Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 532.5

В. Ф. Пивень

МЕТОД ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Предлагается метод исследования динамических процессов различной физической природы, основанный на осесимметричных обобщенных аналитических функциях. Такие функции удовлетворяют системе уравнений, описывающей осесимметричные процессы и являющейся канонической для двумерных динамических процессов в криволинейных слоях с определенными законами неоднородности характеристик среды, а также для некоторого вида ее анизотропии. Этот метод, примененный к некоторым пространственным краевым задачам фильтрации в кусочно-однородной среде, позволяет найти их решение в конечном виде.

1. Рассмотрим стационарные и квазистационарные физические процессы, описываемые линейным динамическим законом и уравнением неразрывности в безразмерном виде [1]

$$\mathbf{V} = K\nabla\varphi, \qquad \nabla\mathbf{V} = 0 \tag{1.1}$$

где V и φ — скорость и потенциал скорости процесса, в случае однородной среды K — постоянная скалярная величина, для неоднородной среды — функция координат, а для анизотропной среды — симметричный тензор второго ранга.

Для исследования плоскопараллельных процессов эффективен метод аналитических функций. Ряд положений, обобщающих теорию этих функций, известен [1—7]. Для осесимметричного случая удается полностью построить теорию функций, удовлетворяющих следующей из (1.1) при $K = 1$ системе уравнений [2]:

$$u = \varphi_x = \psi_y/y, \; v = \varphi_y = -\psi_x/y \tag{1.2}$$

(ψ — функция тока), описывающей процессы различной физической природы (фильтрация, теплопроводность, электропроводность и т. д.). Наиболее наглядной физической интерпретацией этих уравнений являются осесимметричные стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости.

В уравнениях (1.2) оси координат x, y выбраны в одной из полуплоскостей, проходящих через ось симметрии ox, u и v — проекции скоростей жидкости на эти оси.

Уравнения (1.2) описывают не только осесимметричные процессы. Они допускают более широкую физическую интерпретацию. Именно их можно рассматривать как уравнения процесса в однородном слое, толщина которого P меняется по линейному закону ($P = y$). Применяя к уравнениям (1.2) конформное преобразование, определяемое аналитическими функциями, приведем их в новых переменных x_1, y_1 к виду [2]

$$\varphi_{x_1} = \psi_{y_1}/P, \quad \varphi_{y_1} = -\psi_{x_1}/P \tag{1.3}$$

где $P = f(x_1, y_1)$ — гармоническая функция, а $f(x_1, y_1) = 0$ будет границей области, в которой происходит процесс.

Уравнения (1.3) описывают процессы в слоях с гармоническим законом изменения толщины $f(x_1, y_1)$. Если x_1, y_1 рассматривать как изотермические координаты поверхности, то слой будет располагаться на этой поверхности.

К системе уравнений (1.3) и, следовательно, к (1.2) сводятся уравнения (1.1), записанные для двумерных процессов в криволинейных слоях постоянной толщины с гармоническим законом изменения неоднородности среды, а также для определенного вида ее анизотропии [1].

Используя формулы перехода [2], можно процессам, описываемым уравнениями (1.3) при $P = f^n(x_1, y_1)$ (n — целое нечетное число), поставить в соответствие осесимметричные процессы.

Таким образом, система уравнений (1.2) является канонической для двумерных процессов различной физической природы, протекающих в структурно неоднородных слоях, и разработка метода теории функций, удовлетворяющих этим уравнениям, значительно расширяет возможности исследования процессов.

2. В отличие от плоскопараллельного случая для осесимметричных процессов введем комплексный потенциал в виде

$$W = \varphi + i\psi/y = \varphi - 2\psi/(z - \bar{z})$$

который в комплексной полуплоскости z ($\mathrm{Im}\, z > 0$) будет удовлетворять следующему из системы (1.2) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - \frac{W - \overline{W}}{2(z - \bar{z})} = 0 \tag{2.1}$$

Отметим, что комплексно-сопряженная скорость процесса $\overline{V} = u - iv$ определяется уравнением того же вида (2.1).

Непрерывную функцию $W(z)$ комплексного переменного z, удовлетворяющую в некоторой области полуплоскости z ($\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$) уравнению (2.1), назовем осесимметричной обобщенной аналитической функцией в этой области.

Укажем ряд принципиальных свойств функции $W(z)$, вытекающих из ее определения. В силу линейности уравнения (2.1) имеет место принцип суперпозиции его решений. Тривиальным решением уравнения (2.1) является обобщенная постоянная $A = \alpha - 2\beta/(z - \bar{z})$, где и далее α, β — произвольные вещественные постоянные; это решение отвечает, например, покоящейся жидкости.

Аналогом теоремы Лиувилля теории аналитических функций для $W(z)$ является утверждение: если модуль $W(z)$ на всей полуплоскости z ($\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$), включая бесконечно удаленную точку, ограничен и не превосходит модуля обобщенной постоянной ($|W(z)| \leqslant |A|$), то $W(z)$ — обобщенная постоянная. Отсюда следует, что функция $W(z)$, отличная от A, должна иметь особые точки, которые являются моделями физических источников процессов.

Уравнение (2.1) конформно ковариантно. Среди конформных преобразований представляет интерес используемое далее преобразование инверсии относительно сферы радиуса a с центром в начале координат, которое состоит в том, что если какая-либо функция $W_0(z)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то его решением будет также

$$W = \frac{a}{2|z|} \int_p^1 \tau^{\sigma-1} \left[2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \overline{W}_0\left(\frac{a^2\tau}{\bar{z}}\right) + \overline{W}_0\left(\frac{a^2\tau}{\bar{z}}\right) - W_0\left(\frac{a^2\tau}{\bar{z}}\right)\right] d\tau \tag{2.2}$$

Значения p и σ определяются видом функции $W_0(z)$: если особые точки $W_0(z)$ лежат вне сферы и $|W_0(z)| = O(|z|^n)$ при $|z| \to 0$, то $p = 0$, $\sigma > -n$; если ее особые точки лежат внутри сферы и $|W_0(z)| = O(|z|^{-n-1})$ при $|z| \to \infty$, то $p = \infty$, $\sigma < n + 1$; здесь и всюду далее, если не оговорено противное,— $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Для функции $W(z)$, однозначной и непрерывной в некоторой односвязной области D полуплоскости, введем операции дифференцирования и интегрирования.

Обозначим $d_\Sigma W/dz$ или W_Σ Σ-производную от W и определим ее так, чтобы она везде в области D удовлетворяла уравнению (2.1), т. е.

$$\frac{d_\Sigma W}{dz} \equiv W_\Sigma = \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{W - \overline{W}}{2(z - \bar{z})} \tag{3.1}$$

Сопоставляя (3.1) с (1.2), имеем равенство $W_\Sigma = \overline{V}$, которое раскрывает физический смысл W_Σ.

Σ-интеграл от W вдоль кусочно-гладкого контура C, лежащего в области D, определим так:

$$\int\limits_C W\, d_\Sigma\zeta = \frac{1}{2}\int\limits_C \left(1 + \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{z - \bar{z}}\right) W\, d\zeta + \left(1 - \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{z - \bar{z}}\right) \overline{W}\, d\bar{\zeta} \tag{3.2}$$

Гидродинамический смысл Σ-интеграла следует из записанного для $\overline{V}$ равенства

$$\int\limits_C \overline{V}\, d_\Sigma\zeta = \Gamma - \Pi/[\pi(z - \bar{z})] \tag{3.3}$$

где Γ и Π — циркуляция и поток скорости жидкости, вычисленные для контура C.

Так как $W(z)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то Σ-интеграл не зависит от выбора контура C и полностью характеризуется положением его начальной z_0 и конечной z точек. Поэтому Σ-интеграл, рассматриваемый в зависимости от его верхнего предела z, будет определять функцию $W^*(z)$ согласно равенству

$$\int\limits_{z_0}^{z} W(\zeta)\, d_\Sigma\zeta = W^*(z) - W_0^* \quad (W_0^* = \varphi^*(z_0) - 2\psi(z_0)/(z - \bar{z})) \tag{3.4}$$

(W_0^* — обобщенная постоянная), которое является аналогом формулы Ньютона — Лейбница для аналитических функций.

Выделяя в (3.2) и (3.4) действительные и мнимые части, получим известное [2, 5] выражение оператора интегрирования.

Для замкнутого контура C из (3.4) следует равенство

$$\int\limits_C W(\zeta)\, d_\Sigma\zeta = 0 \tag{3.5}$$

которое можно рассматривать как обобщение теоремы Коши: если $W(z)$ — осесимметричная обобщенная аналитическая функция в односвязной области D, то Σ-интеграл от $W(z)$ по любому кусочно-гладкому контуру C, целиком лежащему в D, равен нулю.

Утверждение, обратное обобщенной теореме Коши, резонно назвать обобщенной теоремой Морера, которую можно рассматривать как другое определение функции $W(z)$, эквивалентное данному выше на основе уравнения (2.1) или определению, введенному из условия существования Σ-производной (3.1).

Формулы (3.1) и (3.4) являются основой для построения комплексных потенциалов процесса по известному комплексному потенциалу.

4. Среди решений уравнения (2.1) принципиальное значение имеют фундаментальные решения, моделирующие кольцевой источник (сток) мощностью Q и кольцевой вихрь суммарной интенсивности Γ', комплексные потенциалы которых на основе [4, 6, 8] можно представить в виде:

$$W = -\frac{Q}{2\pi^2 R_*}\left\{K(k) + i\frac{x - x_0}{2y_0}\left[n_1'\Pi(-n_1^2, k) - K(k)\right]\right\}$$

$$W = \frac{\Gamma'}{2\pi^2 R_*}\left\{\frac{x - x_0}{2}\left[n_1'\Pi(-n_1^2, k) - K(k)\right] - ik^2 C(k)\right\} \qquad (4.1)$$

$$\left(k = 2\sqrt{yy_0}/R_*,\quad n_1^2 = 4yy_0/(y + y_0)^2,\quad n_1^2 + n_1'^2 = 1,\quad R_* = [(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]^{1/2}\right)$$

где $K(k)$, $C(k)$ и $\Pi(-n_1^2, k)$ — полные эллиптические интегралы [9] модуля k, n_1^2 — параметр.

Поскольку комплексный потенциал W определен с точностью до произвольной обобщенной постоянной, то ее выбирают так, чтобы комплексные потенциалы (4.1) были однозначными функциями (см. [6]). Эти комплексные потенциалы имеют в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ логарифмические особенности.

Используя решения (4.1), можно на основе принципа суперпозиции получить комплексные потенциалы других осесимметричных процессов.

Нахождение комплексных потенциалов путем сближения особенностей можно свести к Σ-дифференцированию решений (4.1). Введем имеющий логарифмическую особенность в точке z_0 комплексный потенциал вихреисточника

$$\ln Z(z, z_0, \alpha, \beta) = \alpha F_1(z, z_0) - i2\beta F_2(z, z_0)/(z_0 - \bar{z}_0) \qquad (4.2)$$

где $F_1(z, z_0)$ и $F_2(z, z_0)$ — нормированные комплексные потенциалы (4.1), у которых $Q = 4\pi^2$ и $\Gamma' = 4\pi^2 y_0$.

Далее рассмотрим отрицательную формальную степень, которую определим как Σ-производную n-го порядка от (4.2), т. е.

$$Z^{(-n)}(z, z_0, \alpha, \beta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{d_\Sigma^n}{dz^n}\ln Z(z, z_0, \alpha, \beta) \qquad (4.3)$$

Тогда найдем комплексные потенциалы мультиполей с моментами M_n:

$$W_n = \frac{M_n}{4\pi^2}(n-1)!\,Z^{(-n)}(z, z_0, \alpha, \beta) \qquad (4.4)$$

Из формул (4.1)—(4.4) при $n = 1$, $\alpha = \cos\theta_1$, $\beta = \sin\theta_1$ получим комплексный потенциал диполя с моментом M_1, направленным под углом θ_1 к оси x:

$$W_1 = -\frac{M_1 e^{i\theta_1}}{2\pi^2 R^2 R_*}\{[B(k) + k'^2 D(k) e^{-i2\theta_1}][x - x_0 - i(y - y_0)] - i2y_0 k'^2 D(k) e^{-i2\theta_1}\} \qquad (4.5)$$

$$\left(R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2},\quad k' = \sqrt{1 - k^2}\right).$$

где $B(k)$ и $D(k)$ — полные эллиптические интегралы модуля k [9], k' — дополнительный модуль.

При $n = 2, 3, 4, \ldots$ из (4.1) — (4.4) следуют соответствующие комплексные потенциалы мультиполей в точке z_0. Если мультиполи расположены в начале координат ($z_0 = 0$), то, полагая $\alpha = 1$, $\beta = 0$, для них имеем

$$Z^{(-n)}(z) = r^{-n-1}\left[P_n(\cos\theta) - i\frac{\sin\theta}{n}P_n'(\cos\theta)\right] \qquad (4.6)$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра. В этом случае

$$W_n = -\frac{M_n}{4\pi} n!\, Z^{(-n)}(z)$$

Назовем положительной формальной степенью $Z^{(n)}(z, z_0, \alpha, \beta)$ комплексный потенциал W_n, полученный n-кратным Σ-интегрированием от z_0 до z обобщенной комплексной постоянной $\alpha - 2\beta/(z-\bar{z})$ и умножением на $n!$, т. е.

$$Z^{(0)}(z, z_0, \alpha, \beta) = \alpha - \frac{2\beta}{(z-\bar{z})}, \qquad Z^{(n)}(z, z_0, \alpha, \beta) = n\int_{z_0}^{z} Z^{(n-1)}(\zeta, z_0, \alpha, \beta)\, d_\Sigma\zeta \tag{4.7}$$

Степени (4.7) определяют комплексные потенциалы мультиполей, имеющие полюсы n-го порядка в бесконечности. Вид этих степеней зависит от выбора α, β и z_0. В частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $z_0 = 0$ они выглядят наиболее просто

$$Z^{(n)}(z) = r^n\left[P_n(\cos\theta) + i\frac{\sin\theta}{n+1}P_n'(\cos\theta)\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.8}$$

5. Один из подходов к исследованию краевых задач опирается на обобщение интеграла Коши. Используя вторую формулу Грина для уравнений (1.2), на основании решений (4.1) получим обобщенную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C W(\zeta)\,\Omega_-(z,\zeta)\,d\zeta - \overline{W}(\zeta)\,\Omega_+(z,\zeta)\,d\bar{\zeta} = \begin{cases} W(z), & z \in D \\ 0, & z \in \bar{D} \end{cases} \tag{5.1}$$

которая позволяет найти осесимметричную обобщенную аналитическую функцию $W(z)$ через ее значения на границе C области D. Стоящий слева интеграл есть обобщенный интеграл Коши, ядра которого

$$\Omega_\pm(z,\zeta) = \frac{\zeta-\bar{\zeta}}{4i}(w_1 \pm w_1')$$

в отличие от введенных в [6, 7] имеют ясный физический смысл: они выражаются через нормированные ($M_1 = 4\pi^2$) комплексные потенциалы w_1 и w_1' диполей (4.5) с моментами вдоль и перпендикулярно оси x.

Заменяя в (5.1) $W(\zeta)$ на непрерывную функцию $f(\zeta)$, получим обобщенный интеграл типа Коши, который будет определять осесимметричную обобщенную аналитическую функцию $W(z)$, для которой доказывается аналог формул Сохоцкого, теорема об аналитическом продолжении и принцип зеркального отображения.

6. Другой подход к решению краевых задач состоит в разложении осесимметричной обобщенной аналитической функции $W(z)$ в ряды по формальным степеням, что оказывается возможным для решений уравнений вида (2.1) (см., например, [3]).

Функцию $W(z)$ в круге радиуса R_0 с центром в точке z_0 можно представить обобщенным рядом Тейлора по степеням (4.7), т. е.

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(z, z_0, \alpha_n, \beta_n) \tag{6.1}$$

где вещественные коэффициенты α_n, β_n определяются из равенств

$$\alpha_0 - \frac{2\beta_0}{z_0-\bar{z}_0} = W(z_0), \qquad n!\left[\alpha_n - \frac{2\beta_n}{z_0-\bar{z}_0}\right] = \left.\frac{d_\Sigma^{\,n} W(z)}{dz^n}\right|_{z=z_0}$$

получающихся путем n-кратного Σ-дифференцирования этого ряда.

В частности, если ряд (6.1) составлен из степеней (4.8) и содержит либо все либо только нечетные или четные степени, то получим функции, которые являются аналогом соответствующих аналитических функций: экспоненте, синусу или косинусу.

В кольце $(R_1 < |z - z_0| < R_2)$ функция $W(z)$ представима в виде обобщенного ряда Лорана по степеням (4.3) и 4.7), т. е.

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(z, z_0, \alpha_n, \beta_n) + \sum_{n=1}^{\infty} Z^{(-n)}(z, z_0, \alpha_{-n}, \beta_{-n}) \tag{6.2}$$

Согласно (3.5) и (6.2) можно утверждать, что для $W(z)$ справедливо равенство, обобщающее выражение основной теоремы о вычетах аналитических функций, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} W(\zeta)\, d_\Sigma \zeta = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu} W(\zeta)\, d_\Sigma \zeta$$

Здесь C_ν — непересекающиеся между собой контуры, охватывающие изолированные особые точки z_ν функции $W(z)$ и целиком лежащие внутри замкнутого контура C_0.

Таким образом, изложенные выше основы теории осесимметричных обобщенных аналитических функций являются полным аналогом принципиальных положений аналитических функций и дают метод исследования динамических процессов.

7. Применим метод осесимметричных обобщенных аналитических функций к исследованию пространственной фильтрации в кусочно-однородной среде, разделенной поверхностью L на зоны с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2, течения в которых описывают комплексные потенциалы

$$W_j = k_j\varphi_j - 2\psi_j/(z - \bar z) \quad (j = 1, 2)$$

На L выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости, которые для φ имеют вид [1, 10]

$$\varphi_1|_L = \varphi_2|_L, \quad k_1\varphi_{1n}|_L = k_2\varphi_{2n}|_L \tag{7.1}$$

В случае, когда L — сфера или плоскость, решение задачи можно представить в конечном виде.

Пусть поток в безграничной среде с коэффициентом проницаемости k_0, принимаемого за единицу $(k_0 = 1)$, описывается комплексным потенциалом $W_0(z) = \varphi_0 - 2\psi_0/(z - \bar z)$, особые точки которого расположены произвольно относительно сферы радиуса a с центром в начале координат. Этот потенциал представим в виде

$$W_0(z) = W_{01}(z) + W_{02}(z)$$

где особые точки $W_{01}(z)$ и $W_{02}(z)$ лежат вне и внутри сферы, причем

$$|W_{01}(z)| = O(|z|^n), \ |z| \to 0; \quad |W_{02}(z)| = O(|z|^{-n-1}), \ |z| \to \infty$$

Тогда, если внешность и внутренность сферы заполнить средами проницаемости k_1 и k_2, то комплексные потенциалы течения вне и внутри сферы будут

$$\begin{aligned} W_1 &= W_0(z) + \lambda\left[\frac{a}{2|z|}\int\limits_0^1 \tau^{(1-\lambda)/2} H_1\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right)d\tau + \int\limits_\infty^1 \tau^{-(1+\lambda)/2} G_2(z\tau)\, d\tau\right] \\ W_2 &= W_0(z) - \lambda\left[\frac{a}{2|z|}\int\limits_\infty^1 \tau^{-(1-\lambda)/2} H_2\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right)d\tau + \int\limits_0^1 \tau^{(1-\lambda)/2} G_1(z\tau)\, d\tau\right] \end{aligned} \tag{7.2}$$

$$H_j\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right) = 2\tau \frac{\partial}{\partial\tau} \overline{W}_{0j}\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right) + \overline{W}_{0j}\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right) - W_{0j}\left(\frac{a^2\tau}{\bar z}\right)$$

$$G_j(z\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}[\tau W_{0j}(z\tau)] \quad (j = 1, 2), \quad \lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

Решение (7.2) удовлетворяет условиям (7.1). Оно получено путем разложения в ряд (6.2) по степеням (4.6) и (4.8) с последующим обобщением согласно формуле (2.2) на случай произвольного расположения особых точек $W_0(z)$.

В частности, если внутри сферы среда непроницаема ($k_2 = 0$ и, следовательно, $\lambda = 1$), то решение (7.2) принимает вид теорем Вейса и Бутлера для сферы в осесимметричном потоке идеальной жидкости (см., например, [11]). При $k_2 = \infty$ ($\lambda = -1$) решение (7.2) описывает обтекание сферической каверны. Если сфера окружена непроницаемой средой $k_1 = 0$ либо свободной жидкостью $k_1 = \infty$, то (7.2) будет определять течение внутри сферы.

Пусть граница L есть плоскость $x = 0$ и области $x > 0$ и $x < 0$ занимают среды с коэффициентами проницаемости k_1 и k_2. Рассматривая этот случай как предельный для исследованного выше, получим решение

$$W_1 = W_0(z) + \lambda[\overline{W_{01}(-\bar z)} + W_{02}(z)], \quad W_2 = W_0(z) - \lambda[W_{01}(z) + \overline{W_{02}(-\bar z)}] \tag{7.3}$$

Решения (7.2) и (7.3) могут представить интерес при исследовании описываемых уравнениями (1.1) динамических процессов различной физической природы.

Автор благодарит П. Я. Полубаринову—Кочину и О. В. Голубеву за внимание к работе и обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радыгин В. М., Голубева О. В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк., 1983. 160 с.
2. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 368 с.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
4. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.
5. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 208 с.
6. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, 1978. 462 с.
7. *Данилюк И. И.* Обобщенная формула Коши для осесимметричных полей // Сиб. мат. ж. 1963. Т. 4. № 1. С. 48—85.
8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1968. 344 с.
10. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
11. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.

Орел

Поступила в редакцию 17.I.1990