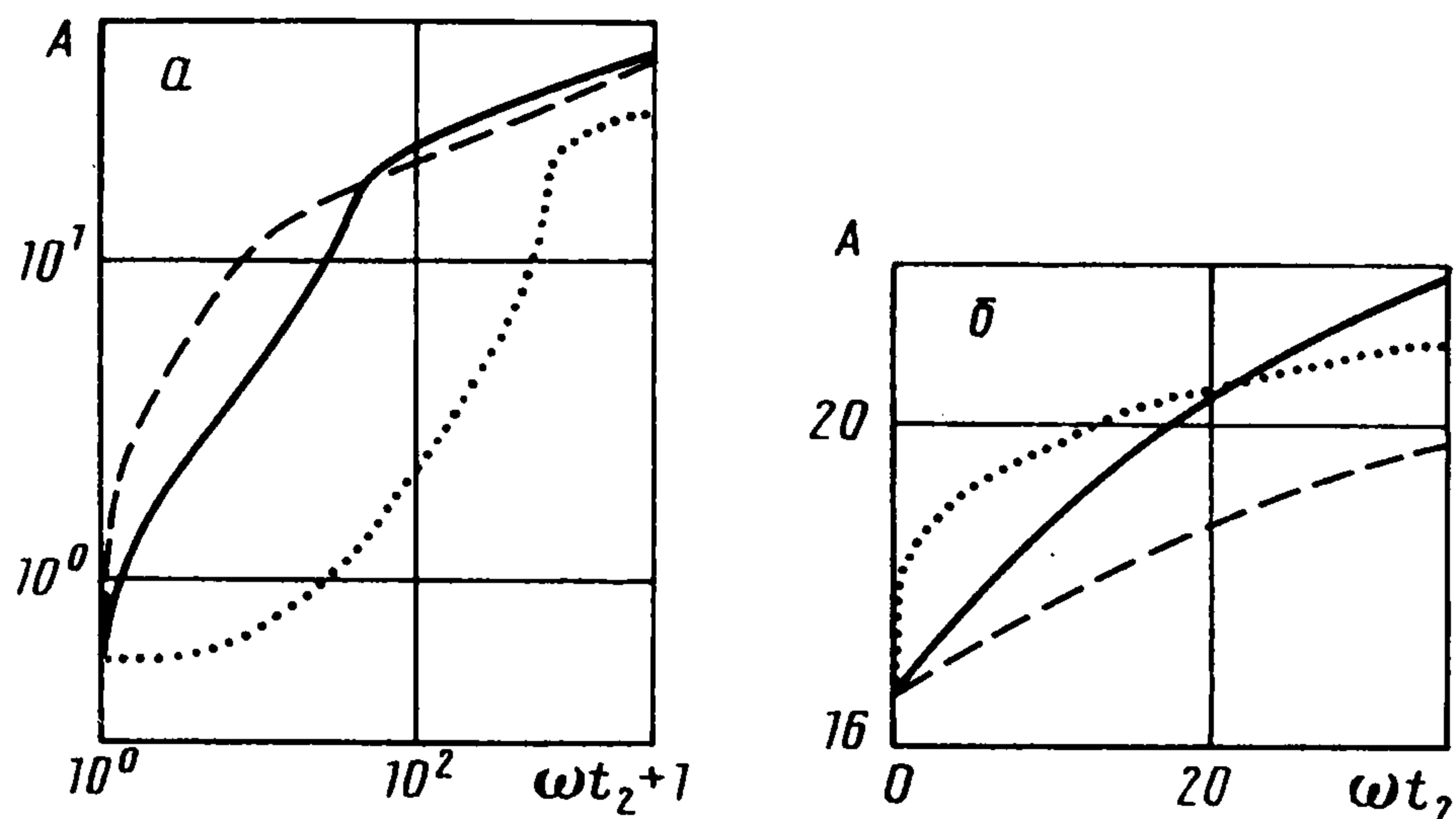
На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов по уравнению (4.2) для системы с теплофизическими параметрами воды и пара при давлении $p_* = 0,1$ МПа; здесь введены обозначения: $\nu = (a_0/\kappa_g) \partial a_0/\partial t_2$, $A = a_0 (\omega/\kappa_g)^{1/2}$. В связи с отсутствием надежных данных по коэффициенту аккомодации на фигурах приведены кривые, рассчитанные при значениях β_* , равных $4 \cdot 10^{-4}$ (пунктир), $0,04$ (сплошные линии), $0,4$ (штрихпунктир), и по квазиравновесной схеме фазового перехода (штриховые линии). Параметры «нелинейной неравновесности» в иллюстрируемых вариантах имели значения $\beta_p = 0$, $\beta_T = 1,5$, что соответствует теоретической формуле Ландау [4]. Отметим, что вариация β_T в умеренных пределах слабо влияла на результаты расчетов. Частота $\nu = \omega/(2\pi)$ акустического поля, которое считалось монохроматическим, равна 10 кГц.

Фазовый портрет уравнения (4.2) представлен на фиг. 1. Диапазон изменения a_0 выбран с учетом ограничений, налагаемых на область применимости используемой модели. Отчетливо наблюдаются резонансные размеры, при которых скорость роста пузыря заметно возрастает. В области размеров, больших резонансного, скорость роста среднего радиуса пузыря резко снижается. Отметим одно интересное обстоятельство — при определенных радиусах имеется немонотонная зависимость скорости роста среднего радиуса от коэффициента аккомодации, особенно это проявляется в окрестности резонансных радиусов. Дело в том, что уменьшение коэффициента аккомодации приводит не только к снижению интенсивности фазового перехода ($\beta = 0$ соответствует отсутствию фазовых переходов), но и к увеличению амплитуды колебаний и сдвигам по фазе между колебаниями давления, температуры и радиуса, которые, как показывают результаты расчетов, интегрально вносят положительный вклад в скорость роста среднего радиуса (см. (3.4), (4.2)). Еще одной особенностью фазового портрета является существование устойчивого нуля в области больших значений A (стационарный радиус), который в обозреваемом диапазоне A реализуется лишь при $\beta_* = 4 \cdot 10^{-4}$ ($a_{st} \sim 1$ см), он отмечен на фиг. 1. Существование стационарного радиуса в области размеров, больших резонансного, отмечалось в [4].

На фиг. 2 проиллюстрировано численное решение задачи Коши для уравнения (4.2). Кривые, соответствующие $\beta_* = 0,4$, практически совпадают с кривой, соответ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ствующей квазиравновесному фазовому переходу, и на фигуре не приводятся. Взаимное расположение кривых с разными β зависит от начального условия $a_{00} = a_0(0)$, это ясно из фазового портрета (фиг. 1). В варианте *a* $a_{00} = 10$ мкм, в варианте *b* $a_{00} = 0,3$ мм.

Если толщина нестационарного температурного пограничного слоя в газе много меньше размера пузыря ($\delta_g = [\kappa_g/(2\omega)]^{1/2} \ll a_0$), то в жидкости, как правило, также реализуется тонкий пограничный слой, поскольку $\kappa_l < \kappa_g$. Используя асимптотические представления функций из (3.4), (4.2) при больших $|s_n|^{1/2}$, можно получить уравнение (высокочастотное приближение)

$$(a_0 + \delta_\sigma) \frac{\partial a_0}{\partial t_2} = \frac{k_s \kappa_g}{2k_\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Phi_n^0|^2}{|D_n|^2} \left\{ -\frac{k_s k_\lambda}{6k_\gamma (\gamma - 1)} \frac{a_0^2}{a_r^2(\omega n)} + \sqrt{\frac{|s_n|}{2}} H(\sqrt{\omega_\sigma n}) \right\} \quad (4.3)$$

$$|D_n|^2 = |1 - a_0^2 a_r^{-2}(\omega n) + i\omega n \tau_w k_\gamma \sqrt{|s_n|/2} (1 + i) I(\sqrt{\omega_\sigma n})|$$

$$H(x) = P(x)/Q(x), \quad I(x) = R(x)/S(x), \quad \omega_\sigma = d_\sigma^2/\delta_g^2$$

$$R(x) = 1 + [(1 + i)/\sqrt{2}] Kx, \quad S(x) = c_0 + [(1 + i)/\sqrt{2}] c_1 x$$

$$P(x) = 1/2 b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad Q(x) = 1/2 K^2 x^2 + Kx + 1$$

$$c_0 = 1 + k_\gamma^s (K - 2), \quad c_1 = K - k_\gamma^s, \quad b_2 = c_1 K, \quad k_\gamma^s = k_3/k_\gamma$$

$$b_1 = k_\gamma^s K^2 + [(1 - k_\gamma^s)^2 - (k_\gamma^s)^2 (2 - k_c)] K + (k_\gamma^s)^2 (1 - k_c)$$

$$b_2 = k_\gamma^s [1 - k_\gamma^s (1 - k_c)] K + (1 - k_\gamma^s)^2 - (k_\gamma^s)^2 k_c, \quad k_c = c_l/c_g$$

$$K = k_\gamma^s (1 + k_\lambda k_\kappa^{-1/2}), \quad a_r(\omega) = \omega^{-1} (3\gamma p_*/\rho_l)^{1/2}$$

Здесь первый (отрицательный) член в фигурных скобках, вклад которого при больших размерах или частотах становится доминирующим, обусловлен тем, что из-за нелинейности уравнения Рэля — Ламба происходит смещение среднего значения давления в пузыре ниже равновесного (т. е. жидкость на бесконечности как бы недогрета). Второй член (положительный) описывает диссипацию энергии, затрачиваемой на фазовый переход в задаче с плоской границей (функция H аналогична приведенной в [3] для высокочастотных колебаний капли). Конкуренция этих эффектов приводит к тому, что появляется устойчивый стационарный радиус, зависящий от частоты и формы колебаний. Как следует из (4.3), для монохроматического поля при $\delta_g \ll a_0$ стационарный средний радиус имеет вид

$$a_{st}(\omega) = 9(\gamma - 1)^2 [k_s k_\lambda \omega \tau_w]^{-1} [\omega / (2\kappa_g)]^{-1/2} H(\omega \sigma^{1/2})$$

Автор благодарит Н. С. Хабеева за предложение рассмотреть данную задачу и Р. И. Нигматуллина за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
3. Гумеров Н. А. О слабонелинейных колебаниях радиуса конденсированной капли в акустическом поле // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 261—270.
4. Акуличев В. А., Алексеев В. Н., Буланов В. А. Периодические фазовые превращения в жидкостях. М.: Наука, 1986. 280 с.
5. Алексеев В. Н. Нестационарное поведение парового пузырька в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 2. С. 185—191.
6. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 815—821.
7. Хабеев Н. С. Резонансные свойства паровых пузырьков // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 4. С. 696—703.

Тюмень

Поступила в редакцию
9.VI.1989