Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 532.5 : 534.1

А. Г. Петров, А. Н. Чувашов

О ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ПОТОКОВ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исследуется плоская задача Коши—Пуассона о волнах на границе раздела двух потоков тяжелой идеальной несжимаемой жидкости, движущихся с различными скоростями при малой неоднородности плотности. Предлагается метод, позволяющий исследовать не только прогрессивные и стоячие волны, но и общую задачу Коши—Пуассона при учете различия скоростей потоков. В основу метода положено линейное интегральное соотношение, связывающее значение гармонической функции на границе и ее производной. Получена система интегродифференциальных уравнений для функции, определяющей профиль волны и скачка потенциала на границе раздела потоков. Найденные уравнения внутренних волн удобны для аналитического и численного исследований. Показана аналогия линейной задачи Коши—Пуассона для рассматриваемых внутренних волн и волн на поверхности тяжелой жидкости. Найдены решения типа прогрессивных и стоячих волн разложением в ряды до третьего порядка малости по амплитуде волны.

Ранее рассматривалась задача о прогрессивных внутренних волнах конечной амплитуды [1, 2] и аналогичная задача [3] при учете различия скоростей верхнего и нижнего потоков. Было дано [4] решение задачи о свободных конечных колебаниях границы раздела двух неограниченных тяжелых жидкостей, покоящихся на бесконечности.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматриваются плоскопараллельные потенциальные волновые течения тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в двух полубесконечных областях Ω_+ и Ω_-, разделенных периодической кривой

$$X = x(s, t),\ Y = y(s, t) \tag{1.1}$$

$$x(s + s_0, t) = \lambda + x(s, t),\ y(s + s_0, t) = y(s, t)$$

где s — параметр, определяющий длину дуги кривой, s_0 — длина дуги одного периода волны, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Ось X направлена по среднему уровню границы раздела, ось Y направлена вертикально вверх, c_+, c_-, ρ_+, ρ_- — невозмущенные скорости и плотности верхнего (индекс плюс) и нижнего (индекс минус) потоков.

Предполагается, что средний уровень границы раздела не меняется, т. е.

$$\int_0^\lambda y\, dx = 0 \tag{1.2}$$

Поля скоростей $\mathbf{v}_+$ и $\mathbf{v}_-$ соответственно в областях Ω_+ и Ω_- можно представить в виде

$$\mathbf{v}_+ = \mathbf{c}_+ + \nabla\varphi_+,\ \mathbf{v}_- = \mathbf{c}_- + \nabla\varphi_- \tag{1.3}$$

где скорости $\nabla\varphi_+$ и $\nabla\varphi_-$ стремятся к нулю соответственно при $Y \to +\infty$ и $Y \to -\infty$, а потенциалы φ_+ и φ_- имеют период λ по переменной X. Видно, что среднее значение потенциалов по горизонтальному отрезку

$Y = Y_0$ $(0 \leqslant X \leqslant \lambda)$ не зависит от Y

$$\bar{\varphi}_\pm = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \varphi_\pm (X, Y)\, dX, \qquad \frac{d\bar{\varphi}_\pm}{dY} \equiv 0 \tag{1.4}$$

Действительно, дифференцируя равенство (1.4) по Y получим расход жидкости через горизонтальный отрезок, равный нулю в силу (1.2). Таким образом, средние постоянные величины $\bar{\varphi}_+$ и $\bar{\varphi}_-$ можно считать равными предельным значениям соответствующих потенциалов при $Y \to + \infty$ и $Y \to -\infty$.

Спроектируем скорости (1.3) на нормаль $\mathbf{n}$, компоненты которой

$$n_x = -\partial y/\partial s,\ n_y = \partial x / \partial s \tag{1.5}$$

и запишем условия непрерывности нормальной скорости v на границе

$$v = -c_+ \partial y/\partial s + \partial \varphi_+/\partial n = -c_- \partial y / \partial s + \partial \varphi_- / \partial n \tag{1.6}$$

Потенциалы φ_+ и φ_- удовлетворяют уравнению Лапласа соответственно в областях Ω_+ и Ω_-, поэтому их нормальные скорости и значения на границе связаны линейными соотношениями

$$\mathbf{A} \partial \varphi_\pm / \partial n - \mathbf{B} \varphi_\pm \mp {}^1/_2 (\varphi_\pm - \bar{\varphi}_\pm) \tag{1.7}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы, вид которых и свойства будут указаны в разд. 3. Соотношения (1.6) и (1.7) представляют четыре уравнения для определения пяти функций v, $\partial\varphi_+/\partial n$, $\partial \varphi_- / \partial n$, φ_+, φ_-, заданных на известной границе. Недостающее пятое уравнение вытекает из условия непрерывности давления.

Идея применения интегральных соотношений типа (1.7) ранее применялась во многих работах [5] и, в частности, для численного исследования волн на поверхности тяжелой жидкости. Ниже этот метод распространяется для изучения внутренних волн. Непосредственная реализация метода затруднительна, так как требует решения сложной системы интегральных уравнений. В разд. 2 эта система разрешается аналитически относительно трех неизвестных функций и, таким образом, будет получена система двух уравнений относительно двух оставшихся функций.

2. Решение системы интегральных уравнений. Вместо функций φ_+ и φ_- и чисел c_+ и c_- введем φ, f, c, Δc при помощи соотношений

$$\varphi_\mp = \varphi \pm {}^1/_2 f,\ c_\mp = c \pm {}^1/_2 \Delta c \tag{2.1}$$

Подставим выражения (1.6) и (2.1) в систему (1.7)

$$\mathbf{A}\, [v + (c \pm {}^1/_2 \Delta c)\, \partial y / \partial s] - \mathbf{B}\, [\varphi \pm {}^1/_2 f] = \mp {}^1/_2\, (\varphi \pm {}^1/_2 f - \bar{\varphi}_\mp) \tag{2.2}$$

Разрешаем систему (2.2) относительно функций v и φ.

Для этого введем функции тока ψ_- и ψ_+, соответствующие φ_-, φ_+ и запишем условия Коши—Римана на границе для аналитических функций $\varphi_\pm + i\psi_\pm$

$$\partial \psi_\pm / \partial s = -\partial \varphi_\pm / \partial n, \quad \partial \psi_\pm / \partial n = \partial \varphi_\pm / \partial s \tag{2.3}$$

Для $\psi_\pm$ справедливы также соотношения (1.7), которые при помощи (2.3) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{A}\, (\partial \varphi / \partial s \mp {}^1/_2 \partial f / \partial s) - \mathbf{B} \psi_\pm = {}^1/_2\, (\psi_\pm - \bar{\psi}_\pm) \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (1.6) следует

$$\partial\, (\psi_- - \psi_+)/\partial s = -\partial\, (\varphi_- - \varphi_+)/\partial n = \Delta c\, \partial y / \partial s \tag{2.5}$$

$$\psi_- - \psi_+ = \Delta c y + \bar{\psi}_- - \bar{\psi}_+,\ \psi_\pm = \psi \pm {}^1/_2\, (-\Delta c y + \bar{\psi}_- - \bar{\psi}_+)$$

Подставив последнее соотношение в (2.4), получим систему, аналогичную (2.2)

$$\mathbf{A}\,(\partial\varphi/\partial s \mp {}^1/_2\partial f/\partial s) - \mathbf{B}\,(\psi \pm {}^1/_2\Delta c y) = \mp {}^1/_2\,(\psi \mp {}^1/_2\Delta c y - \overline{\psi}) \qquad (2.6)$$

Из систем уравнений (2.2) и (2.6) найдем

$$\varphi = \overline{\varphi} + \mathbf{B}f - \Delta c\mathbf{A}\partial y/\partial s, \quad \psi = \overline{\psi} - \mathbf{A}\partial f/\partial s - \Delta c\mathbf{B}y \qquad (2.7)$$

Из (1.6) и (2.3) можно выразить v через ψ

$$v + c\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_- + \varphi_+) = -\frac{\partial\psi}{\partial s}$$

откуда найдем

$$v + c\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c\mathbf{B}y\right) \qquad (2.8)$$

При подстановке в систему уравнений (2.2), (2.6) ее решений, определяемых формулами (2.7), (2.8), очевидно, получим тождественные равенства. Отсюда вытекают следующие тождества, вскрывающие связь операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и их свойства

$$\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} - \mathbf{B}^2 f + \frac{1}{4}(f - \overline{f}) = 0$$

$$\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{B}f + \mathbf{B}\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} = 0 \qquad (2.9)$$

Тождества (2.9) справедливы для любых функций $y\,(s)$, $f\,(s)$.

3. Операторы А и В. Примем период рассматриваемого волнового движения равным 2π. Ядра операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ выражаются через функцию Грина W для полубесконечной полосы ширины 2π, ограниченной кривой $x\,(s,\,t)$, $y\,(s,\,t)$ с периодом по x, равным 2π:

$$W = {}^1/_2 \ln\left[2\,(\operatorname{ch}\overline{y} - \cos\overline{x})\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial n'} = -\frac{\partial y\,(s')}{\partial s'}\frac{\partial W}{\partial\overline{x}} + \frac{\partial x\,(s')}{\partial s'}\frac{\partial W}{\partial\overline{y}}$$

$$\overline{x} = x\,(s') - x\,(s), \quad \overline{y} = y\,(s') - y\,(s) \qquad (3.1)$$

$$\mathbf{A}f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0} W f\,(s')\,ds', \quad \mathbf{B}f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{s_0}\frac{\partial W}{\partial n'}\,(f\,(s') - f\,(s))\,ds'$$

Разлагая по степеням малого параметра функцию Грина

$$W = \ln\left|2\sin\frac{\overline{x}}{2}\right| + \frac{1}{8}\overline{y}^2/\sin^2\frac{\overline{x}}{2} + \ldots$$

$$\ln\left|2\sin\frac{\overline{x}}{2}\right| = -\cos\overline{x} - \frac{1}{2}\cos 2\overline{x} - \ldots - \frac{1}{n}\cos n\overline{x} - \ldots$$

можно найти разложения операторов по степеням $\overline{y}$ в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_2 + \ldots, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \ldots \qquad (3.2)$$

где индекс равен порядку малости по $\overline{y}$ соответствующего интегрального оператора. Подставляя разложение (3.2) в (2.9), получим тождества для операторов $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_1$, . . .

$$\mathbf{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{A}_0\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4}(f - \overline{f}) = 0, \quad \mathbf{A}_0\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{B}_1 f + \mathbf{B}_1\mathbf{A}_0\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (3.3)$$

Оператор $\mathbf{A}_0$ связан с известным в теории интегральных операторов оператором Гильберта $\mathbf{H}$ [6]

$$\mathbf{H}f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\overline{x}}{2}\,f\,(x')\,dx' = -2\mathbf{A}_0\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (3.4)$$

Следует отметить, что все формулы, полученные в разд. 3, распространяются на случай апериодического волнового движения с границей $y(x, t)$ и функцией $f(x, t)$, заданных на бесконечном отрезке $x \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. При этом W будет функцией Грина для полубесконечной области: $W = {}^1/_2 \ln(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ Операторы $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{H}$ таковы:

$$\mathbf{A}_0 f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln|x' - x| f(x')\, dx', \quad \mathbf{H} f = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x')(x' - x)^{-1} dx'$$

$$\mathbf{H}^2 f = -f, \ \mathbf{H} f = -2\mathbf{A}_0 f \tag{3.5}$$

4. Динамическое условие. Запишем интеграл Коши—Лагранжа для нижнего слоя идеальной жидкости плотности ρ_- в точке на границе раздела

$$p_- + \rho_- \left[\frac{\partial' \varphi_-}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_-}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_-}{\partial n}\right)^2 + gy \right] = b_-(t) \tag{4.1}$$

Перейдем в абсолютную систему координат, относительно которой поток имеет скорость c_-

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial n} = v + c_- \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial' \varphi_-}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} + c_- \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} \tag{4.2}$$

Выразим частную производную $\partial/\partial t$ при постоянных эйлеровых координатах через частную производную $\partial^l/\partial t$ в точке, движущейся по границе с касательной скоростью u, а производную по x через производные по s и по n

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = \frac{\partial^l \varphi_-}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_-}{\partial s} - v \frac{\partial \varphi_-}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi_-}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_-}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Отсюда при помощи (4.2) получим

$$\frac{\partial' \varphi_-}{\partial t} = \frac{\partial^l \varphi_-}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_-}{\partial s} + c_- \frac{\partial \varphi_-}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial \varphi_-}{\partial n}\right)^2 \tag{4.3}$$

Подставляя соотношение (4.3) в (4.1), с помощью (4.2) получим выражение давления p_- в абсолютной системе координат через функции от аргументов s, t, определяющих положение точки на границе раздела потоков. Аналогичное выражение справедливо и для p_+

$$p_\pm(s, t) = b_\pm - \rho_\pm \left[\frac{\partial^l \varphi_\pm}{\partial t} - u \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{2} v^2 + gy + \right.$$
$$\left. + c_\pm \left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial s} - v \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{1}{2} c_\pm^2 \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \right] \tag{4.4}$$

Условие непрерывности давления $p_+ - p_- = 0$ дает последнее замыкающее уравнение. При условии малой неоднородности плотности

$$\Delta\rho/\rho \ll 1, \ \rho = {}^1/_2 (\rho_- + \rho_+), \ \Delta\rho = \rho_- - \rho_+ \tag{4.5}$$

уравнение непрерывности давления на границе раздела примет вид

$$\frac{\partial^l f}{\partial t} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} gy + \left(u - c\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c \left(v + c \frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s} -$$
$$- \frac{\partial \varphi}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c \frac{\partial x}{\partial s}\right) + \Delta b \tag{4.6}$$

Добавляя уравнения для координат x, y границы раздела

$$\frac{\partial^l x}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial s} + u \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial^l y}{\partial t} = v \frac{\partial x}{\partial s} + u \frac{\partial y}{\partial s} \tag{4.7}$$

а также выражения (2.7), (2.8) для φ и v

$$\varphi = \bar{\varphi} + \mathbf{B} f - \Delta c \mathbf{A} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad v = \frac{\partial}{\partial s}\left(\mathbf{A} \frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c \mathbf{B} y - cy\right) \tag{4.8}$$

получим полную систему уравнений для определения функций $f(l, t)$, $x(l, t)$, $y(l, t)$, где $l(s, t)$ — произвольный параметр, определяющий положение точки на границе раздела. Касательная скорость $u(l, t)$ зависит от выбора параметра l, т. е. от распределения точек x, y на границе. Если исходить из соображений устойчивости численной схемы, то целесообразно [7] выбрать $l = s$, тогда точки x, y будут распределены равномерно по длине.

Под $\partial^l/\partial t$ понимается частная производная функций по времени при постоянном l.

Для аналитического исследования задачи удобно выбрать $l = x$, тогда из (4.6) и (4.7) получим систему уравнений для двух функций $f(x, t)$ и $y(x, t)$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} = \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{-1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \Delta c\right)\left(v_y \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \right.\\ \left. - c\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c c\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right] - \frac{\Delta\rho}{\rho} g y + \Delta b\\ \frac{\partial y}{\partial t} = v_y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{B} f - \Delta c \mathbf{A}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\ v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c \mathbf{B} y - c y\right)\end{gathered} \tag{4.9}$$

Система уравнений (4.9) или эквивалентная ей система (4.6), (4.7) описывает задачу Коши — Пуассона для внутренних волн конечной амплитуды при единственном ограничении $\Delta\rho/\rho \ll 1$.

5. Линейная задача Коши — Пуассона. Выделяя в системе уравнений (4.9) линейные по f и y члены, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^c f}{\partial t} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} g y - \frac{1}{2}\Delta c^2 \mathbf{H}\frac{\partial y}{\partial x}\\ \frac{\partial^c y}{\partial t} = -\frac{1}{2}\mathbf{H}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial^c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\mathbf{H}$ — оператор Гильберта, определяемый по (3.4), (3.5). Для получения решения системы (5.1) требуется задать начальные условия для функций f и y.

Проведем сравнение сформулированной задачи Коши — Пуассона для внутренних волн с аналогичной задачей для поверхностных волн. Как известно [8], для решения последней задачи требуется найти потенциал Φ — гармонический в нижней полуплоскости $Y \leqslant 0$, и функцию $\eta(X, t)$, удовлетворяющие при $Y = 0$ условиям

$$\frac{\partial' \Phi}{\partial t'} = -g\eta, \quad \frac{\partial' \eta}{\partial t'} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\mathbf{H}\frac{\partial \Phi}{\partial X}\left(\frac{\partial'}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t'} + c'\frac{\partial}{\partial X}\right) \tag{5.2}$$

Последнее равенство можно получить из интегрального соотношения (2.4) на границе полуплоскости.

Если скорости потоков равны ($\Delta c = 0$), то задача (5.1) эквивалентна задаче (5.2), при замене

$$\Phi = f/\mu, \ t' = t\mu, \ c' = c/\mu, \ \eta = y, \ \mu = \sqrt{2\Delta\rho/\rho} \tag{5.3}$$

решение задачи Коши — Пуассона для поверхностных волн дает решение задачи для внутренних волн.

В общем случае при $\Delta c \neq 0$ можно исключить y из системы (5.1), тогда получим уравнение для функции $f(x, t)$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial t^2} + \frac{1}{4}\Delta c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} g\mathbf{H}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{5.4}$$

Аналогично можно получить такое же уравнение для $y(x, t)$. Если воспользоваться соотношениями

$$\mathbf{H}(\cos kx) = -\sin kx, \quad \mathbf{H}(\sin kx) = \cos kx \tag{5.5}$$

то можно получить решение уравнения (5.4) в виде стоячей и прогрессивной волн. В системе координат, в которой $c = 0$ эти решения имеют вид

$$f = \sin\sigma t\cos kx, \quad f = \sin(kx - \sigma t) \tag{5.6}$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} gk - \frac{1}{4}k^2\Delta c^2}$$

Точное значение частоты линейных стоячих волн определяется формулой [9]

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} gk - \frac{1}{4}k^2\Delta c^2\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2\right)} \tag{5.7}$$

которая имеет отличие второго порядка малости по параметру $\Delta\rho/\rho$.

6. Прогрессивные и стоячие волны. Для определения прогрессивных волн в уравнениях (4.9) следует положить $v_y = \partial y/\partial t = 0$ и $\partial f/\partial t = 0$, тогда система уравнений примет вид

$$cy = \mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c\mathbf{B}y \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \Delta c\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta c\mathbf{A}\frac{\partial y}{\partial s} - \mathbf{B}f\right) - c\frac{\partial f}{\partial x} + c\Delta c\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 +$$
$$+ \left(\Delta b - \frac{\Delta\rho}{\rho} gy\right)\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) = 0$$

Решение системы (6.1), порожденное линейным приближением (5.6) с точностью до членов третьего порядка имеет вид

$$ky = \varepsilon\cos kx + \varepsilon^2 y_2\cos 2kx + \varepsilon^3 y_3(-\cos kx + \cos 3kx) \tag{6.2}$$
$$c^2 = c_0{}^2 + \varepsilon^2 c_2 \ (c_0{}^2 = q - {}^1/_4\Delta c^2, \quad c_2 = {}^1/_2 q + {}^1/_2 q^{-1}c_0{}^2\Delta c^2)$$
$$y_2 = {}^1/_2 q^{-1}c_0\Delta c, \quad y_3 = {}^1/_2 c_0{}^2\Delta c^2 q^{-2} - {}^1/_3$$
$$q = {}^1/_2 gk^{-1}\Delta\rho/\rho$$

Было найдено [3] аналитическое решение типа прогрессивной волны до второго порядка малости по амплитуде волны ε при учете сдвига скорости одного потока относительно другого (т. е. в нашей постановке $\Delta c \neq 0$). С точностью до выбора системы координат решение (6.2) согласуется с решением, данным в [3].

Для определения стоячих волн положим в (4.9) $c = 0$, система уравнений примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \Delta c\right)\left(v_y\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\Delta\rho}{\rho} gy + \Delta b, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = v_y \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{B}f - \Delta c\mathbf{A}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial s} + \Delta c\mathbf{B}y\right)$$

Решение системы (6.3) для профиля волны имеет вид

$$ky = \varepsilon \cos \sigma t \cos kx + \varepsilon^2 y_{22} \sin 2\sigma t \sin 2kx +$$
$$+ \varepsilon^3 [(y_{11} \cos \sigma t + y_{31} \cos 3\sigma t) \cos kx + (y_{13} \cos \sigma t + y_{33} \cos 3\sigma t) \times$$
$$\times \cos 3kx] \qquad (6.4)$$
$$\sigma^2 = \sigma_0{}^2 + \sigma_2 \varepsilon^2$$
$$\sigma_0{}^2 = \left(q - \frac{1}{4} \Delta c^2\right) k^2, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{16} (q - 4\Delta c^2 + q^{-1} \Delta c^4) k^2$$
$$y_{22} = {}^1/_2 q^{-1} k^{-1} \Delta c \sigma_0$$
$$y_{11} = \frac{9}{64} - \frac{5}{16} q^{-1} \Delta c^2 + \frac{1}{8} q^{-2} \Delta c^4 - \frac{1}{256} \Delta c^2 k^2 \sigma_0^{-2}$$
$$y_{31} = -\frac{1}{64} + \frac{1}{16} q^{-1} \Delta c^2 + \frac{1}{256} \Delta c^2 k^2 \sigma_0^{-2}$$
$$y_{13} = -\frac{3}{32}, \quad y_{33} = -\frac{1}{32} + \frac{1}{2} q^{-2} k^{-2} \Delta c^2 \sigma_0^2$$

В частном случае, при $\Delta c = 0$, имеем

$$ky = \varepsilon \cos \sigma t \cos kx + \varepsilon^3 \left[\left(\frac{9}{64} \cos \sigma t - \frac{1}{64} \cos 3\sigma t\right) \cos kx +\right.$$
$$\left. + \left(-\frac{3}{32} \cos \sigma t - \frac{1}{32} \cos 3\sigma t\right) \cos 3kx\right] \qquad (6.5)$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} gk - \frac{1}{32} \frac{\Delta\rho}{\rho} gk\varepsilon^2$$

Заметим, что в выражении (6.5) для профиля волны $y(x, t)$ отсутствует слагаемое при ε^2, более того, из уравнений (4.9) видно, что при $\Delta c = 0$ в главном приближении $\Delta\rho/\rho \ll 1$ волна симметрична относительно оси абсцисс. Частное при $\Delta c = 0$ решение (6.5) согласуется с решением [4], где проведено разложение до третьего порядка малости по параметру $\zeta = \varepsilon + {}^7/_{64}\varepsilon^3$. Разложение в ряды до пятого порядка по ε в [10] также находится в согласии с (6.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е.* Точное определение установившихся волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2 С. 43—75.
2. *Синха С. Р. П.* Точная теория установившихся волн на свободной поверхности и поверхности раздела двух жидкостей // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 1. С. 47—50.
3. *Saffman P. G., Yuen H. C.* Finite-amplitude interfacial waves in the presence of a current // J. Fluid Mech. 1982. V. 123. P. 459—476.
4. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории свободных конечных колебаний поверхности раздела двух неограниченных тяжелых жидкостей разных плотностей // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136. № 1. С. 51—54.
5. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир. 1987. 524 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.:Наука, 1970. 327 с.
7. *Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.* Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14. № 3. С. 797—802.
8. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. *Rottman J. W.* Steep standing waves at a fluid interface // J. Fluid Mech. 1982. V. 124. P. 283—306.

Москва

Поступила в редакцию
24.IV.1990