Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 532.5

© 1991 г.

П. Я. Полубаринова — Кочина

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ НА ПРИМЕРАХ КРУГОВЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

Задача о конформном отображении круговых многоугольников на полуплоскость (полуполосу, прямоугольник, круг и т. п.) имеет широкие применения, в том числе в теории движения грунтовых вод. Вопрос о могущих при этом встретиться дополнительных (акцессорных) параметрах не является простым и заслуживает внимания, поэтому остановимся здесь на разборе некоторых частных случаев таких задач.

1. Круговой треугольник на плоскости полностью определяется заданием положения трех его вершин и трех углов при вершинах. В случае кругового четырехугольника задание трех его вершин и четырех углов не определяет полностью четырехугольник, четвертая его вершина может занимать бесчисленное множество положений ([1], с. 306). Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере кругового прямоугольника (фиг. 1), в котором заданы стороны $A_2A_3 = a$ и $A_1A_2 = b$. Проведем два семейства вспомогательных окружностей, касающихся отрезков A_1A_4 и A_3A_4 соответственно в точках A_1 и A_3. Среди этих окружностей найдется бесчисленное множество пересекающихся под прямым углом (точки A, A'). Покажем, что семейство таких точек A (x, y) представляет собой окружность, проходящую через вершины прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 1).

Пусть центрами двух окружностей, проходящих через точку A, будут $(0, b_1)$ и $(a_1, 0)$, тогда уравнения этих окружностей таковы:

$$x^2 + (y - b_1)^2 = (b_1 - b)^2, \quad (x - a_1)^2 + y^2 = (a_1 - a)^2 \tag{1.1}$$

Выражения для угловых коэффициентов касательных в точке A:

$$y_1' = -x/(y - b_1), \quad y_2' = -(x - a_1)/y$$

и условие ортогональности $y_1'y_2' = -1$ дают

$$x(x - a_1) + y(y - b_1) = 0 \tag{1.2}$$

Исключая a_1 и b_1 из соотношений (1.1)—(1.2), найдем уравнение

$$ay^3 + b(x - 2a)y^2 + (x - a)(ax - b^2)y + bx(x - a)^2 = 0 \tag{1.3}$$

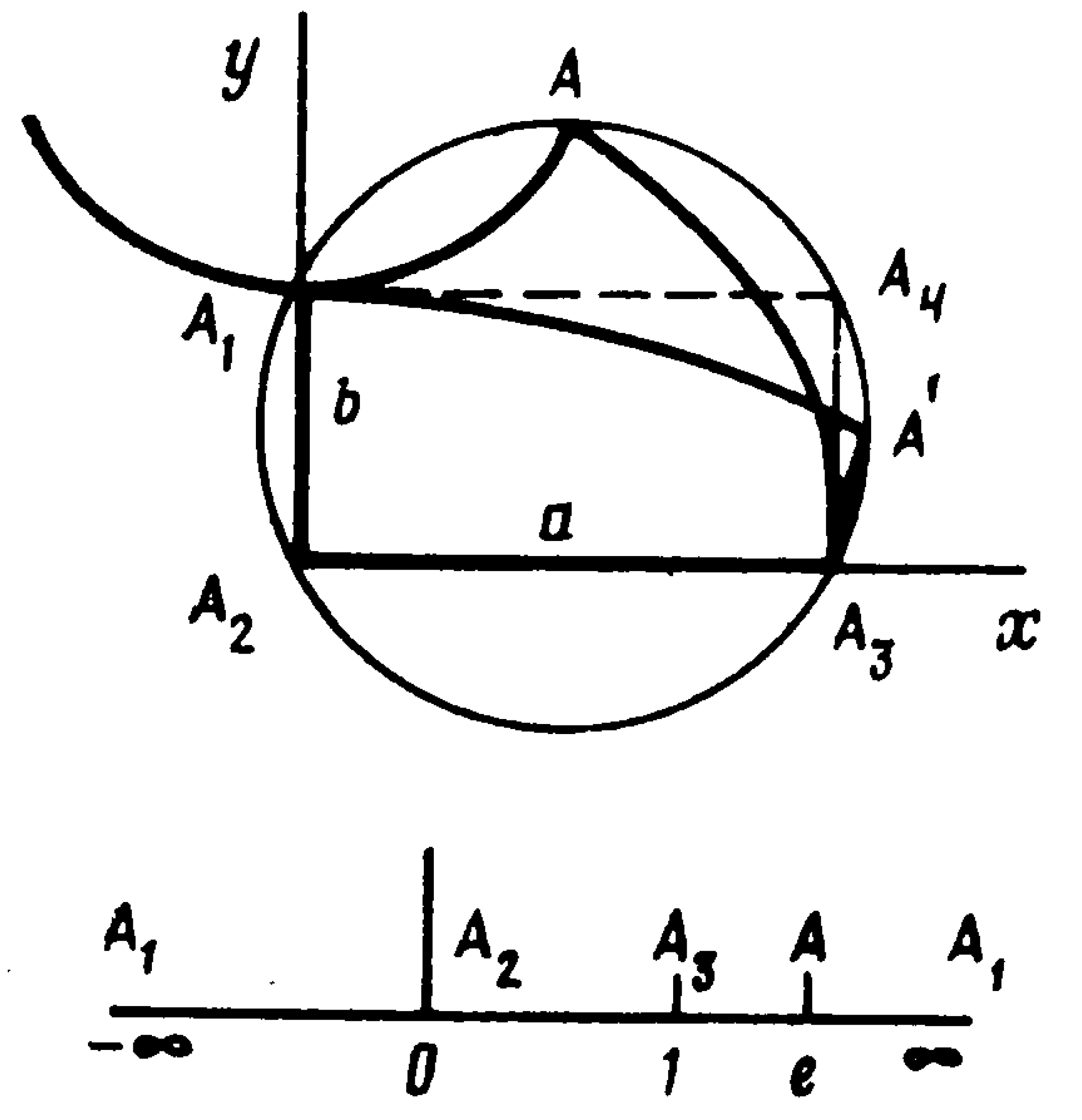
Подстановка $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ приводит к уравнению второй степени для r, однако не будем этого делать и вернемся к уравнению (1.3) в конце следующего раздела.

2. Конформное отображение (КО) на полуплоскость кругового четырехугольника с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$, $\pi\delta$ (фиг. 2) можно рассматривать при помощи дифференциального уравнения класса Фукса

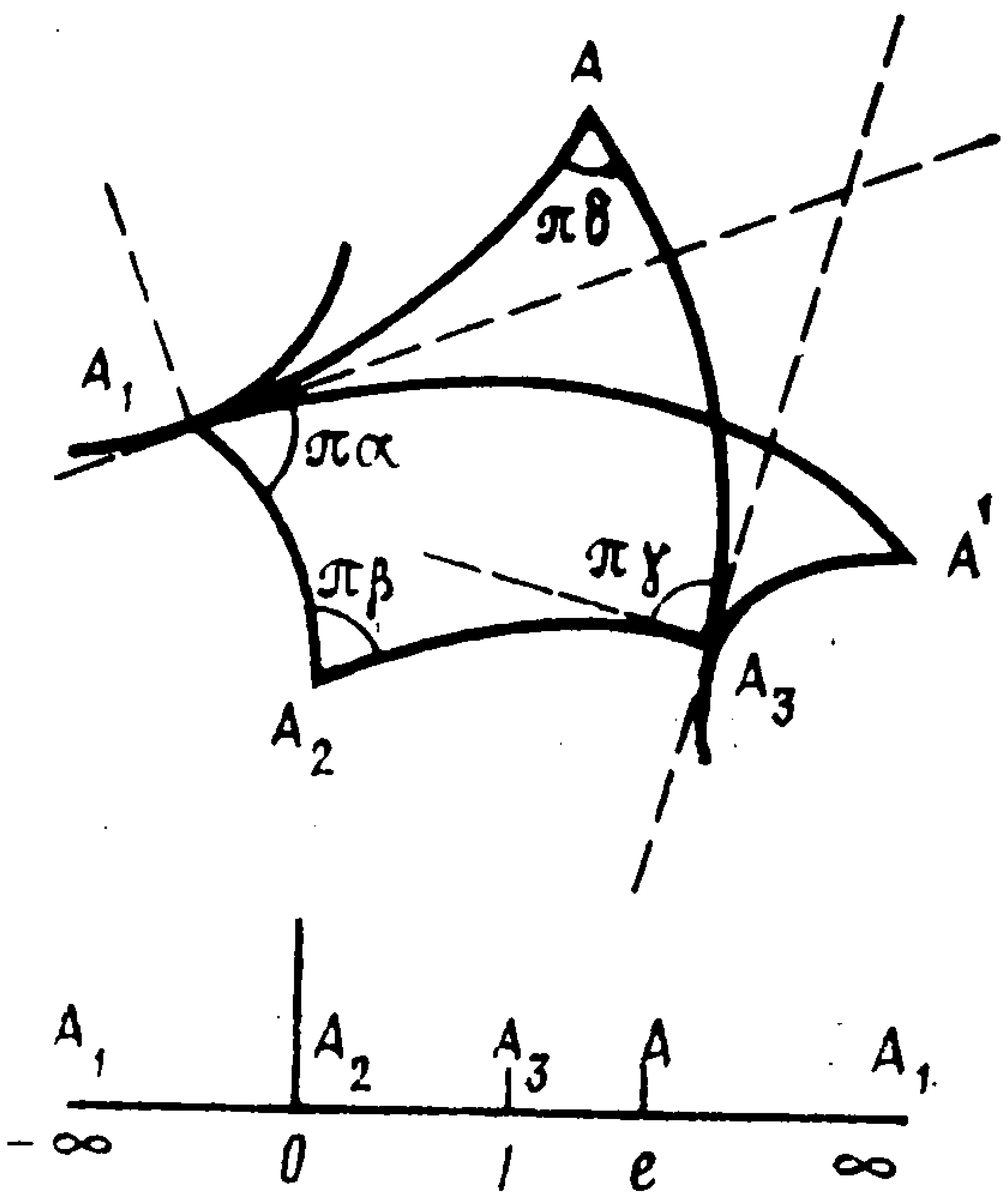
$$Y'' + \left(\frac{1-\alpha}{\zeta} + \frac{1-\beta}{\zeta-1} + \frac{1-\gamma}{\zeta-e}\right)Y' + \frac{(\varepsilon\varepsilon'\zeta + \lambda)Y}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-e)} = 0 \tag{2.1}$$

При этом должно выполняться соотношение Фукса

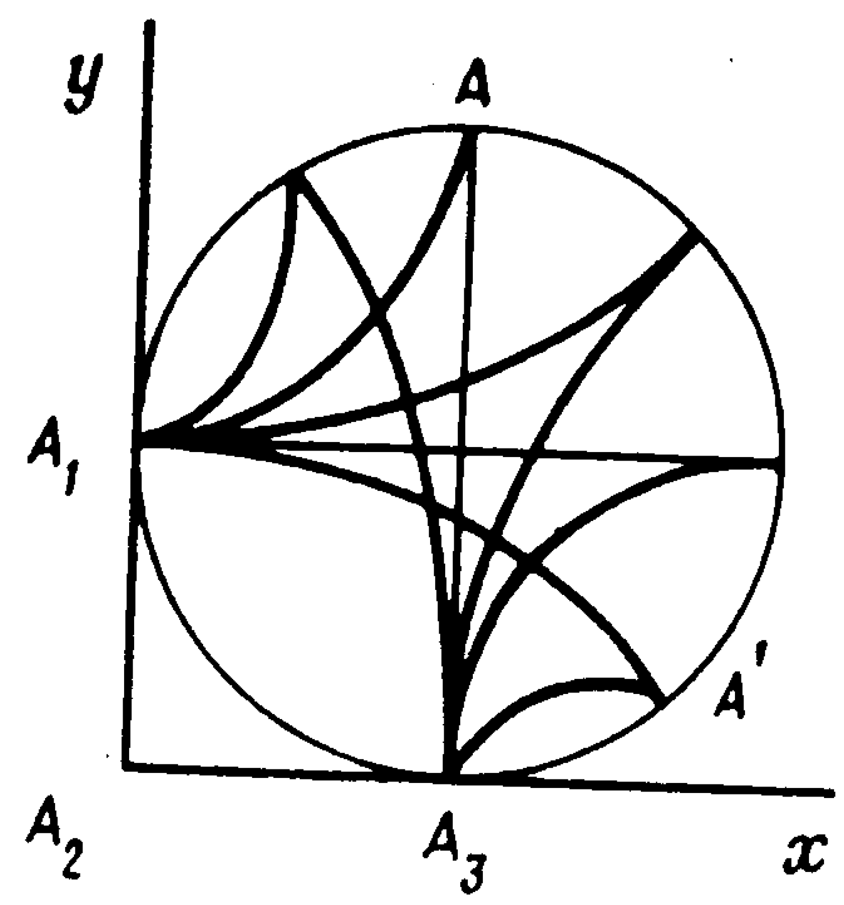
$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon + \varepsilon' = 2, \quad \varepsilon - \varepsilon' = \delta \tag{2.2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Вершинам четырехугольника соответствуют точки плоскости ζ: $\zeta = [0,\ 1,\ e,\ \infty$ (фиг. 2).

Действительное число λ называется дополнительным коэффициентом или параметром. В случае прямоугольника

$$\varepsilon\varepsilon' = 0, \quad \lambda = 0$$

Если найдены линейно-независимые интегралы уравнения (2.1) y_1, y_2, то КО четырехугольника $A_1A_2A_3A$ плоскости z на полуплоскость ζ определяется уравнением

$$z = x + iy = (C_1y_1 + C_2y_2)/(C_3y_1 + C_4y_2) \tag{2.3}$$

Отношение трех из четырех произвольных постоянных C_i к четвертой (вообще говоря, это комплексные числа) достаточны для определения трех вершин четырехугольника, например A_1, A_2, A_3. На долю четвертой вершины, например A, приходится два действительных числа λ и e. Но это избыточное число параметров (четвертая вершина должна лежать на определенной кривой, и для нее достаточно одного параметра). Следовательно, между λ и e должна существовать зависимость.

Обратимся к примеру кругового четырехугольника с прямыми углами. Для него $\alpha = \beta = \gamma = \delta = {}^1/_2$, $\varepsilon = \delta$, $\varepsilon' = 0$ и уравнение (2.1) перепишется в виде

$$Y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{1}{(\zeta - e)}\right)Y' + \frac{\lambda Y}{\zeta(\zeta - 1)(\zeta - e)} = 0 \tag{2.4}$$

Дробно-линейным преобразованием можно перевести две соседние окружности в две прямые и тогда будем иметь дело с прямоугольным четырехугольником вида $A_1A_2A_3A$ (фиг. 1).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (2.4) примем выражения ([2, 3]):

$$y_1 = \cos\,[2k\sqrt{\lambda}F_*(\zeta, k)],\ \ y_2 = \sin\,[2k\sqrt{\lambda}F_k(\zeta, k)]\ \ (k = \sqrt{e})$$

$$F_*(\zeta, k) = F(\arcsin\sqrt{\zeta}, k) = \int\limits_0^{\sqrt{\zeta}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

Условие $z = 0$ при $\zeta = 0$ дает в (2.3) $C_1 = 0$. Примем $C_2 = 1$ и введем обозначения

$$\mu = 2k\sqrt{\lambda}K,\ \ \nu = 2k\sqrt{\lambda}K'$$

$$K = \int\limits_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},\quad K' = \int\limits_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta^2)}}\quad (k' = \sqrt{1-k^2})$$

Рассматривая точки A_2 и A_3, имеем

$$a = \frac{\sin\mu}{C_3\cos\mu + C_4\sin\mu},\quad b = \frac{\operatorname{sh}\nu}{C_3\operatorname{ch}\nu + iC_4\operatorname{sh}\nu}$$

Для того чтобы a к b были действительными, нужно положить $C_4 = 0$ Тогда для C_3 получим два выражения

$$C_3 = \operatorname{tg}\mu/a = \operatorname{th}\nu/b \tag{2.5}$$

Отсюда находим зависимость между λ и $e = 1/k^2$ в виде

$$b/a = \operatorname{th}(2k\sqrt{\lambda}K')/\operatorname{tg}(2k\sqrt{\lambda}K) \tag{2.6}$$

В четвертой вершине $A\,(x, y)$ будем иметь

$$x + iy = \frac{a}{\operatorname{tg}\mu}\operatorname{tg}(\mu + i\nu) = \frac{a}{\operatorname{tg}\mu}\,\frac{\operatorname{tg}\mu + i\operatorname{th}\nu}{1 - i\operatorname{tg}\mu\operatorname{th}\nu} \tag{2.7}$$

Исключив в равенствах (2.7) $\operatorname{th}\nu$ при помощи (2.5), найдем

$$x = \frac{a\,(a^2 - b^2\operatorname{tg}^2\mu)}{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\mu},\quad y = \frac{ab\,(1 + \operatorname{tg}^2\mu)}{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\mu} \tag{2.8}$$

Если из уравнений (2.8) исключить $\operatorname{tg}\mu$, то получим уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0 \tag{2.9}$$

проходящей через точки A_1, A_2, A_3, A_4 (фиг. 1).

3. Теперь можно вернуться к уравнению третьей степени (1.3) и высказать предположение, что его левая часть делится на левую часть (2.9). И действительно, (1.3) распадается на уравнение окружности (2.9) и уравнение прямой

$$bx + ay - ab = 0 \tag{3.1}$$

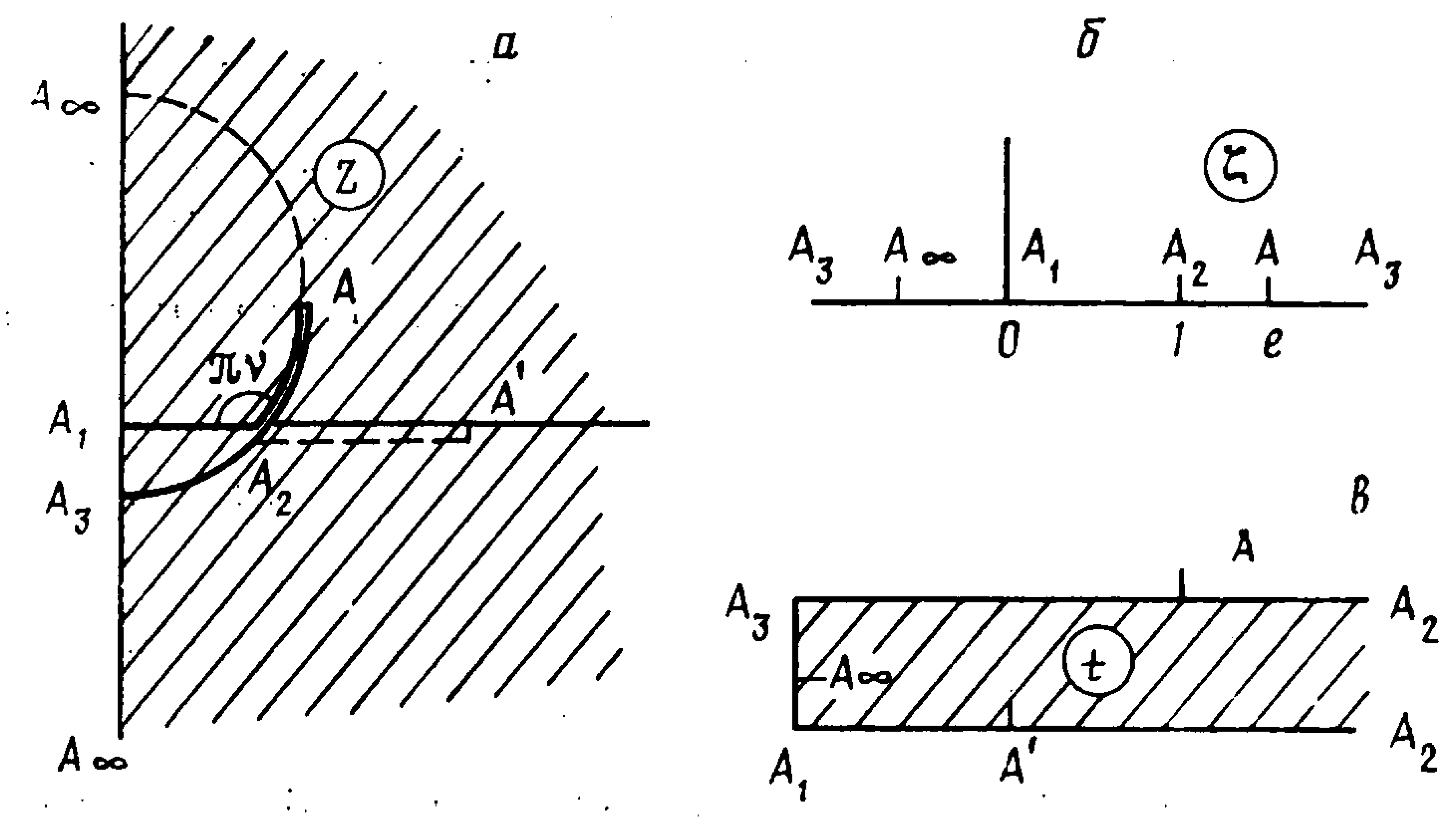
т. е. уравнение диагонали A_1A_3 и ее продолжений. Прямая (3.1) является геометрическим местом вторых точек пересечения вспомогательных окружностей (1.1).

Заметим, что вместо условия ортогональности вспомогательных окружностей (1.1) в точке A (фиг. 1) можно потребовать, чтобы эти окружности пересекались под любым углом θ. Тогда должно выполняться уравнение

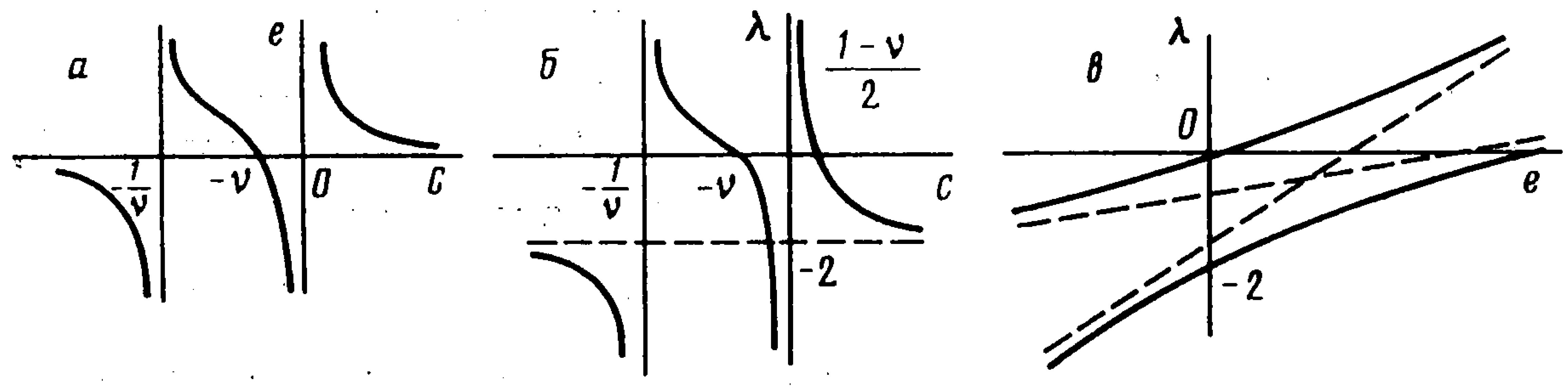
$$\operatorname{tg}\theta = (y_1' - y_2')/(1 + y_1'y_2')$$

В частности, для $\theta = 0$ или $y_1' = y_2'$ получим уравнение геометрического места точек A:

$$2x\,(x - a)\,(r^2 - b^2) + 2y\,(y - b)\,(r^2 - a^2) = (r^2 - a^2)\,(r^2 - b^2),$$
$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{3.2}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Это уравнение распадается на уравнения двух окружностей, которые можно представить в виде

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2} \tag{3.3}$$

$$\left(x-\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2} \tag{3.4}$$

Окружность (3.3) есть геометрическое место нулевых вершин, дуга окружности (3.4) — граница дуг окружностей, образующих искомый четырехугольник.

При $a = b$ имеем окружности (фиг. 3)

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2,\ x^2+y^2=a^2$$

Для произвольного четырехугольника, среди углов которого нет равных π или 2π, можно найти геометрическое место вершин A при заданных A_1, A_2, A_3, как это видно на фиг. 2 . Однако вопрос об уравнении, связывающем λ и e (или об исключении λ из рассмотрения), в каждом случае решается по-разному.

4. Во многих задачах о движении грунтовых вод со свободной поверхностью (в земляных плотинах) или с линией раздела пресных и соленых вод и т. д. годограф скорости представляется круговыми многоугольниками с разрезами, круговыми или прямолинейными. В качестве примера можно указать на фиг. 4 круговой разрез, заканчивающийся в точке A, или прямолинейный — в точке A_1. Если аффикс точки A (или A') обозначить через e, то при $0 < e < 1$ будем иметь прямолинейный разрез, при $e = 1$ разрез пропадает, при $e > 1$ он начнет перемещаться вдоль дуги окружности A_2A. Для многоугольников с разрезами, т. е. с углом 2π при одной из вершин и некотором числе прямых углов Э. Н. Береславский нашел точные решения в замкнутой форме [4] [1]. Для случая, пока-

[1] См. также *Береславский Э. Н.* Математическое моделирование фильтрационных течений со свободными границами: Диссертация... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1990. 387 с.

занного на фиг. 4, уравнение (2.1) приводится к виду

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-\nu}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-e}\right)Y' + \frac{\nu(\nu+1)\zeta+\lambda}{4\zeta(\zeta-1)(\zeta-e)}Y = 0 \tag{4.1}$$

Линейно-независимые частные решения этого уравнения получены в виде

$$y_1 = \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} \nu t + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} \nu t}{\operatorname{ch}^{1+\nu} t} = \frac{\operatorname{ch} \nu t}{\operatorname{ch}^{\nu} t}(1 + C \operatorname{th} t \operatorname{th} \nu t) \tag{4.2}$$

$$y_2 = \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} \nu t + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} \nu t}{\operatorname{ch}^{1+\nu} t} = \frac{\operatorname{ch} \nu t}{\operatorname{ch}^{\nu} t}(\operatorname{th} \nu t + C \operatorname{th} t)$$

Здесь C — параметр, о котором речь пойдет дальше, t — новая переменная, связанная с ζ уравнением $\zeta = \operatorname{th}^2 t$.

Область переменной $t = t' + it''$ — полуполоса (фиг. 4, *в*).

Для КО рассматриваемого многоугольника можно подставить интегралы (4.2) в выражение (2.3) и определить в нем постоянные C_i, рассматривая условия в вершинах A_1, A_2, A_3, получим:

$$z = x + iy = a(\operatorname{th} \nu t + C \operatorname{th} t)/(1 + C \operatorname{th} \nu t \operatorname{th} t) \tag{4.3}$$

При этом оказывается, что параметр C связан с параметром e уравнения (4.1) соотношением

$$e = (C + \nu)/[C(1 + C\nu)] \tag{4.4}$$

Дополнительный параметр λ зависит от C следующим образом:

$$\lambda = \nu(\nu + C)(1 - \nu - 2C)/[C(1 + C\nu)] \tag{4.5}$$

Если исключить C из (4.4) и (4.5), то найдем уравнение второй степени для λ и e (см. фиг. 5):

$$\lambda^2 - 2[(\nu^2 - \nu - 1)e + 1]\lambda + e^2\nu(\nu^2 - 1)(\nu - 2) - 2\nu(\nu + 1)e = 0 \tag{4.6}$$

Такого же вида уравнение (для любых значений $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — при одном из них, равном двум) получено в работах [5, 6] разными приемами. Здесь возьмем для простоты окрестность точки $\zeta = 0$ и будем искать решение уравнения (2.1) в виде ряда $y_1 = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$. Подстановка в уравнение (2.1) дает

$$a_0\lambda + a_1(1 - \alpha)e = 0$$

$$\varepsilon\varepsilon' a_0 + a_1[\lambda - (1 - \alpha)(1 + e) - (1 - \beta)e - (1 - \gamma)] + 2a_2 e(2 - \alpha) = 0$$

Отсюда при $a_0 \neq 0$, полагая $\alpha = 2$, найдем уравнение для λ:

$$\lambda^2 + (1 + e)\lambda + (1 - \beta)e + 1 - \gamma - \varepsilon\varepsilon' e = 0$$

При этом коэффициент a_2 остается неопределенным и можно принять его за вторую произвольную постоянную в решении y_1.

Возвращаясь к задаче Э. Н. Береславского, отметим, что параметр C оказался униформизирующей переменной (см. [1], с. 414) для уравнения (4.6), дающей однозначные представления переменных e и λ.

Проверим правильность решения, представленного в форме (4.3). Вдоль линии A_1AA_2 имеем $t = t'$; правая часть равенства (4.3) имеет действительное значение, и, следовательно, $y = 0$,— что верно.

Чтобы перейти на линию A_2A_3 плоскости t, положим $t = t' + \frac{\pi}{2}i$. Тогда будем иметь

$$\operatorname{th} t = \operatorname{cth} t', \quad \operatorname{th} \nu t = \frac{\operatorname{th} \nu t' + i\mu}{1 + i\mu \operatorname{th} \nu t'} \quad \left(\mu = \operatorname{tg}\frac{\pi\nu}{2} = \frac{a}{b}\right)$$

Для z вместо (4.3) получим

$$z = a\frac{P + i\mu}{1 + i\mu P}, \quad P = \frac{\operatorname{th}\nu t' + C\operatorname{cth} t'}{1 + C\operatorname{th}\nu t'\operatorname{cth} t'} \tag{4.7}$$

При помощи соотношения (4.7) будем иметь

$$y = \mu a\frac{1 - P^2}{1 + \mu^2 P^2}, \quad x^2 + y^2 = a^2\frac{P^2 + \mu^2}{1 + \mu^2 P^2}$$

откуда найдем уравнение окружности, на которой лежит дуга A_3A_2A:

$$x^2 + y^2 - [(a^2 - b^2)/b]\, y = a^2$$

Остается рассмотреть линию $A_1A_\infty A_3$. Вдоль нее $t = it'$ и правая часть уравнения (4.3) является мнимой; в точке A_∞ (фиг. 4) имеем

$$\operatorname{tg}\nu t''\operatorname{tg}t'' = -1/C, \ y = \infty$$

В точке A_3, где

$$\operatorname{tg}\nu t = i\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi, \ \operatorname{th} t = i\operatorname{tg}{}^1/_2\pi = \infty$$

получим $z = aC/(iC\operatorname{tg}{}^1/_2\nu\pi) = -ib$

Таким образом, показано, что, действительно, (4.3) дает решение задачи о КО четырехугольника (фиг. 4).

Рассмотренный пример из серии задачи Э. Н. Береславского замечателен, помимо простоты решения, также тем, что это решение не содержит параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* О круговых многоугольниках в теории фильтрации // Проблемы математики и механики. Новосибирск: Наука, 1983. С. 166—177.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений в теории фильтрации // Математика и проблемы водного хозяйства. Киев: Наук. думка, 1986. С. 19—36.
4. *Береславский Э. Н.* Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложении // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1048—1050.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Цицкишвили А. Р.* О конформном отображении полуплоскости на круговые пятиугольники с разрезом // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 11. С. 2044—2051.

Москва

Поступила в редакцию 7.V.1990