Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 62—50

А. М. Тарасьев

ПРОГРАММНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ВЕКТОРНЫМ КРИТЕРИЕМ

Рассматривается задача управления с векторным критерием. Предполагается, что на систему действует помеха, управление формируется по принципу обратной связи. Для рассматриваемой задачи вводится понятие векторного оптимального гарантированного результата (ОГР). В случае скалярного критерия данная задача обращается в традиционную задачу оптимального гарантированного управления, для которой применимы методы теории дифференциальных игр [1—4]. Важный раздел в этой теории занимает метод экстремального прицеливания, согласно которому при выполнении условий регулярности [1—6] построение позиционной стратегии можно свести к решению вспомогательных задач программного управления. Показано, что конструкции программного поглощения могут быть применены к задачам управления с векторным критерием.

Определяется векторная многозначная функция (ВМФ) ОГР — аналог функции ОГР в задаче управления со скалярным критерием. Формулируются некоторые ее свойства. В частности, изучается вопрос о скаляризации ВМФ ОГР. Приводится инфинитезимальная форма [7—10] свойства u-стабильности ВМФ ОГР. Дифференциальные неравенства, выражающие свойство u-стабильности векторной функции, используются для исследования программных конструкций в линейной задаче управления с выпуклым векторным критерием. Определяется ВМФ программного максимина (ПМ) в этой задаче. Формулируются условия регулярности, т. е. условия, гарантирующие совпадение ВМФ ПМ с ВМФ ОГР. По существу эти условия обеспечивают свойство u-стабильности ВМФ ПМ и получены из соответствующих инфинитезимальных неравенств. Условия регулярности в окончательном виде не содержат элементов инфинитезимальной конструкции (производной по направлению ВМФ ПМ), в них фигурируют лишь основные элементы задачи: векторный функционал и гамильтониан управляемой системы. Приводится пример, иллюстрирующий эффективность полученных условий.

1. Векторный оптимальный гарантированный результат. Рассмотрим управляемую систему, динамика которой описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v),\ t \in [t_0, \vartheta] = T,\ x \in R^n,\ u \in P \subset R^p,$$
$$v \in Q \subset R^q \tag{1.1}$$
$$f\colon T \times R^n \times P \times Q \to R^n$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, u — p-мерный вектор управляющих воздействий из компакта P, v — q-мерный вектор помехи, которая принимает значения в компакте Q.

Считается, что функция f непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию Липшица по x и условию продолжимости решений.

Полагаем, что на траекториях $x(\cdot)$ системы (1.1) задан векторный функционал качества

$$J(x(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)) = (\sigma_1(x(\vartheta)), \ldots, \sigma_m(x(\vartheta))) \tag{1.2}$$

Здесь σ_i: $R^n \to R^1$ — непрерывные функции.

Будем считать, что управляющее воздействие u формируется позиционно [3]. Цель управления — «минимизировать» функционал (1.2) в излагаемом ниже смысле.

Введем отношение порядка на m-мерных векторах. Для $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ будем полагать

$$a \leqslant b, \text{ если } a_i \leqslant b_i, \text{ для всех } i,$$
$$a \nleqslant b, \text{ если } a_j > b_j \text{ для некоторого } j.$$

Здесь и всюду далее $i, j = 1, \ldots, m$.

Дадим определение векторного гарантированного результата. Пусть $U: T \times R^n \to P$ — позиционная стратегия, $X(t_*, x_*, U)$ — пучок движений, порожденный стратегией U из начальной позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$.

Введем обозначения

$$\Sigma(t_*, x_*, U) = \{s \in R^m:\ s = \sigma(x(\vartheta)),\ x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U)\}$$
$$\Sigma_{\max}(t_*, x_*, U) = \{s^0 \in R^m:\ s \leqslant s^0 \text{ для всех } s \in \Sigma(t_*, x_*, U)\}$$
$$\Sigma_{\max}(t_*, x_*) = \bigcup_U \Sigma_{\max}(t_*, x_*, U) \tag{1.3}$$
$$\Sigma_{\max} = \{(t, x, s) \in T \times R^n \times R^m:\ s \in \Sigma_{\max}(t, x)\}$$

Таким образом, $\Sigma_{\max}(t_*, x_*, U)$ — множество векторных результатов, гарантированных стратегией U в точке (t_*, x_*) по всем компонентам одновременно, $\Sigma_{\max}(t_*, x_*)$ — множество всех гарантированных результатов в позиции (t_*, x_*).

Определение 1. Оптимальным гарантированным результатом (ОГР) в точке (t_*, x_*) будем называть множество $c(t_*, x_*)$ минимальных по Парето точек из множества гарантированных результатов $\Sigma_{\max}(t_*, x_*)$, т. е.

$$c(t_*, x_*) = \{s^0 \in \Sigma_{\max}(t_*, x_*):\ s \nleqslant s^0 \text{ для всех } s \in \Sigma_{\max}(t_*, x_*) \setminus \{s^0\}\} \tag{1.4}$$

Таким образом, по определению для гарантированного вектора $s^0 \in c(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ найдется позиционная стратегия $U: T \times R^n \to P$, такая, что $\sigma(x(\vartheta)) \leqslant s^0$ при всех $x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U)$ и s^0 является «наилучшим» в смысле Парето среди векторов, обладающих этим свойством.

Отметим, что определение 1 аналогично определению оптимальной гарантированной оценки [11], в которой многокритериальная задача гарантированного управления изучалась в рамках первого прямого метода Понтрягина.

Векторной многозначной функцией оптимального гарантированного результата (ВМФ ОГР) задачи (1.1), (1.2) будем называть многозначное отображение $(t, x) \to c(t, x)$: $T \times R^n \to 2^{R^m}$.

2. Свойства ВМФ ОГР. Для исследования свойств ВМФ ОГР используется вспомогательная система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v),\ t \in T,\ x \in R^n,\ u \in P,\ v \in Q \tag{2.1}$$
$$\dot{s}_i = 0$$

Рассмотрим для нее следующую задачу о приведении движений на целевое множество M — надграфик векторной функции σ:

$$M = \{(x, s) \in R^n \times R^m:\ \sigma(x) \leqslant s\} \tag{2.2}$$

в момент времени ϑ.

Для позиции $(t_*, x_*, s_*) \in T \times R^n \times R^m$ требуется определить позиционную стратегию U_r: $T \times R^n \times R^m \to P$, которая обеспечивает приведение движения системы (2.1) на целевое множество M в момент времени ϑ при любой помехе.

Пусть $W_u \subset T \times R^n \times R^m$ — множество позиционного поглощения в задаче (2.1), (2.2), т. е. множество начальных позиций (t_*, x_*, s_*), для которых разрешима задача приведения движений системы (2.1) на цель M.

Важное свойство ВМФ ОГР $(t, x) \to c\,(t, x)$ выражает следующее утверждение.

Теорема 1. Надграфик ВМФ ОГР (множество $\Sigma_{\max}$ (1.3)) совпадает с множеством позиционного поглощения W_u расширенной задачи (2.1), (2.2).

Доказательство теоремы 1 основывается на теореме об альтернативе [3] [1].

Замечание 1. Из теоремы 1 следует, что для построения ВМФ ОГР $(t, x) \to c\,(t, x)$ можно использовать алгоритмы и программы, которые предназначены для решения задач гарантированного управления вида (2.1), (2.2). Такие алгоритмы и программы разрабатываются, например, в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского Отделения АН СССР [12].

Сформулируем некоторые свойства ВМФ ОГР. Доказательства этих свойств несложны, поэтому будем их опускать.

Свойство 1. Пусть ω_i: $T \times R^n \to R^1$ — функция ОГР в задаче управления для системы (1.1) со скалярным критерием

$$J\,(x\,(\cdot)) = \sigma_i\,(x\,(\vartheta)) \tag{2.3}$$

т. е.

$$\omega_i\,(t, x) = \min_{U} \max_{x(\cdot) \in X(t,\, x,\, U)} \sigma_i\,(x\,(\vartheta)),\ (t, x) \in T \times R^n$$

Для любой позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ и вектора $s \in c\,(t_*, x_*)$ справедливо векторное неравенство $\omega_0\,(t_*, x_*) \leqslant s$, $\omega_0\,(t_*, x_*) = (\omega_1\,(t_*, x_*), \ldots$ $\ldots, \omega_m\,(t_*, x_*))$.

Свойство 2. Для любой позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ и индекса i найдутся числа s_j°, $j \neq i$, такие, что вектор $s^\circ = (s_1^\circ, \ldots, \overset{\circ}{s}_{i-1}, \omega_i\,(t_*, x_*), \overset{\circ}{s}_{i+1}, \ldots, s_m^\circ)$ — ОГР, т. е. $s^\circ \in c\,(t_*, x_*)$.

Свойство 3. Для всех позиций $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ множество $c\,(t_*, x_*)$ ограничено.

Свойство 4. Надграфик ВМФ ОГР $(t, x) \to c\,(t, x)$ — множество W_u есть замкнутое множество.

3. Скаляризация векторного критерия. Рассмотрим вопрос о скаляризации векторного критерия. Для скаляризации будем использовать свертку из [13]. Предположим, что ВМФ ОГР построена. Пусть

$$(t_*, x_*) \in T \times R^n,\ s^\circ = (s_1^\circ, \ldots, s_m^\circ) \in c\,(t_*, x_*),\ s_i^\circ > 0$$

$$\alpha_i^\circ = (s_i^\circ)^{-1} \Big(\sum_{j=1}^{m} (s_j^\circ)^{-1} \Big)^{-1}$$

Символом U°: $T \times R^n \to P$ обозначим оптимальную стратегию в векторной задаче (1.1), (1.2), т. е. $\sigma\,(x\,(\vartheta)) \leqslant s^\circ$ для всех $x\,(\cdot) \in X\,(t_*, x_*, U^\circ)$.

Полагаем, что для системы (1.1) определен скаляризованный функционал платы — свертка векторного функционала (1.2)

$$J\,(x\,(\cdot)) = \max\,\{\alpha_i^\circ \sigma_i\,(x\,(\vartheta))\} \tag{3.1}$$

Символом ω°: $T \times R^n \to R^1$ обозначим функцию ОГР, символом U^*: $T \times R^n \to P$ — оптимальную стратегию в скалярной задаче (1.1), (3.1),

---

[1] Полностью оно, как и доказательства других утверждений, содержится в работе: *Тарасьев А. М.* Дифференциальные игры с векторным критерием. Свердловск, 1989. 43 с.— Деп. в ВИНИТИ 11.07.89, № 4608-В89.

т. е.

$$\omega^\circ(t_*, x_*) = \min_{U} \max_{x(\cdot)\in X(t_*, x_*, U)} \max_{i} \{\alpha_i^\circ \sigma_i(x(\vartheta))\} = \\ = \max_{x(\cdot)\in X(t_*, x_*, U^*)} \max_{i} \{\alpha_i^\circ \sigma_i(x(\vartheta))\} \tag{3.2}$$

Теорема 2. Оптимальная стратегия U° векторной задачи (1.1), (1.2) является оптимальной в скалярной задаче (1.1), (3.1), т. е.

$$\omega^\circ(t_*, x_*) = \max_{x(\cdot)\in X(t_*, x_*, U^\circ)} \max_{i} \{\alpha_i^\circ \sigma_i(x(\vartheta))\}$$

Оптимальная стратегия U^* скалярной задачи (1.1), (3.1) является оптимальной в векторной задаче (1.1), (1.2), т. е.

$$\sigma(x(\vartheta)) \leqslant s^\circ \text{ для всех } x(\cdot) \in X(t_*, x_*, U^*)$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\omega^\circ(t_*, x_*) = \Big(\sum_{j=1}^{m} (s_j^\circ)^{-1}\Big)^{-1}, s^\circ = (s_1^\circ, \ldots, s_m^\circ) \in c(t_*, x_*)$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично рассуждениям из [13].

Замечание 2. Скаляризация векторного критерия невозможна без предварительного знания значения $s_* \in c(t_*, x_*)$ ВМФ ОГР. Кроме того, коэффициенты скаляризации α_i° зависят и от позиции $(t_*, x_*) \in T \times R^n$, и от векторного значения $s_* \in c(t_*, x_*)$ ВМФ ОГР. Априорный выбор коэффициентов скаляризации не будет учитывать специфику задачи: динамику управляемой системы, структуру векторного функционала качества. Решение же комплекса скалярных задач (1.1), (3.1), в которых варьируется набор коэффициентов скаляризации $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1$, связано с большими вычислительными трудностями.

4. Свойство *u*-стабильности, векторные дифференциальные неравенства. Одним из основных свойств множества позиционного поглощения W_u является свойство u-стабильности: оно лежит в основе алгоритмов попятного построения множества W_u, наличие этого свойства у множества программного поглощения обеспечивает совпадение его с множеством позиционного поглощения и т. д. Оказывается, что свойство u-стабильности можно сформулировать для векторных многозначных функций, в том числе и для ВМФ ОГР $(t, x) \to c(t, x)$.

Введем следующие обозначения. Символом SC обозначим класс ВМФ $(t, x) \to \omega(t, x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) при всех $(t, x) \in T \times R^n$ множество $\omega(t, x) \subset R^m$ ограничено;

2) надграфик

$$W = \operatorname{epi} \omega = \{(t, x, s) \in T \times R^n \times R^m \colon s^0 \leqslant s,\ s^0 \in \omega(t, x)\} \tag{4.1}$$

— замкнутое множество;

3) при всех $(t, x) \in T \times R^n$, $s^{(1)}, s^{(2)} \in \omega(t, x)$ $(s^{(1)} \neq s^{(2)})$ выполнено условие $s^{(1)} \nleqslant s^{(2)}$.

Полагаем

$$F(\tau, y, l) = \Pi(\tau, y, l) \cap G(\tau, y) \tag{4.2}$$

$$G(\tau, y) = \operatorname{co}\{f \in R^m \colon f = f(\tau, y, u, v),\ u \in P,\ v \in Q\}$$

$$\Pi(\tau, y, l) = \{r \in R^n \colon \langle l, r\rangle \geqslant H(\tau, y, l)\} \tag{4.3}$$

$$H(\tau, y, l) = \min_{u\in P} \max_{v\in Q} \langle l, f(\tau, y, u, v)\rangle \tag{4.4}$$

$$(\tau, y, l) \in T \times R^n \times S,\ S = \{r \in R^n \colon \| r \| = 1\}$$

Определение 2. Будем говорить, что функция $(t, x) \to \omega(t, x)$: $T \times R^n \to 2^{R^m}$, $\omega \in SC$ обладает свойством u-стабильности, если для любых позиций $(t_*, x_*) \in T \times R^n$ $(t_* < \vartheta)$, вектора $s_* \in \omega(t_*, x_*)$, момента $t \in (t_*, \vartheta]$ и вектора $l \in S$ найдутся решение $x(\cdot)$ дифференциального включения

$$\dot{x}(\tau) \in F(\tau, x(\tau), l),\ x(t_*) = x_*,\ \tau \in [t_*, t]$$

и вектор $s \in \omega(t, x(t))$, такие, что $s \leqslant s_*$.

Отметим, что определение 2 выражает свойство u-стабильности надграфика (4.1) функции ω. Видно, что ВМ ФОГР $(t, x) \to c(t, x)$ u-стабильна в смысле данного определения, так как ее надграфик W_u (множество позиционного поглощения в задаче (2.1), (2.2)) является u-стабильным [3].

Свойство u-стабильности можно определить различными эквивалентными способами. Удобной формой свойства u-стабильности является инфинитезимальная форма [7, 9, 10]. Аппарат производных многозначных отображений может быть применен и для эквивалентного определения свойства u-стабильности ВМФ. Опуская подробности, приведем окончательный вид дифференциальных неравенств, выражающих свойство u-стабильности.

Определение 3. Функция $\omega \in SC$ обладает свойством u-стабильности, если для любых позиций (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta) = T^\circ$, $x_* \in R^n$, векторного значения $s_* \in \omega(t_*, x_*)$ и вектора $l \in S$ найдутся вектор $f \in F(t_*, x_*, l)$ и векторное значение нижней производной $d \in \partial_-\omega(t_*, x_*, s_*) \mid (f)$ функции ω, такие, что $d \leqslant 0$.

Здесь

$$\partial_-\omega(t_*, x_*, s_*)|(h) = \{d^\circ \in \nabla\omega(t_*, x_*, s_*) \mid (h)\colon d \nleqslant d^\circ \text{ для всех } d \in \nabla\omega(t_*, x_*, s_*) \mid (R) \setminus \{d^\circ\}\} \tag{4.5}$$

$$\nabla\omega(t_*, x_*, s_*)|(h) = \{d \in (\bar{R})^m\colon (h, d) \in D\omega(t_*, x_*, s_*)\} \tag{4.6}$$

$$D\omega(t_*, x_*, s_*) = \{(h, d) \in R^n \times (\bar{R})^m : h = \lim_{k\to\infty} (x_k - x_*)(t_k - t_*)^{-1}$$
$$d = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_*)(t_k - t_*)^{-1}, t_k \to t_*, t_k \in (t_*, \vartheta], x_k \in R^n, s_k \in \omega(t_k, x_k)\}$$
$$\bar{R} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{4.7}$$

5. **Векторная многозначная функция программного максимина.** Инфинитезимальную форму свойства u-стабильности можно использовать для получения удобных условий регулярности функции программного максимина в линейных задачах управления с выпуклым векторным критерием.

Пусть динамика системы описывается линейным уравнением

$$\dot{x} = B(t)u + C(t)v,\ \ t \in T,\ \ x \in R^n,\ u \in P \subset R^p,\ v \in Q \subset R^q \tag{5.1}$$

$B(t)$, $C(t)$ — непрерывные $(n \times p)$ и $(n \times q)$ матрицы, P и Q — выпуклые компакты.

Функционал платы определен соотношением

$$J(x(\cdot)) = \varphi(x(\vartheta)) = (\varphi_1(x(\vartheta)), \ldots, \varphi_m(x(\vartheta))) \tag{5.2}$$

φ_i — выпуклые функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Надграфик $\Phi = \text{epi}\,\varphi = \{(x, s) \in R^n \times R^m\colon \varphi(x) \leqslant s\}$ — выпуклое множество. Опорную функцию к надграфику функции φ будем называть сопряженной к векторной функции φ. Она определяется соотношением

$$\rho(l,\alpha)=\sup_{x\in R^n}\{\langle l,x\rangle-(\alpha_1\varphi_1(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m(x))\},\ l\in R^n,\ \alpha\in A \tag{5.3}$$

$$A=\{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in R^m:\ \alpha_i\geqslant 0,\ \alpha_1+\ldots+\alpha_m=1\}$$

где A — $(m-1)$-мерный симплекс.

Отметим, что функция $l\to\rho(l,\alpha)$: $R^n\to\bar{R}$ при фиксированном $\alpha\in A$ есть сопряженная к функции, определенной как свертка $\alpha_1\varphi_1(x)+\ldots+\alpha_m\varphi_m(x)$ компонент φ_i.

Введем обозначение

$Z=\{(t,x,s)\in T\times R^n\times R^m$: для любого $v(\cdot)$ найдется $u(\cdot)$, такое, что

$$\varphi(y(\vartheta))\leqslant s,\ y(\vartheta)=x+\int_t^\vartheta B(\tau)u(\tau)\,d\tau+\int_t^\vartheta C(\tau)v(\tau)\,d\tau\}$$

Здесь $\tau\to u(\tau)$: $[t,\vartheta]\to P$, $\tau\to v(\tau)$: $[t,\vartheta]\to Q$ — измеримые по Лебегу функции (программные управления).

Множество Z назовем множеством программного поглощения.

Из (5.3) следует, что

$$Z=\Big\{(t,x,s)\in T\times R^n\times R^m:\max_{v(\cdot)}\min_{u(\cdot)}\max_{\alpha\in A}\max_{l\in R^n}(\langle l,x\rangle-\langle\alpha,s\rangle+$$
$$+\int_t^\vartheta\langle l,B(\tau)u(\tau)\rangle\,d\tau+\int_t^\vartheta\langle l,C(\tau)v(\tau)\rangle\,d\tau-\rho(l,\alpha))\leqslant 0\Big\}$$

Преобразуя выражение в фигурных скобках, получаем

$$Z=\{(t,x,s)\in T\times R^n\times R^m:\min_{\alpha\in A}(\langle\alpha,s\rangle-g(t,x,\alpha))\geqslant 0\} \tag{5.4}$$

$$g(t,x,\alpha)=\max_{l\in\operatorname{dom}\rho(\alpha)}\Big(\langle l,x\rangle+\int_t^\vartheta H(\tau,l)\,d\tau-\rho(l,\alpha)\Big),\ \alpha\in A \tag{5.5}$$

$$H(\tau,l)=\max_{v\in Q}\langle l,C(\tau)v\rangle+\min_{u\in P}\langle l,B(\tau)u\rangle,\ \tau\in[t,\vartheta],\ l\in R^n \tag{5.6}$$

$\operatorname{dom}\rho(\alpha)=\{r\in R^n:\ \rho(r,\alpha)<+\infty\}$ — компакт в R^n при всех $\alpha\in A$ в силу выполнения условия Липшица для φ_i.

ВМФ $(t,x)\to\mathrm{pm}(t,x)$: $T\times R^n\to 2^{R^m}$, $\mathrm{pm}\in SC$, для которой множество программного поглощения Z является надграфиком, будем называть векторной многозначной функцией программного максимина (ВМФ ПМ), т. е.

$$\mathrm{pm}(t,x)=\{s^\circ\in Z(t,x):s\nleqslant s^\circ\ \text{для всех}\ s\in Z(t,x)\setminus\{s^\circ\}\} \tag{5.7}$$

$$Z(t,x)=\{s\in R^m:\ (t,x,s)\in Z\} \tag{5.8}$$

6. Условия регулярности ВМФ ПМ. Множество программного поглощения Z в общем случае не совпадает с множеством позиционного поглощения W_u в задаче (2.1), (2.2). Справедливо соотношение $W_u\in Z$, так как Z обладает свойством v-стабильности [3]. Если множество Z является, кроме того, u-стабильным множеством, то должно быть выполнено обратное вложение $Z\subseteq W_u$ и, следовательно, равенство $W_u=Z$, Но тогда ВМФ ОГР $(t,x)\to c(t,x)$ совпадает с ВМФ ПМ $(t,x)\to\mathrm{pm}(t,x)$, если ВМФ ПМ $(t,x)\to\mathrm{pm}(t,x)$ u-стабильна. Этот случай называется регулярным, а условия, гарантирующие u-стабильность ВМФ ПМ,— условиями регулярности.

В определение 3 u-стабильности ВМФ входит ее производная (4.5)—(4.7). Производная ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$, определенная формулами (5.4)—(5.8), может быть вычислена в рамках аппарата негладкого анализа [14]. Приведем для нее окончательное выражение.

Нижняя производная ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$ в точке (t_*, x_*, s_*), $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$, $s_* \in \mathrm{pm}\,(t_*, x_*)$ по направлению $h \in R^n$ определяется соотношениями

$$\partial_- \mathrm{pm}\,(t_*, x_*, s_*)|(h) = \{d^\circ \in \nabla\,\mathrm{pm}\,(t_*, x_*, s_*)|(h)\colon d \nleqslant d^\circ \text{ для всех } d \in \nabla\,\mathrm{pm}\,(t_*, x_*, s_*)|(h) \setminus \{d^\circ\}\} \tag{6.1}$$

$$\nabla\,\mathrm{pm}\,(t_*, x_*, s_*)\,|\,(h) = \{d \in R^m : \min_{\alpha \in A(t_*, x_*, s_*)} (\langle \alpha, d\rangle - \max_{l \in L(t_*, x_*, s_*, \alpha)} (\langle l, h\rangle - H(t_*, l))) \geqslant 0\} \tag{6.2}$$

Здесь

$$A(t_*, x_*, s_*) = \{\alpha_* \in A : \alpha_* = \operatorname*{argmin}_{\alpha \in A} (\langle \alpha, s_*\rangle - g(t_*, x_*, \alpha))\} \tag{6.3}$$

$$L(t_*, x_*, s_*, \alpha) = \Big\{l_* \in \mathrm{dom}\,\rho(\alpha) : l_* = \operatorname*{argmax}_{l \in \mathrm{dom}\,\rho(\alpha)} (\langle l, x_*\rangle + \int_{t_*}^{\vartheta} H(\tau, l)\,d\tau - \rho(l, \alpha))\Big\}, \quad \alpha \in A(t_*, x_*, s_*) \tag{6.4}$$

Переписывая при учете равенств (6.1)—(6.4) определение 3, выражающее свойство u-стабильности в инфинитезимальной форме, получаем следующее условие регулярности ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$.

Условие регулярности 1. Для того чтобы ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$ совпадала с ВМФ ОГР $(t, x) \to c\,(t, x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых позиций $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$, значений $s_* \in \mathrm{pm}\,(t_*, x_*)$ и управления $v_* \in Q$ нашлись управление $u_* \in P$ и вектор $d \in R^m$, удовлетворяющий условиям

$$\min_{\alpha \in A(t_*, x_*, s_*)} (\langle \alpha, d\rangle - \max_{l \in L(t_*, x_*, s_*, \alpha)} (\langle l, B(t_*)\,u_*\rangle - \min_{u \in P} \langle l, B(t_*)\,u\rangle + \langle l, C(t_*)\,v_*\rangle - \max_{v \in Q} \langle l, C(t_*)\,v\rangle)) \geqslant 0 \tag{6.5}$$

$$d \leqslant 0 \tag{6.6}$$

Замечание 3. Соотношения (6.5), (6.6) аналогичны условию регулярности функции программного максимина в дифференциальной игре со скалярным критерием, которое приведено в [5, 6].

Условие регулярности ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$ можно сформулировать в терминах сопряженных переменных.

Условие регулярности 2. Для того чтобы ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}\,(t, x)$ совпадала с ВМФ ОГР $(t, x) \to c\,(t, x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых позиций $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$ и значений $s_* \in \mathrm{pm}\,(t_*, x_*)$ было выполнено соотношение

$$\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k H(t_*, l_k) \geqslant H\Big(t_*, \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k l_k\Big) \tag{6.7}$$

$$l_k \in \bigcup_{\alpha \in A(t_*, x_*, s_*)} L(t_*, x_*, s_*, \alpha), \gamma_k \geqslant 0, k = 1, \ldots, n+1, \sum_{k=1}^{n+1} \gamma_k = 1 \tag{6.8}$$

Доказательство. Рассмотрим многозначное отображение $t \to Z(t)$, где

$$Z(t) = \{(x, s) \in R^n \times R^m : (t, x, s) \in Z\}$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$, $s_* \in \mathrm{pm}(t_*, x_*)$. Для производной многозначного отображения $t \to Z(t)$ в точке (t_*, x_*, s_*) имеем формулу

$$DZ(t_*, x_*, s_*) = \{(\xi, d) \in R^n \times R^m : \min_{\alpha \in A(t_*, x_*, s_*)} (\langle \alpha, d \rangle - \\ - \max_{l \in L(t_*, x_*, s_*, \alpha)} (\langle l, \xi \rangle - H(t_*, l))) \geqslant 0\} \tag{6.9}$$

Согласно результатам работы [9] условие u-стабильности многозначного отображения $t \to Z(t)$ может быть записано в виде: для любых позиций $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$, значений $s_* \in \mathrm{pm}(t_*, x_*)$ и вектора $v_* \in Q$ справедливо соотношение

$$DZ(t_*, x_*, s_*) \cap \mathrm{FR}(t_*, x_*, s_*, v_*) \neq \varnothing \tag{6.10}$$

$$\mathrm{FR}(t_*, x_*, s_*, v_*) = \{(B(t_*)u + C(t_*)v_*, 0) : u \in P, 0 \in R^m\}$$

Так как $DZ(t_*, x_*, s_*)$ в рассматриваемом случае является выпуклым замкнутым множеством, а $\mathrm{FR}(t_*, x_*, s_*, v_*)$ — выпуклый компакт, то по теореме об отделимости выпуклых множеств [15] соотношение (6.10) может быть записано в виде

$$\sup_{(\xi, d) \in DZ(t_*, x_*, s_*)} (\langle l, \xi \rangle - \langle \alpha, d \rangle) \geqslant H(t_*, l) \tag{6.11}$$

для всех $(t_*, x_*) \in T^\circ \times R^n$, $s_* \in \mathrm{pm}(t_*, x_*)$, $(l, \alpha) \in R^n \times A$.

Учитывая формулу (6.9), получаем [15]

$$\sup_{(\xi, d) \in DZ(t_*, x_*, s_*)} (\langle l, \xi \rangle - \langle \alpha, d \rangle) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (l, \alpha) \notin \mathrm{co}\{\mathrm{AL}\} \\ \sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k H(t_*, l_k), & \text{если } (l, \alpha) \in \mathrm{co}\{\mathrm{AL}\} \end{cases} \tag{6.12}$$

Здесь

$$\mathrm{co}\{\mathrm{AL}\} = \Big\{(l^\circ, \alpha^\circ) \in R^n \times A : (l^\circ, \alpha^\circ) = \sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k{}^\circ (l_k{}^\circ, \alpha_k{}^\circ),\ \alpha_k{}^\circ \in A(t_*, x_*, s_*),$$

$$l_k{}^\circ \in L(t_*, x_*, s_*, \alpha^\circ),\quad \beta_k{}^\circ \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n + m + 1,\ \sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k{}^\circ = 1\Big\} \tag{6.13}$$

коэффициенты β_k и векторы l_k, $k = 1, \ldots, n + m + 1$ соответствуют вектору $(l, \alpha) \in R^n \times A$ в разложении (6.13).

При учете (6.12), (6.13) соотношение (6.11) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k H(t_*, l_k) \geqslant H\Big(t_*, \sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k l_k\Big) \tag{6.14}$$

$$l_k \in \bigcup_{\alpha \in A(t_*, x_*, s_*)} L(t_*, x_*, s_*, \alpha), \beta_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, n + m + 1,\ \sum_{k=1}^{n+m+1} \beta_k = 1$$

В (6.14) на основании теоремы Каратеодори [15] можно ограничиться лишь суммами, в которых индекс меняется в пределах от 1 до $n + 1$. Окончательно получаем условие регулярности (6.7), (6.8).

Замечание 4. Соотношения (6.7), (6.8) имеют форму, аналогичную условию регулярности функции ПМ в дифференциальной игре со скалярным критерием [4].

Замечание 5. В этой работе условия регулярности (6.5), (6.6) и (6.7), (6.8) получены при помощи дифференциальных неравенств. Однако в окончательном виде они не содержат инфинитезимальных конструкций.

7. Пример. Рассмотрим линейную систему второго порядка

$$z_1{}^\cdot = z_2 + v,\ t \in [0, 1],\ z = (z_1, z_2) \in R^2,\ |u| \leqslant 1,\ |v| \leqslant 1 \\ z_2{}^\cdot = u \tag{7.1}$$

Векторную функцию платы определим соотношением

$$\sigma(z) = (\sigma_1(z), \sigma_2(z)),\ \sigma_1(z) = |z_1|,\ \sigma_2(z) = |z_2| \tag{7.2}$$

Отметим, что система (7.1) со скалярным критерием $\max\{|z_1|, |z_2|\}$ изучалась в [16].

Традиционная замена переменных $x = \Phi(t, \vartheta) z$ ($\Phi(t, \vartheta)$ — фундаментальная матрица однородной системы) приводит к системе

$$x_1{}^\cdot = (1 - t)u + v,\ t \in [0, 1],\ x = (x_1, x_2) \in R^2,\ |u| \leqslant 1,\ |v| \leqslant 1 \\ x_2{}^\cdot = u \tag{7.3}$$

с векторным функционалом платы

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)),\ \varphi_1(x) = |x_1|,\ \varphi_2(x) = |x_2| \tag{7.4}$$

Полный разбор этого примера, т. е. вычисление ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}(t, x)$ во всех позициях $(t_*, x_*) \in [0, 1] \times R^2$ и проверка соотношений (6.5), (6.6) или (6.7); (6.8), как того требуют условия регулярности, был бы слишком громоздким. Поэтому ограничимся случаем $t_* = t$ $(t \in [0, 1])$, $x_* = 0$.

Имеем

$$A = \{\alpha \in R^2 : \alpha_k \geqslant 0,\ k = 1, 2,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$$

$$\rho(l, \alpha) = \sup_{x \in R^2} (l_1 x_1 + l_2 x_2 - \alpha_1 |x_1| - \alpha_2 |x_2|) = \begin{cases} 0, & \text{если } |l_1| \leqslant \alpha_1 \text{ и } |l_2| \leqslant \alpha_2 \\ +\infty, & \text{если } |l_1| > \alpha_1 \text{ или } |l_2| > \alpha_2 \end{cases} \tag{7.5}$$

$$g(t, x, \alpha) = \max_{|l_k| \leqslant \alpha_k,\ k=1,2} \left(l_1 x_1 + l_2 x_2 + \int_t^1 |l_1|\, d\tau - L(t) \right)$$

$$L(t) = \int_t^1 |l_1(1-\tau) + l_2|\, d\tau$$

В позиции $(t_*, x_*) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ получаем

$$g(t, 0, \alpha) = \max_{|l_k| \leqslant \alpha_k,\ k=1,2} ((1-t) l_1 - L(t))$$

Можно показать, что максимум достигается при $l_1 = \alpha_1$. Поэтому

$$g(t, 0, \alpha) = \max_{|l_2| \leqslant \alpha_2} \left((1-t)\alpha_1 - \int_t^1 |\alpha_1(1-\tau) + l_2|\, d\tau \right) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_1(1-t) - (\alpha_2^2 + (\alpha_1(1-t) - \alpha_2)^2)(2\alpha_1)^{-1}, & \text{если } 2\alpha_2 \leqslant \alpha_1(1-t) \\ \alpha_1(1-t) - {}^1/_4 \alpha_1 (1-t)^2, & \text{если } 2\alpha_2 \geqslant \alpha_1(1-t) \end{cases} \tag{7.6}$$

Из (5.4), (5.8), (7.6) после преобразований получаем

$$Z(t, 0) = \{s \in R^2 : \min\{\eta_1(s), \eta_2(s), \eta_3(s)\} \geqslant 0\} \tag{7.7}$$

$$\eta_1(s) = s_2,\quad \eta_2(s) = s_1 - (1-t) - \nu(t)$$

$$\eta_3(s) = \begin{cases} s_2 - 2h(t) + 2(s_1 - s_2 + 1 + \nu(t))^{1/2}, & \text{если } \nu(t) \leqslant s_1 - s_2 \leqslant \mu(t) \\ -\infty, & \text{если } \nu(t) > s_1 - s_2 \text{ или } s_1 - s_2 > \mu(t) \end{cases}$$

$$h(t) = 1 + {}^1/_2(1-t),\quad \nu(t) = -{}^1/_2(1-t)^2,\quad \mu(t) = (1-t) - {}^1/_4(1-t)^2$$

Из (7.7), имеем, что ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}(t, x)$ в точке $(t_*, x_*) = (t, 0)$, $t \in [0, 1]$ есть множество, состоящее из куска параболы

$$\mathrm{pm}(t, 0) = \{s \in R^2 : s_1 - {}^1/_4(s_2 - (1-t))^2 - (1-t) + {}^1/_2(1-t)^2 = 0,\quad 0 \leqslant s_2 \leqslant 1 - t\}$$

Проверим условия регулярности (6.7), (6.8) в позициях $(t_*, x_*) = (t, 0)$, $t \in [0, 1)$. Напомним, что гамильтониан системы (7.3) определяется соотношением

$$H(t, l) = \max_{|v| \leqslant 1} l_1 v + \min_{|u| \leqslant 1} (l_1(1-t) + l_2) u = |l_1| - |l_1(1-t) + l_2|$$

Пусть $s = (s_1, s_2) \in \mathrm{pm}(t, 0)$, $t \in [0, 1)$. Будем рассматривать два случая: 1) $0 < s_2 \leqslant 1 - t$; 2) $s_2 = 0$.

В первом случае имеем

$$A(t, 0, s) = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 = 2(2 + (1-t) - s_2)^{-1},\ \alpha_2 = ((1-t) - s_2)(2 + (1-t) - s_2)^{-1}\}$$

$$L(t, 0, s, \alpha) = \{a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2) : a_1 = \alpha_1,\ a_2 = -\alpha_2,\ b = -a\}$$

Получаем

$$H(t, a) = H(t, b) = |\alpha_1| - |\alpha_1(1-t) - \alpha_2| = (2 - (1-t) - s_2) \cdot (2 + (1-t) - s_2)^{-1}$$

$$H(t, \gamma a + (1-\gamma) b) = |2\gamma - 1| (2 - (1-t) - s_2)(2 + (1-t) - s_2)^{-1}$$

$$0 \leqslant \gamma \leqslant 1,\quad 0 < s_2 \leqslant 1 - t$$

Так как справедливо неравенство

$$\gamma H(t, a) + (1-\gamma) H(t, b) = H(t, a) = (2 - (1-t) - s_2)(2 + (1-t) - s_2)^{-1} \geqslant |2\gamma - 1| (2 - (1-t) - s_2)(2 + (1-t) - s_2)^{-1} = H(t, \gamma a + (1-\gamma) b),\quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1$$

то условия (6.7), (6.8) выполнены.

Во втором случае имеем

$$A(t, 0, s) = \{\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2),\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) : \varkappa_1 = 2(2 + (1 - t))^{-1},$$
$$\varkappa_2 = (1 - t)(2 + (1 - t))^{-1},\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1\}$$
$$L(t, 0, s, \varkappa) = \{a = (a_1, a_2),\ \ b = (b_1, b_2) : a_1 = \varkappa_1,\ \ a_2 = -\varkappa_2,\ \ b = -a\}$$
$$L(t, 0, s, \lambda) = \{c = (c_1, c_2) : c_1 = 0,\ c_2 = 0\}$$
$$H(t, a) = H(t, b) = |\varkappa_1| - |\varkappa_1(1 - t) - \varkappa_2| = (2 - (1 - t))(2 + (1 - t))^{-1},$$
$$H(t, c) = 0$$
$$H(t, \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c) = |\gamma_1 - \gamma_2|(2 - (1 - t))(2 + (1 - t))^{-1}$$
$$\gamma_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, 3,\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$$

Так как справедливо неравенство

$$\gamma_1 H(t, a) + \gamma_2 H(t, b) + \gamma_3 H(t, c) = (\gamma_1 + \gamma_2) H(t, a) =$$
$$= (\gamma_1 + \gamma_2)(2 - (1 - t))(2 + (1 - t))^{-1} \geqslant |\gamma_1 - \gamma_2|(2 - (1 - t))(2 + (1 - t))^{-1} =$$
$$= H(t, \gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 c),\ \gamma_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, 3,\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$$

то условия (6.7), (6.8) выполнены.

Аналогично можно вычислить значения ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}(t, x)$ в остальных позициях $(t_*, x_*) \in [0, 1] \times R^2$ и проверить условия регулярности (6.7), (6.8).

В этом примере ВМФ ПМ $(t, x) \to \mathrm{pm}(t, x)$ совпадает с ВМФ ОГР $(t, x) \to c(t, x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Krasovskii N. N., Subbotin A. I.* Game-theoretical control problems. New York etc.: Springer, 1987. 515 p.
5. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Ченцов А. Г.* Об условиях стабильности дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. № 4. С. 800—803.
7. *Субботин А. И.* Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 293—297.
8. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. No. 1. P. 1—42.
9. *Гусейнов X. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Проблемы управления и теории информации. 1985. Т. 14. № 3. С. 155—167.
10. *Субботин А. И., Тарасьев А. М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559—564.
11. *Никольский М. С.* О гарантированных оценках в дифференциальных играх с векторным критерием качества и фиксированным временем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 2. С. 37—43.
12. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
13. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383 с.
14. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
16. *Тарасьев А. М.* Об одной нерегулярной дифференциальной игре // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 682—684.

Свердловск

Поступила в редакцию
27.VI.1990