

УДК 532.5 : 534.1

© 1991 г.

А. В. Марченко, И. В. Прохоров

О ЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

Рассматривается линейная динамика периодических волн на поверхности слоя жидкости конечной глубины, находящегося под ледяным покровом, моделирующимся упругой пластиной. Частицы жидкости в невозмущенном состоянии перемещаются с постоянной горизонтальной скоростью, профиль которой имеет линейный сдвиг по вертикали.

Показано, что существует несколько типов волн, распространяющихся с одинаковой частотой. Число волн зависит от частоты, параметров течения в жидкости и физико-механических параметров ледяного покрова. Рассматривается задача о дифракции волн фиксированной частоты на кромке полубесконечной упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости. Задача сведена к решению уравнения Лапласа в полосе с заданной асимптотикой на бесконечности, граничными условиями на сторонах полосы, имеющими разрыв в точке, соответствующей кромке льда и контактно-граничными условиями на ребре пластины. Решение строится методом Винера—Хопфа. Определены коэффициенты отражения и прохождения волн через кромку пластины. Проводится анализ полученных результатов для реальных параметров морского льда.

В исследованиях по динамике волн в слое жидкости с постоянной завихренностью, имеющем свободную поверхность, было показано [1, 2], что уравнения движения жидкости имеют интеграл, являющийся аналогом интеграла Коши—Лагранжа. Рассматривались задачи о дифракции поверхностных и гидроакустических волн на кромке и на неоднородностях упругой пластины, плавающей на поверхности бесконечно глубокой жидкости [3—6], а также задачи о дифракции внутренних волн в слое экспоненциально стратифицированной жидкости на кромке ледового поля и на кромке полубесконечной пленки, изменяющей поверхностное натяжение жидкости [7—9].

1. Рассматриваются плоские движения в слое тяжелой жидкости невозмущенной глубины H . Начало декартовой прямоугольной системы координат x, y находится на невозмущенной поверхности жидкости и ось y направлена вертикально вниз.

Вектор вихря имеет величину $\Omega = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ (v, u — вертикальная и горизонтальная компоненты скорости частиц жидкости). Из уравнения сохранения завихренности $d\Omega/dt = 0$ следует, что если в начальный момент времени скорость частиц жидкости имела вид

$$u = \Omega y + V + u', \quad v = v', \quad \Omega = (V_d - V)/H = \text{const}$$

где V и V_d — скорости невозмущенного потока жидкости на ее поверхности и у дна, то в последующие моменты времени завихренность не изменится. Поэтому для скоростей u' и v' существует потенциал φ :

$$\Delta\varphi = 0, \quad (u', v') = \nabla\varphi \quad (1.1)$$

Уравнения движения жидкости имеют интеграл [1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\Omega y + V) \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - \Omega\psi + \frac{P}{\rho} - gy = f(t) \quad (1.2)$$

(P, ρ — давление и плотность жидкости, ψ — функция тока).

Предполагается, что на поверхности жидкости плавает тонкая упругая пластина, моделирующая ледяной покров. Тогда давление под пласт-

тиной P_i связано с атмосферным давлением $P_a = \text{const}$ соотношением [2—4]

$$\frac{P_i - P_a}{\rho} = -D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho} \quad (1.3)$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона льда, h — толщина льда, η — величина прогиба пластины над горизонтальным положением равновесия.

Если предположить, что под ледяным покровом не образуется полостей, свободных от жидкости, то величина прогиба связана со скоростью частиц жидкости на поверхности кинематическим граничным условием

$$L\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad y = \eta \quad (1.4)$$

$$L = \partial/\partial t + (\Omega\eta + V\partial\varphi/\partial x)\partial/\partial x$$

На дне выполняется условие непротекания

$$\partial\varphi/\partial y = 0, \quad y = H \quad (1.5)$$

Рассматривая движения малых амплитуд, получаем линейную краевую задачу для уравнения Лапласа (1.1) в области $y \in (0, H)$, $x \in (-\infty, \infty)$ с граничными условиями (1.5) и условием

$$L_l^2\varphi - \Omega L_l\psi - g \frac{\partial \varphi}{\partial y} - D \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0, \quad y = 0 \quad (1.6)$$

$$L_l = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x}$$

вытекающим из (1.2)—(1.4).

Решение типа периодических плоских волн запишем в виде

$$\varphi = A \operatorname{ch} [k(y - H)] \exp [i(kx + \omega t)] \quad (1.7)$$

Этот потенциал тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию (1.5). Подставляя выражение (1.7) в граничное условие (1.6), находим, что ω есть корень дисперсионного уравнения

$$G(k, \omega) \equiv (\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-) = 0, \quad \omega_{\pm} = -Vk - \frac{1}{2}\Omega \operatorname{th} kH (1 \pm \sqrt{1 - 4k(g + Dk^4)\Omega^{-2} \operatorname{cth} kH}) \quad (1.8)$$

На плоскости ω, k это дисперсионное соотношение имеет две ветви — положительную и отрицательную, которые определяются уравнениями $\omega = \omega_{\pm}^{\pm}(k)$, инвариантными относительно замены $\omega \rightarrow -\omega$, $k \rightarrow -k$, поэтому обе ветви дисперсионной кривой антисимметричны относительно начала координат.

При малых k из (1.8) находим

$$c_{\pm} = k^{-1}\omega_{\pm} = -V - \frac{1}{2}\Omega H (1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}), \quad \lambda = g/(H\Omega^2) \quad (1.9)$$

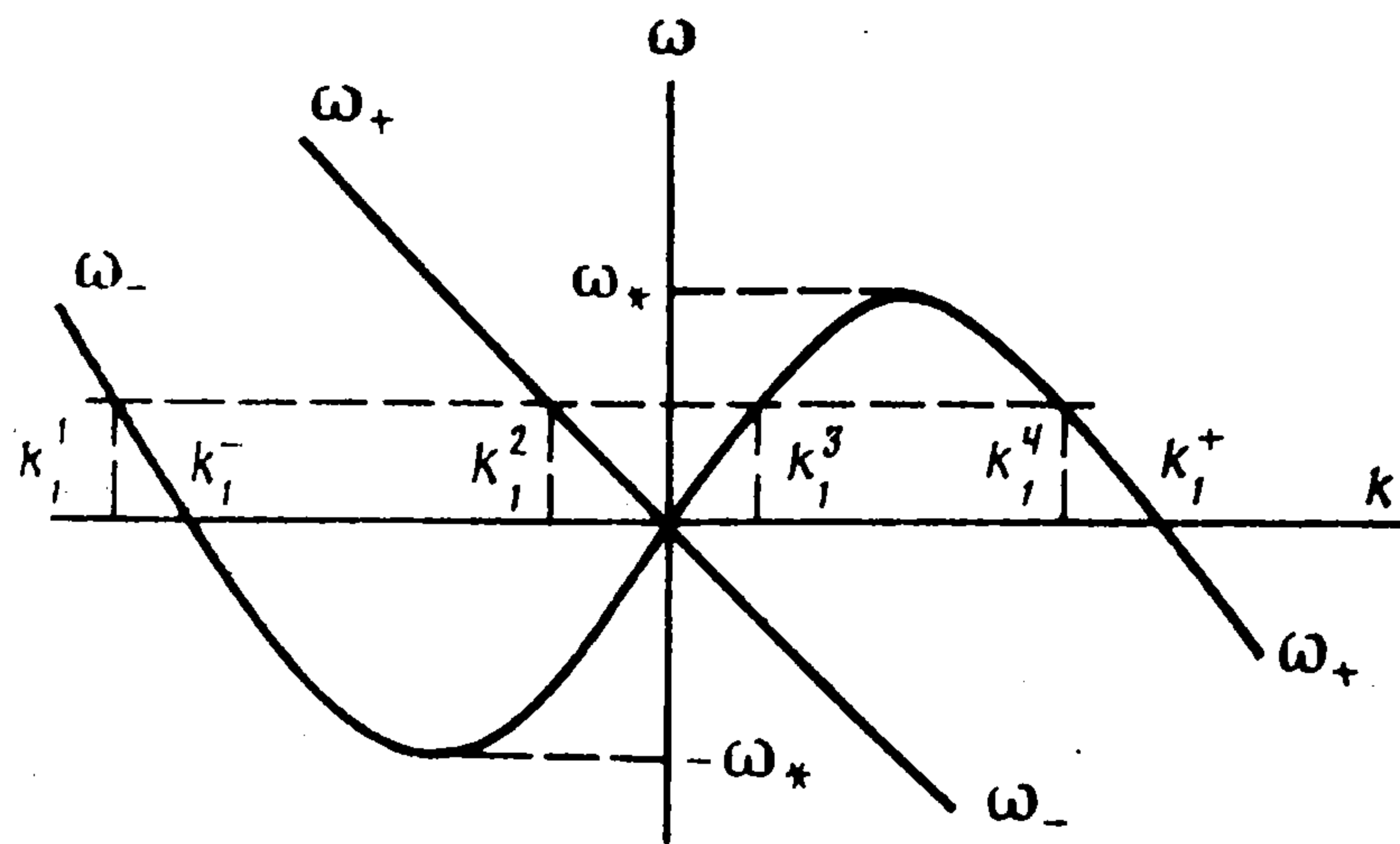
Положим

$$V_d = 0, \quad 0 \leq V \lesssim 10 \text{ см/с}, \quad 10 \text{ м} \lesssim H \lesssim 10^3 \text{ м} \quad (1.10)$$

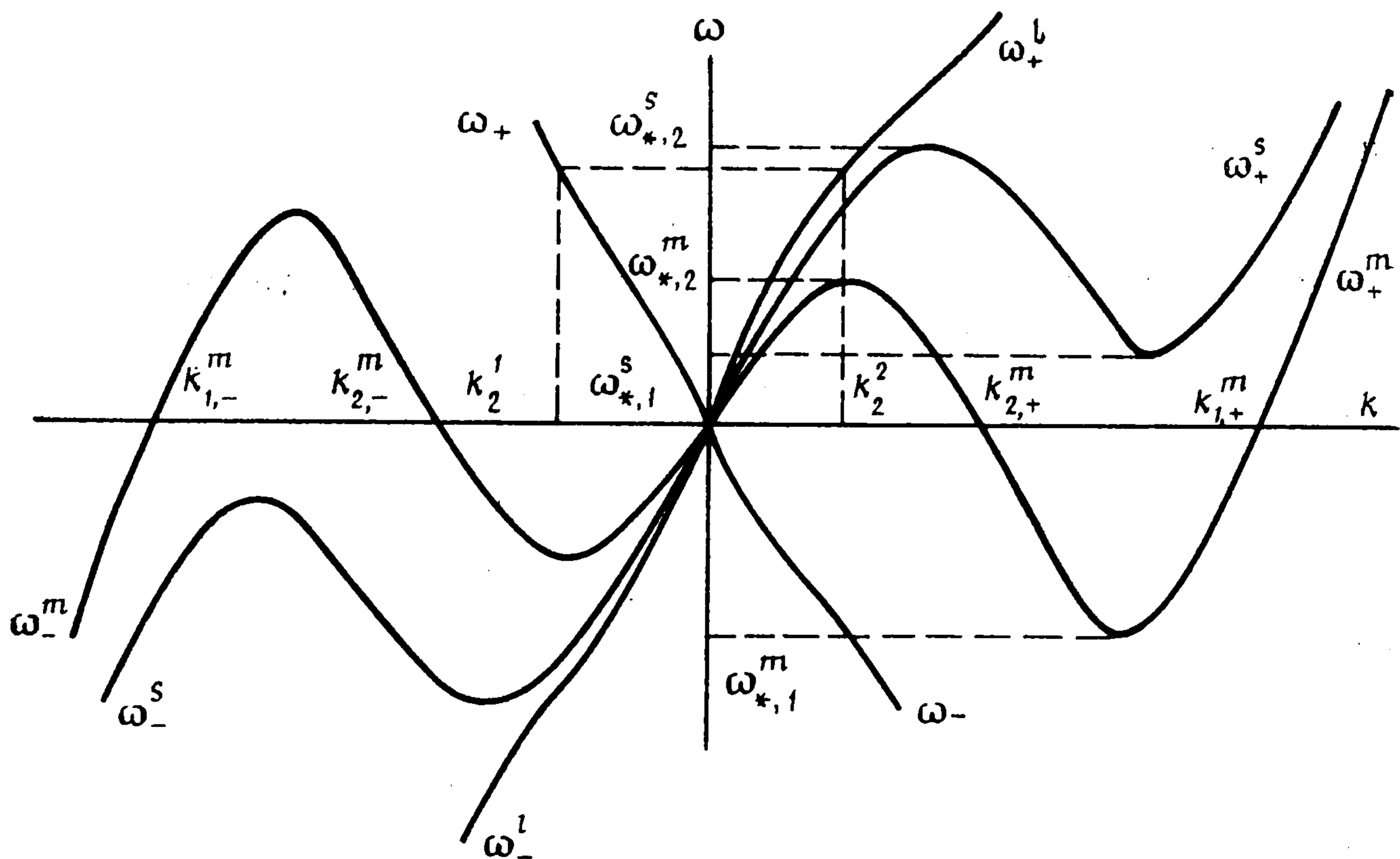
Оценки (1.10) связаны с реальными масштабами скоростей течений и глубин в океане.

Из (1.10) следует, что $\lambda \gtrsim 10^4$. Поэтому скорости c_{\pm} длинных волн имеют разные знаки. Положительная ветвь дисперсионного соотношения находится в первом и четвертом квадрантах и отрицательная — во втором и третьем квадрантах плоскости ω, k при малых k .

Рассмотрим случай $D = 0$. Типичные графики кривых $\omega = \omega_{\pm}(k)$ представлены на фиг. 1. Из (1.8) следует, что $\omega_{\pm} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow +\infty$



Фиг. 1



Фиг. 2

и $\omega_{\pm} \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow -\infty$. На дисперсионных кривых ω_+ при $k > 0$ и ω_- при $k < 0$ имеются локальные максимум и минимум соответственно, которым соответствуют частоты ω_* и $-\omega_*$. При $\omega = 0$ уравнение (1.8) имеет ненулевое решение $k = k_1^{\pm}$ (фиг. 1), соответствующее волнам, блокируемому потоком и имеющим нулевую фазовую скорость. При $|\omega| < \omega_*$ существует четыре волны с частотой ω и различными волновыми числами k_1^1, \dots, k_1^4 (фиг. 1). Волны $k_1^{1,2}$ распространяются по течению жидкости и волны $k_1^{3,4}$ — против течения. При $|\omega| > \omega_*$ существует две волны с частотой ω и различными волновыми числами, распространяющиеся вдоль по течению (фиг. 1). Полагая $V = 10$ см/с, $H = 100$ м, получаем оценки:

$$\begin{aligned} \omega_* &\approx 20 \text{ с}^{-1}, \quad 10^3 \text{ м}^{-1} \lesssim |k_1^1| \lesssim 1,5 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}, \\ |k_1^2| &\lesssim 60 \text{ м}^{-1}, \quad |k_1^3| \lesssim 300 \text{ м}^{-1}, \quad 300 \text{ м}^{-1} \lesssim |k_1^4| \lesssim 10^3 \text{ м}^{-1}, \\ &0 < \omega < \omega_* \end{aligned} \quad (1.11)$$

Видно, что среди волн частоты $|\omega| < \omega_*$ обязательно присутствуют волны из капиллярного диапазона.

Рассмотрим случай $D > 0$. Из (1.8) находим, что $\omega_+ \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \pm\infty$ и $\omega_- \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \pm\infty$. Графики дисперсионных кривых $\omega = \omega_+(k)$ и $\omega = \omega_-(k)$ при различных значениях D имеют подобную форму в областях $k < 0$ и $k > 0$ соответственно (на фиг. 2 они представлены кривыми ω_{\pm}).

При $D < D_1$, где D_1 решение системы уравнений

$$\partial\omega_+/\partial k = \partial^2\omega_+/\partial k^2 = 0$$

на ветвях ω_+ при $k > 0$ и ω_- при $k < 0$ имеются локальные максимум и минимум, которым соответствуют частоты $\pm\omega_{*,1}^{m,s}$, $\pm\omega_{*,2}^{m,s}$ (фиг. 2). При $D < D_2$, где D_2 — решение уравнений

$$\partial\omega_+/\partial k = \omega_+ = 0$$

выполняется условие $\omega_{*,1}^m < 0$.

Типичные графики ω_+ при $k > 0$ и ω_- при $k < 0$ представлены на фиг. 2 кривыми ω_{\pm}^m .

В этом случае уравнение (1.8) при $\omega = 0$ имеет четыре ненулевых корня $k_{1,\pm}^m$, $k_{2,\pm}^m$ (фиг. 2), соответствующих волнам, блокируемым потоком и имеющим нулевую фазовую скорость. Обозначим

$$\omega_{\min} = \min(\omega_{*,2}^m, -\omega_{*,1}^m), \quad \omega_{\max} = \max(\omega_{*,2}^m, -\omega_{*,1}^m)$$

При $|\omega| < \omega_{\min}$ уравнение (1.8) имеет шесть корней, соответствующих шести волнам с частотой ω , из которых три волны распространяются по течению и три — против течения. При $\omega_{\min} < |\omega| < \omega_{\max}$ уравнение (1.8) имеет четыре корня, соответствующих четырем волнам с частотой ω , из которых при $\omega_{\min} = \omega_{*,2}^m$ одна распространяется против течения и три — по течению, и при $\omega_{\min} = -\omega_{*,1}^m$ одна волна распространяется по течению и три волны — против течения. При $|\omega| > \omega_{\max}$ уравнение (1.8) имеет два корня, соответствующих двум волнам с частотой ω , бегущим в разные стороны.

При $D_2 < D < D_1$ выполняется условие $\omega_{*,2}^s > \omega_{*,1}^s > 0$. Типичные графики ω_+ при $k > 0$ и ω_- при $k < 0$ представлены на фиг. 2 кривыми ω_{\pm}^s . В этом случае уравнение (1.8) не имеет отличных от нуля решений при $\omega = 0$. При $|\omega| < \omega_{*,1}^s$ уравнение (1.8) имеет два корня, соответствующих двум волнам с частотой ω , бегущим в разные стороны. При $\omega_{*,1}^s < |\omega| < \omega_{*,2}^s$ уравнение (1.8) имеет четыре корня, соответствующих четырем волнам с частотой ω , из которых одна распространяется по течению и три — против течения. При $|\omega| > \omega_{*,2}^s$ уравнение (1.8) имеет два корня, соответствующих двум волнам с частотой ω , бегущим в разные стороны.

При $D > D_1$ уравнение (1.8) имеет два корня $k_2^{1,2}$ соответствующих двум волнам с частотой ω , бегущим в разные стороны. Типичные графики ω_+ при $k > 0$ и ω_- при $k < 0$ представлены на фиг. 2 кривыми ω_{\pm}^l .

Рассмотрим случай, интересный с точки зрения физических приложений. Пусть на поверхности жидкости плавает однородная ледяная пластина. Следуя [10] положим

$$E = 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \rho = 900 \text{ кг/м}^3, \quad h = 1 \text{ м} \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что дисперсионные кривые соответствуют случаю $D > D_1$.

2. Рассмотрим задачу о дифракции периодических волн фиксированной частоты ω на кромке ледяного покрова, плавающего на поверхности жидкости в области $x > 0$. Все функции, входящие в задачу, зависят от времени посредством множителя $e^{i\omega t}$, который в дальнейшем опускается. Предполагается, что параметры льда и жидкости удовлетворяют оценкам (1.11), (1.12).

Источник периодических возмущений находится либо на $\pm\infty$ по x , либо на кромке льда в точке $x = y = 0$. Поэтому необходимо задать амплитуды волн, приходящих из бесконечности на кромку льда, а также силу и момент, действующие на кромку

$$D\partial^2\eta/\partial x^2 = M, \quad D\partial^3\eta/\partial x^3 = N, \quad x \rightarrow +0 \quad (2.1)$$

Здесь M , N — амплитуды момента и силы.

Отметим, что расход жидкости через любой замкнутый объем, расположенный внутри области движения, равен нулю. Однако расход жидкости вблизи ребра пластины может быть ненулевым. Поэтому на

ребре пластины должно выполняться контактно-граничное условие

$$V(\eta^- - \eta^+) = Q, \quad \eta^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \eta \quad (2.2)$$

Величина Q должна определяться из решения внутренней задачи об обтекании края пластины. При $V = D = 0$ условия (2.1), (2.2) выполняются тождественно.

При $x \rightarrow \pm\infty$ решение задачи должно иметь асимптотику

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi_t^- + \varphi_r^-, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \varphi \rightarrow \varphi_t^+ + \varphi_r^+, \quad x \rightarrow +\infty \\ \varphi_t^- &= T_1^- \theta(k_1^1) + T_2^- \theta(k_1^2), \quad \varphi_t^+ = T_2^+ \theta(k_2^2) \\ \varphi_r^- &= R_1^- \theta(k_1^3) + R_2^- \theta(k_1^4), \quad \varphi_r^+ = R_2^+ \theta(k_2^1) \\ \theta(k) &= [\operatorname{ch} k(y - H) / \operatorname{ch} kH] e^{ikx} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Потенциалы φ_t^- , φ_r^- соответствуют волнам, бегущим вправо, и φ_r^- , φ_t^+ — волнам, бегущим влево.

Итак, для решения рассматриваемой задачи надо найти функции φ , ψ гармонические в области $y \in (0, H)$, $x \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.5), (1.6), где надо положить $D = 0$ при $x < 0$ и $D > 0$ при $x > 0$. Решение этой задачи, как будет видно из дальнейшего, не единственно и зависит от шести произвольных постоянных A_0, \dots, A_5 , которые определяются из контактно-граничных условий (2.1), (2.2) и из задания асимптотики решения на бесконечности (2.3).

Решение задачи представим в виде интеграла Фурье

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} p(k) \theta(k) dk \\ \psi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} p(k) \frac{\partial}{\partial y} \theta(k) dk \end{aligned} \quad (2.4)$$

Оно тождественно удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию на дне (1.5).

Рассмотрим вместо (1.6) следующие граничные условия для функций φ , ψ при $y = 0$:

$$\begin{aligned} L_l^2 \varphi - \Omega L_l \psi - g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \left(\alpha_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \alpha_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \right. \\ \left. + i \alpha_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha_4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad x < 0 \\ L_l^2 \varphi - \Omega L_l \psi - g \frac{\partial \varphi}{\partial y} - D \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_4$ выбираются таким образом, чтобы корни уравнения $G_1 = 0$ сместились в нижнюю полуплоскость, а корни уравнения $G_2 = 0$ — в верхнюю полуплоскость комплексного переменного k . Это позволяет провести факторизацию в методе Винера — Хопфа и учесть в решении задачи, которое получается предельным переходом $\mu \rightarrow 0$, все типы незатухающих волн частоты ω .

Перепишем граничные условия (2.5) с учетом (2.4) в виде [6]

$$\begin{aligned} \int_{L_1} p G_1 e^{ikx} dk = 0, \quad x < 0; \quad \int_{L_2} p G_2 e^{ikx} dk = 0, \quad x > 0 \\ G_1 = G(D = 0) + i\mu G_-, \quad G_2 = G(D > 0) + i\mu k \\ G_- = k(\alpha_1 - \alpha_3 k - \operatorname{th} kH(\alpha_2 + \alpha_4 k)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Im} k < 0, \quad k \in L_1, \quad |k| \rightarrow \infty; \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad k \in L_2, \quad |k| \rightarrow \infty$$

Считая, что коэффициент μ может принимать как угодно малые по модулю значения, находим, что уравнения $G_{1,2} = 0$ имеют корни, отличающиеся от $k_1^1, \dots, k_1^4, k_2^1, k_2^2$ на малые мнимые добавки

$$\Delta k_1^j \approx - \frac{i\mu G_-(k_1^j)}{\partial G / \partial k (D=0, k_1^j)} \quad (2.7)$$

$$\Delta k_2^{1,2} \approx - \frac{i\mu k_2^{1,2}}{\partial G / \partial k (D>0, k_2^{1,2})}$$

Из условия $\text{Im } \Delta k_2^{1,2} > 0$ находим, что $\mu > 0$. Коэффициенты α_j можно подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $\text{Im } \Delta k_1^j < 0$.

Условия (2.6) будут удовлетворены, если положить

$$pG_1 = \Phi^-, \quad pG_2 = \Phi^+ \quad (2.8)$$

где Φ^+, Φ^- — функции, аналитичные в верхней и нижней полуплоскостях k соответственно.

Представим $G_{1,2}$ в виде

$$G_1 = g_1 (V^2 - i\mu (\alpha_3 + \alpha_4)) \Pi^+ / (k^2 + \mu^2) \quad (2.9)$$

$$G_2 = g_2 D (k^2 + \mu^2)^{3/2} \Pi^-$$

$$\Pi^+ = \prod_{j=1}^4 (k - k_1^j), \quad \Pi^- = (k - k_2^1)(k - k_2^2)$$

Функции $g_{1,2}$ аналитичны, не имеют нулей, стремятся к единице при $|k| \rightarrow \infty$ вблизи действительной оси k и могут быть факторизованы

$$g_j = g_j^+ g_j^-, \quad g_j^\pm = \exp \left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp i0}^{\infty \mp i0} \frac{\ln g_j}{k-t} dk \right]$$

Функции g_j^+ и g_j^- аналитичны, не имеют нулей и стремятся к единице при $|k| \rightarrow \infty$ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Из (2.8), (2.9) находим

$$\frac{\Phi^+ \Pi^+ g_1^+}{D g_2^+ (k + i\mu)^{3/2}} = \frac{\Phi^- \Pi^- (k - i\mu)^{3/2} g_2^-}{V^2 g_1^-} = F \quad (2.10)$$

Функция F аналитична во всей плоскости k . Из сходимости интеграла в (2.4) следует, что $p(k) = O(|k|^{-1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $|k| \rightarrow \infty$. Учитывая формулы (2.8), (2.9) получаем

$$F = O(|k|^{11/2-\varepsilon}), \quad |k| \rightarrow \infty$$

Отсюда по теореме Лиувилля находим, что F — полином пятой степени

$$F(k) = \sum_{j=0}^5 A_j k^j \quad (2.11)$$

Постоянные A_j определяются из (2.1)–(2.3). Подставляя ряд (2.11) в (2.10), находим Φ^+ и Φ^- . Затем по формулам (2.8) определяем p . Подставляя p в (2.4), вычисляя интегралы по вычетам и полагая в решении $\mu = 0$, находим

$$\varphi = \varphi_p^- + \varphi_f^-, \quad x < 0; \quad \varphi = \varphi_p^+ + \varphi_f^+, \quad x > 0 \quad (2.12)$$

$$\varphi_p^- = \sum_{l=1}^4 F(k_1^l) \chi_l^{-\theta}(k_1^l), \quad \varphi_f^- = \sum_{j=-1}^{-\infty} F(b_1^j) \chi_j^{-\theta}(b_1^j)$$

$$\varphi_p^+ = \sum_{l=1}^2 F(k_2^l) \chi_l^{+\theta}(k_2^l), \quad \varphi_f^+ = \sum_{j=1}^{\infty} F(b_2^j) \chi_j^{+\theta}(b_2^j)$$

$$\chi_l^- = \frac{V^2 g_1^-}{\Pi^- g_2^- \partial G_1 / \partial k} \Big|_{k=k_1^l} (k_1^l)^{-5/2} e^{i\varphi_l^-}$$

$$\varphi_{1,2}^- = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_{3,4}^- = 0$$

$$\chi_l^+ = \frac{D g_2^+}{\Pi^+ g_1^+ \partial G_2 / \partial k} \Big|_{k=k_2^l} (k_2^l)^{5/2} e^{i\varphi_l^+}$$

$$\varphi_1^+ = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2^+ = 0 \quad (2.13)$$

В формулах (2.13) и в дальнейшем надо положить $k_n^j = b_n^j$, $\varphi_j^\pm = 0$ при замене l на j . Величины b_n^j ($n = 1, 2, j \in Z$) — комплексные корни уравнений $G_n = 0$, лежащие при $j > 0$ и $j < 0$ в верхней и нижней полуплоскостях k соответственно. При извлечении корня из b_n^j надо полагать, что плоскость k разрезана вдоль положительной части мнимой оси при вычислении χ_j^- и вдоль отрицательной части мнимой оси при вычислении χ_j^+ . При больших $|j|$ корни b_l^j имеют асимптотику

$$b_1^j = i \frac{\pi}{H} \left(j + \frac{1}{2} \right) - i \frac{H}{\pi} \frac{\Omega V + g}{j V^2} + O(j^{-2})$$

$$b_2^j = i \frac{\pi}{H} j + O(j^{-3})$$

Из линеаризованного условия (1.4) находим

$$\eta = \sum_{l=1}^2 F(k_2^l) \Phi_l^+ \exp(ik_2^l x) + \sum_{j=1}^{\infty} F(b_2^j) \Phi_j^+ \exp(ib_2^j x), \quad x > 0 \quad (2.14)$$

$$\eta = \sum_{l=1}^4 F(k_1^l) \Phi_l^- \exp(ik_1^l x) + \sum_{j=-1}^{-\infty} F(b_1^j) \Phi_j^- \exp(ib_1^j x), \quad x < 0$$

$$\Phi_l^\pm = i \frac{k_{2,1}^l \chi_l^\pm \operatorname{th}(k_{2,1}^l H)}{\omega + V k_{2,1}^l}$$

Из (2.1)–(2.3) получаем систему шести линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_j полинома F :

$$F(k_1^{1,2}) \chi_{1,2}^- = T_{1,2}^-, \quad F(k_2^2) \chi_2^+ = T_2^+ \quad (2.15)$$

$$V \left(\sum_{l=1}^4 F(k_1^l) \Phi_l^- - \sum_{l=1}^2 F(k_2^l) \Phi_l^+ + \sum_{j=-1}^{-\infty} F(b_1^j) \Phi_j^- - \sum_{j=1}^{\infty} F(b_2^j) \Phi_j^+ \right) = Q$$

$$\sum_{l=1}^2 (k_2^l)^2 F(k_2^l) \Phi_l^+ + \sum_{j=1}^{\infty} (b_2^j)^2 F(b_2^j) \Phi_j^+ = -MD^{-1}$$

$$\sum_{l=1}^2 (k_2^l)^3 F(k_2^l) \Phi_l^+ + \sum_{j=1}^{\infty} (b_2^j)^3 F(b_2^j) \Phi_j^+ = iND^{-1}$$

Коэффициенты отражения $R_{1,2}^-, R_2^+$ определяются из соотношений (2.3) с использованием (2.12)

$$R_{1,2}^- = F(k_1^{3,4}) \chi_{3,4}^-, \quad R_2^+ = F(k_2^1) \chi_1^+$$

Потенциал скоростей φ , определяемый формулами (2.12) непрерывен во всей области движения, включая точку $x = y = 0$ и имеет производные любых порядков всюду, кроме точки $x = y = 0$. Производные $\partial\varphi/\partial x$, $\partial^4\eta/\partial x^4$ при $x > 0$ и $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\eta/\partial x$ при $x < 0$ имеют особенности в точке $x = y = 0$ и возрастают при приближении к кромке обратно пропорционально расстоянию до нее. Возрастание скоростей $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$ объясняется тем, что расход жидкости через окружность малого радиуса с центром в начале координат не равен нулю. Производные $\partial\varphi/\partial x$ при $x < 0$ и $\partial\varphi/\partial y$, $\partial^n\eta/\partial x^n$ ($n \leq 3$) при $x > 0$ конечны при приближении

к кромке, а возвышение поверхности жидкости η имеет разрыв первого рода в точке $x = y = 0$.

Функции φ_p^\pm определяют асимптотику φ при $x \rightarrow \pm\infty$ и соответствуют незатухающим периодическим волнам, которые приносят и уносят энергию от кромки льда в бесконечность. При $H \rightarrow \infty$, $y \rightarrow H$ функции φ_p^\pm экспоненциально затухают. Слагаемые φ_f^\pm дают вклад в решение вблизи кромки и экспоненциально затухают при удалении от нее. При $H \rightarrow \infty$, $y \rightarrow H$ экспоненциальное затухание φ_f^\pm имеет осциллирующий характер.

3. Сделаем некоторые выводы. Наличие в жидкости потока с ненулевой скоростью V на поверхности приводит к тому, что в точке $x = y = 0$ необходимо выставить контактно-граничное условие (2.2), задающее расход жидкости Q в данной точке. Условие (2.2) соответствует занлескиванию волны через кромку льда или периодическому источнику или стоку жидкости, расположенному около кромки. Если $V = 0$, то $Q = 0$ и условие (2.2) выполняется тождественно.

Из (1.11), (1.12) следует, что существует критическая частота ω_* , такая, что при $\omega > \omega_*$ волновые числа отраженных волн $k_1^{3,4}$ становятся комплексными. Поэтому при $\omega > \omega_*$ отраженное возмущение асимптотически затухает при удалении от кромки льда в область $x < 0$.

Дифракция поверхностной волны k_1^2 (фиг. 1) с частотой $\omega < \omega_*$ на кромке является причиной генерации волны k_1^4 из капиллярного диапазона, которая распространяется в сторону чистой воды. Если $V = 0$, т. е. на поверхности жидкости течение отсутствует, то капиллярные волны не возбуждаются.

Приходящая на кромку короткая волна k_1^1 в результате дифракции возбуждает подо льдом и на чистой воде длинные волны.

Авторы благодарят Р. В. Гольдштейна и А. Г. Куликовского за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шрира В. И. О нелинейных волнах на поверхности слоя жидкости с постоянной завихренностью // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 6. С. 1332—1336.
2. Катаржи И. Г., Мажарова И. Л., Пелиновский Е. Н. Трансформация волн течением с линейным сдвигом скорости по глубине // Океанология. 1989. Т. 29. № 2. С. 198—204.
3. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037—1043.
4. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 240—250.
5. Слепян Л. И., Фадеев В. М. Отражение, преломление и излучение волн в кусочно-однородной упругой системе, взаимодействующей с жидкостью // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 325—329.
6. Гольдштейн Р. В., Марченко А. В. Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 924—930.
7. Габов С. А., Свешников А. Г. О дифракции внутренних волн на кромке ледового поля // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 1. С. 16—20.
8. Варламов В. В. К вопросу о дифракции внутренних волн на кромке полубесконечной пленки // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 1. С. 161—164.
9. Варламов В. В. О рассеянии внутренних волн краем упругой пластины // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 3. С. 413—421.
10. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед: Физические свойства. Современные методы гляциологии. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 384 с.