Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 532.5 : 534.2

П. В. Третьяков

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ

Получено новое решение волнового уравнения в виде интеграла от произведения двух функций, первая из которых является произвольным решением этого уравнения, а вторая — производной по параметру интегрирования от произвольного решения уравнения Лапласа. Решение задачи дифракции произвольной волны на клине находится при помощи интеграла от потенциала от этой волны и решения той же задачи в случае плоской единичной волны, которое удовлетворяет уравнению Лапласа. При рассмотрении дифракции волн со сферической симметрией полученный интеграл может быть сведен к построенному ранее [1].

Для дифракции на полуплоскости и при затекании волн в угол с полураствором $\pi/(2n+1)$ получены решения в виде элементарных функций.

Так как подход к построению решения не отличается существенно от изложенного в работе [2], подробные выкладки опускаются.

1. Рассмотрим дифракцию на римановой поверхности произвольной акустической волны с потенциалом (или избыточным давлением за фронтом)

$$f(t, r, z, \cos\theta) H(\eta(t, r, z) - \cos\theta) \tag{1.1}$$

являющимся обобщенным решением волнового уравнения

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} y/x$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты, $H(s)$ — функция Хевисайда. В дальнейшем волну с потенциалом (1.1) будем называть волной вида (1.1). Наличие в (1.1) множителя в виде функции Хевисайда свидетельствует о том, что фронт волны можно представить следующим образом:

$$\eta(t, r, z) - \cos\theta = 0 \tag{1.3}$$

причем, так как фронт падающей волны касается фронта дифракционной волны при $\theta = 0{,}2\pi$, т. е. $\cos\theta = 1$, то фронт дифракционной волны можно записать в виде $\eta = 1$.

Будем искать решение с периодичностью $T = 4\pi - 4\beta$ по θ, что предполагает наличие падающей волны при $(4\pi - 4\beta)k \leqslant \theta \leqslant 2\pi + (4\pi - 4\beta)k$ и ее отсутствие при $2\pi + (4\pi - 4\beta)k < \theta < (4\pi - 4\beta)(k+1)$, где $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$ (что для плоской единичной волны при $T = 3\pi$ представлено на фигуре). Наиболее простым для понимания будет случай $T = 4\pi$, $\beta = 0$ (соответствует полуплоскости), когда на римановой поверхности падающая волна присутствует через лист (при $4\pi k \leqslant \theta \leqslant 2\pi + 4\pi k$, $k = 0; \pm1; \pm2; \ldots$).

Присутствие волны при определенных значениях θ можно получить, домножив потенциал падающей волны на $H\{\sin {}^1/_2\,\lambda\theta \sin {}^1/_2\,\lambda(2\pi - \theta)\}$, где $\lambda = 2\pi/(4\pi - 4\beta)$.

Разложим потенциал падающей волны (1.1) в ряд Фурье по θ с указанной выше периодичностью вне области дифракции. Далее совершим переход внутрь область дифракции. При этом в пределах интегрирования интегрального представления коэффициентов ряда Фурье выбираем собственные функции, не имеющие особенности на ребре клина. После этого меняем порядок интегрирования и суммирования (правомочность такой перестановки нетрудно показать). Просуммировав получившийся под знаком интеграла ряд, получим решение внутри области дифракции

$$\Phi(t, r, z, \theta) = f(t, r, z, \cos\theta) H(\sin {}^1/_2 \lambda\theta \sin {}^1/_2 \lambda (2\pi - \theta)) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\zeta^\lambda}^{1} f(t, r, z, {}^1/_2 (u^{1/\lambda} + u^{-1/\lambda}))(g(u, \theta) + g(u, 2\pi - \theta))\, du \tag{1.4}$$

$$\zeta = \eta - \sqrt{\eta^2 - 1}, \quad g(u, \theta) = \sin \lambda\theta/(1 - 2u \cos \lambda\theta + u^2)$$

Для $\lambda = {}^1/_2$, $T = 4\pi$ (соответствует полуплоскости) это выражение можно преобразовать к виду

$$\Phi(t, r, z, \theta) = f(t, r, z, \cos\theta) H(\sin {}^1/_2 \theta) -$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{\mu} f(t, r, z, 2v^2 + 1) \frac{\sin {}^1/_2 \theta\, dv}{v^2 + \sin^2 {}^1/_2 \theta}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\eta - 1}{2}} \tag{1.5}$$

2. Этот же результат можно получить и другим способом. Будем искать решение волнового уравнения (1.2) в виде

$$\Phi(t, r, z, \theta) = \int f(t, r, z, \eta) \varphi(\eta, \theta) d\eta$$

где первая функция, стоящая под знаком интеграла — волна вида (1.1) с фронтом (1.3), а $\varphi(\eta, \theta)$ — некая функция, вид которой необходимо установить.

Так как $\eta = \cos\theta$ — фронт волны (т. е. характеристика уравнения (1.2)), то может быть три случая поведения функции $f(t, r, z, \cos\theta)$ на этой поверхности (см. [3]). В первом случае функция терпит разрыв (причем ввиду того, что $f \equiv 0$ вне фронта, величина этого разрыва равна $f(t, r, z, \eta)$). Во втором — терпит разрыв выводящая по отношению к поверхности (1.3) производная этой функции. И, наконец, терпят разрыв более старшие производные $f(t, r, z, \cos\theta)$.

Простым дифференцированием можно получить

$$\Box\Phi = \int \varphi \Box_r f\, d\eta + \int f \triangle_\eta \varphi\, d\eta + \varphi \begin{cases} \mathrm{Tr}_\eta (f(t, r, z, \eta)) & (\text{случай } 1) \\ \mathrm{Pr}_\eta (f(t, r, z, \eta)) & (\text{случай } 2) \\ 0 & (\text{случай } 3) \end{cases}$$

Здесь $\Box\Phi$ — волновой оператор (см. (1.2)), $\Box_u f$ — волновой оператор, в котором сделана замена переменной $u = \cos\theta$, поэтому $\Box_\eta f = 0$. Кроме того $\mathrm{Tr}_\eta (f(t, r, z, \eta)) = 0$ — уравнение распространения разрывов решений уравнения (1.2) ([3], с. 342), и ему в первом случае удовлетворяет $f(t, r, z, \eta)$. $\mathrm{Pr}_\eta (f(t, r, z, \eta))$ является трансверсальной производной по отношению к поверхности (1.3). Но эта поверхность характеристическая, следовательно, трансверсальное направление является касательным ([3], с. 336). Касательная производная не может терпеть разрыва на характеристике, а вне фронта $f \equiv 0$, поэтому $\mathrm{Pr}_\eta (f(t, r, z, \eta)) = 0$. Значит, для того, чтобы величина $\Box\Phi$ обратилась в нуль, необходимо положить

$$\Delta_\eta \varphi = (\eta^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + 3\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.1}$$

Если обозначить $\psi = \int \varphi d\eta$, проинтегрировать уравнение (2.1) по η, далее сделать преобразование Чаплыгина $\zeta = \eta - \sqrt{\eta^2 - 1}$, то в итоге получим уравнение Лапласа

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом, для любого решения ψ уравнения Лапласа (2.2) и любого решения уравнения (1.2) вида (1.1) с фронтом $\eta = \cos\theta$ можно построить новое решение волнового уравнения

$$\Phi(t, r, z, \theta) = \int f(t, r, z, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\eta - \sqrt{\eta^2 - 1}, \theta)\, d\eta \tag{2.3}$$

И наоборот, если Φ — решение волнового уравнения при произвольной волне вида (1.1), то $\psi(\zeta, \theta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2.2).

Если в качестве ψ выбрать решение задачи дифракции на клине плоской единичной волны, удовлетворяющее уравнению Лапласа, получим новое решение волнового уравнения, а вид подынтегрального выражения (2.3) совпадет с (1.4).

При помощи соотношения (1.5) легко получить все те решения задач дифракции волн на римановой поверхности с периодичностью $T = 4\pi$, которые в элементарных функциях приводятся в работе [2].

Рассмотрим теперь дифракцию на римановой поверхности с периодичностью $T = 4\pi$ сферической волны вида

$$f(t, r, z, \cos\theta) = (\tau - \rho)^k H(\tau - \rho)/\rho$$

где $\tau = R_0 + t$ — время, отсчитываемое с момента возникновения волны, $t = 0$ — момент прихода волны на ось $r = 0$, являющуюся осью ветвления римановой поверхности, $R_0 = \mathrm{const}$ — расстояние от центра симметрии волны до оси $r = 0$, $\rho^2 = R_0^2 + r^2 + 2R_0 r\cos\theta$, интеграл в формуле (1.5) для этой функции берется в элементарных функциях и внутри области дифракции получаем

$$\begin{aligned}
\Phi = (4R_0 r)^{(k-1)/2} \Bigg\{ &\sum_{n=0}^{[k/2-1/2]} \binom{k}{2n+1} \beta^{k/2-1/2-n} \Bigg[\varepsilon^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\psi}{\sqrt{\eta_1}} \right) - \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} \varepsilon^{n-l} \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l}{m} \frac{\eta_1^{m+1/2}}{2m+1} \psi^{2l-2m-1} \Bigg] + \\
&+ \sum_{n=0}^{[k/2]} \binom{k}{2n} \beta^{k/2-n} \Bigg\{ \varepsilon^{n-1/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}\,\psi}{\sqrt{\eta_1 \varepsilon}} \right) - \\
&- \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} \varepsilon^{n-l} \Bigg\{ \beta^{1/2} \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l-1}{m} \frac{\psi^{2l-2m-1}}{m} \Bigg[\eta_1^{m-1/2} + \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j (2m-1)\ldots(2m-2j+1)}{2^j (m-1)\ldots(m-j)} \xi_1^{\,j} \eta_1^{m-j-1/2} \Bigg] + \\
&+ \sum_{m=0}^{l-1} \binom{l-1}{m} (-1)^m \psi^{2l-2m-1} \xi_1^{\,m} \frac{(2m-1))!!}{(2m)!!} \ln \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\eta_1}}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\eta_1}} \Bigg\} \Bigg\} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\xi_1 = \frac{\xi + 1}{2} = \frac{(R_0 + r)^2 + z^2}{4R_0 r}, \quad \eta_1 = \frac{\eta - 1}{2} = \frac{(R_0 + t)^2 - (R_0 + r)^2 - z^2}{4R_0 r}$$

$$\psi = \sin {}^1/_2\theta, \quad \beta = \xi_1 + \eta_1, \quad \varepsilon = \xi_1 - \sin^2 {}^1/_2\,\theta$$

Здесь $\binom{n}{m}$ — биномиальные коэффициенты, $[k/2]$ — целая часть числа.

3. Рассмотрим теперь произвольную падающую волну вида $f(t, r, z, \theta) H(\eta - \cos\theta)$ с фронтом $\eta = \cos\theta$. Повторяя рассуждения пункта 1, получим решение задачи дифракции этой волны на римановой поверхности с периодичностью $T = 4\pi - 4\beta$, $\lambda = 2\pi/(4\pi - 4\beta)$

$$\Phi(t, r, z, \theta) = f(t, r, z, \theta) H(\sin {}^1/_2\lambda\theta \sin {}^1/_2\lambda(2\pi - \theta)) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta^\lambda}^{1}[f(t, r, z, -i\ln u^{1/\lambda}) + f(t, r, z, i\ln u^{1/\lambda})][g(u, \theta) + g(u, 2\pi - \theta)]du +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta^\lambda}^{1}[f(t, r, z, -i\ln u^{1/\lambda}) - f(t, r, z, i\ln u^{1/\lambda})][\chi(u, \theta) + \chi(u, 2\pi - \theta)]\,du$$

$$i^2 = -1,\ \chi(u, \theta) = (\cos\lambda\theta - u)/(1 - 2u\cos\lambda\theta + u^2) \qquad (3.1)$$

Здесь ζ, $g(u, \theta)$ определяются так же, как и в (1.4). При $T = 4\pi$, $\lambda = {}^1/_2$ формула (3.1) преобразуется к виду

$$\Phi(t, r, z, \theta) = f(t, r, z, \theta) H(\sin {}^1/_2\theta) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\mu}^{\mu}[f(-i\ln\sqrt{v^2+1} - v)^2) +$$

$$+ f(i\ln(\sqrt{v^2+1} - v)^2)]\frac{\sin {}^1/_2\theta\, dv}{v^2 + \sin^2 {}^1/_2\theta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu}^{1}[f(-i\ln(w - \sqrt{w^2-1})^2) -$$

$$- f(i\ln(w - \sqrt{w^2 - 1})^2)]\frac{\cos {}^1/_2\theta\, dw}{w^2 - \cos^2 {}^1/_2\theta} \qquad (3.2)$$

$$i^2 = -1,\ \mu = \sqrt{(\eta - 1)/2},\ \nu = \sqrt{(\eta + 1)/2}$$

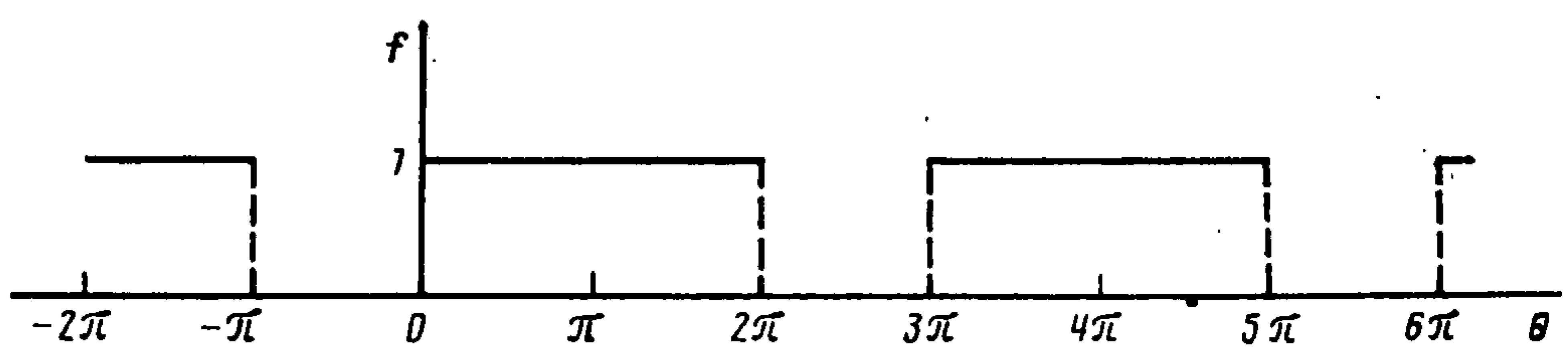
Здесь в подынтегральном выражении для $f(t, r, z, u)$ опущены первые три аргумента.

Если $f(t, r, z, u)$ — аналитическая функция относительно последнего аргумента, то выражения (3.1), (3.2) будут действительными. В противном случае необходимо в правой части оставить только действительную часть.

4. Рассмотрим теперь решение с периодичностью $T = 2\pi q/p$, $\lambda = p/q$, где p и q — целые числа. Анализ показывает, что можно вначале найти решение для $\lambda = 1/q$, $T = 2\pi q$, а затем уже построить решение для $\lambda = p/q$ в виде

$$f_{p/q}(\theta) = \sum_{k=0}^{p-1} f_{1/q}\left(\theta + \frac{k2\pi q}{p}\right) \qquad (4.1)$$

Это можно проиллюстрировать на примере $\lambda = {}^2/_3$, $T = 3\pi$ и плоской единичной волны. В этом случае волна есть при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $3\pi \leqslant \theta \leqslant 5\pi$ и т. д., а при $2\pi < \theta < 3\pi$, $5\pi < \theta < 6\pi$ и т. д. ее нет (фигура).



Видно, что задачу можно разбить на две с периодичностью $T = 6\pi$ ($\lambda = {}^1/_3$). В первой из них предполагается присутствие волны при $6\pi k \leqslant \theta \leqslant 2\pi + 6\pi k$, во второй — волна есть при $3\pi + 6\pi k \leqslant \theta \leqslant 5\pi + 6\pi k$, а при $5\pi + 6\pi k < \theta < 8\pi + 6\pi k$ ее нет. Здесь также $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Заметим, что если взять для второй задачи $\theta_1 = \theta - 3\pi$, то получим условия первой задачи. Таким образом, достаточно получить решение

$f_{1/3}(\theta)$ для первой задачи, а $f_{1/3}(\theta+3\pi)$ будет решением второй задачи. Так как волновое уравнение (1.2) линейно, а сумма условий первой и второй задачи удовлетворяет условиям для периодичности $T=3\pi$, $\lambda = 2/3$, то

$$f_{2/3}(\theta) = f_{1/3}(\theta) + f_{1/3}(\theta) + 3\pi$$

Аналогичные рассуждения можно провести для произвольных целых p и q и любого вида $f(\theta)$. Тот же самый результат получим, если $g(u,\theta)$, $\chi(u,\theta)$ присутствующие в (1.4), (3.1), разложить на дроби соответствующие $\lambda = 1/q$.

При $\lambda = 1/2$, $T = 4\pi$ найдены решения задач дифракции для некоторых волн в элементарных функциях. Поэтому, воспользовавшись формулой (4.1), можно построить решение для $\lambda = n + 1/2$, $T = 4\pi/(2n+1)$ (соответствующее затеканию волны в угловую область с полураствором $\pi/(2n+1)$)

$$f_{n+1/2}(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} f_{1/2}(\theta_k) \tag{4.2}$$

Здесь и далее $\theta_k = \theta + 4\pi k/(2n+1)$.

Так, например, для цилиндрической волны вида $\ln(\delta - \sqrt{\delta^2 - 1})$, где $\delta^2(\theta) = (R_0+t)^2/(R_0^2 + r^2 + 2R_0 r\cos\theta)$, $R_0 = \mathrm{const}$ — расстояние от оси волны до оси $r=0$, получим

$$f_{n+1/2}(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\Big[\ln\big(\delta(\theta_k) - \sqrt{\delta^2(\theta_k)-1}\big) + \\ + \frac{1}{2}\ln\frac{R_0 + r - \sqrt{2R_0 r}\sin{}^1/_2\theta_k}{R_0 + r + \sqrt{2R_0 r}\sin{}^1/_2\theta_k}\Big] \tag{4.3}$$

Этот ряд можно продолжить для любого, известного в элементарных функциях, решения задачи дифракции на римановой поверхности с периодичностью $T = 4\pi$.

5. При помощи формул (1.4), (1.5) можно получить решение задачи дифракции волны $f(t, r, z, \cos(\alpha+\theta))H(\eta - \cos(\alpha+\theta))$ на клине и полуплоскости соответственно. При построении решения необходимо учесть, что в дифракции участвует и отраженная волна.

В случае граничного условия $\partial\Phi/\partial n = 0$ на поверхности клина, где n — нормаль к этой поверхности, отраженная волна запишется в виде (1.1), где θ необходимо заменить на $2\beta + \alpha - \theta$. При $\Phi = 0$ на поверхности клина отраженная волна будет иметь такой же вид, но с противоположным знаком.

Для получения решения внутри области дифракции в формулах (1.4) и (1.5) (или полученных частных соотношениях (2.4), (4.1)—(4.3)) необходимо заменить θ на $\alpha + \theta$ (для падающей волны), затем заменить θ на $2\beta + \alpha - \theta$ (для отраженной волны), и полученные результаты просуммировать при $\partial\Phi/\partial n = 0$, или вычесть второй из первого для $\Phi = 0$, т. е. внутри области дифракции будем иметь

$$\Phi = \Phi(\alpha+\theta) \pm \Phi(2\beta + \alpha - \theta)$$

где $\Phi(\theta)$ соответствующее решение для римановой поверхности.

Эти построения, с использованием формул (3.1), (3.2), можно проделать для получения решения задачи дифракции волны вида $f(t, r, z, \alpha+\theta)H(\eta - \cos(\alpha+\theta))$ на клине и полуплоскости.

Автор благодарит В. В. Третьякова за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поручиков В. Б.* Дифракция сферической упругой волны на клине. // ПММ.1976. Т. 40. Вып. 5. С. 898—908.
2. *Третьяков В. В., Третьяков П. В.* К дифракции на клине акустических волн со сферической и цилиндрической симметрией. // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 3. С. 79—83.
3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию 30.V.1989