Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 2, 1991

УДК 531.36 : 62—50

Дж. М. Селиг

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВИНТОВ В ДИНАМИКЕ РОБОТОВ

Развивается концептуально простой подход к описанию динамики твердого тела. Кратко излагаются основы исчисления винтов, причем главный упор делается на геометрическую природу и алгебраические свойства этих объектов. Показывается, как описывается кинематика и динамика абсолютно твердого тела с использованием винтовых переменных. Выводятся соответствующие уравнения. Далее эта техника обобщается на системы абсолютно твердых тел, последовательно соединенных при помощи шарниров. Дается вывод уравнений Лагранжа для шестизвенного манипулятора, управляемого при помощи моментов, действующих в осях его шарниров.

В предшествующих работах были попытки использовать дуально-векторную формулировку (в особенности, в [1, 2]), без выяснения ее геометрической природы. Ниже используется геометрическое описание классической механики [3, 4]. Преимущество этого подхода состоит в том, что соответствующие величины представляют собой хорошо определенные геометрические объекты: скаляры, векторы, тензоры и т. д. Ключевой элемент работы — признание того факта, что скорости и моменты являются различными геометрическими объектами.

1. Теория винтов и алгебры Ли. Начнем с краткого обзора элементов теории винтов и ее связи с алгебрами Ли; подробности могут быть найдены в [5—8]. Движение твердого тела обычно описывается (4×4)-матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} R & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

где x — вектор трансляций, а R — (3×3)матрица вращений, т. е. ортогональная матрица специального вида. Множество всех движений твердого тела образует евклидову группу $E\,(3)$ в трехмерном пространстве. Эти (4×4)-матрицы образуют представление группы, которое позволяет вычислять изменение вектора состояния при «жестких» движениях тела (вращения и трансляции).

Рассмотрим некоторое движение твердого тела. В каждый момент времени конфигурация задается элементом группы, а конечное движение — кривой на многообразии группы.

Перейдем к инфинитезимальным элементам группы. Их можно трактовать как касательные векторы к группе в некоторой точке. Вычисления можно проводить, используя любое матричное представление группы. Предположим, что

$$\gamma : t \mapsto \begin{Vmatrix} R\,(t) & x\,(t) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

является кривой на $E\,(3)$, параметризированной посредством t. Производная в некоторой точке $g = \gamma\,(t_0)$ равна просто $d\gamma\,(t_0)/dt$. Если g — тождественный элемент, то о касательных вектора в этой точке можно сказать больше. В частности, для $E\,(3)$ ввиду ортогональности подматрицы R имеем $R^T R = 1$. Дифференцируя это выражение, получаем $R^{\cdot T} R + R^T R^{\cdot} = 0$. Для тождественного элемента формула упрощается: $R^{\cdot T} + R^{\cdot} = 0$, следовательно, матрица $R^{\cdot}$ кососимметрична. Такиа образом, касательный вектор к тождественному элементу имеет вид

$$s = \begin{Vmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

где Ω — кососимметрическая (3×3)-матрица, а v — трехмерный вектор.

Эти матрицы образуют векторное пространство. Произведение двух кососимметрических матриц, вообще говоря, не дает матрицу такого же вида, однако коммутатор равен касательному вектору к тождественному элементу. Коммутатор двух векторов определяется как $[s_1, s_2] = s_1 s_2 - s_2 s_1$.

Тем самым касательное пространство к группе на тождественном элементе приобретает структуру алгебры Ли, которую будем обозначать $e(3)$. Коммутатор имеет сходство с умножением, но не обладает свойством ассоциативности. Вместо этого он подчиняется тождеству Якоби

$$[s_1, [s_2, s_3]] + [s_2, [s_3, s_1]] + [s_3, [s_1, s_2]] = 0$$

Из теоремы Шаля ясно, что конечные винты, описанные Боллом [9], представляют собой движения твердого тела, рассмотренные выше. Более того, мгновенные винты Болла — не что иное, как элементы алгебры Ли. Соответствие становится ясным после представления элементов алгебры Ли в виде шестимерных векторов:

$$s = \begin{Vmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \equiv \begin{Vmatrix} \omega \\ v \end{Vmatrix}$$

Так как Ω — кососимметрическая матрица, можно использовать стандартный кососимметрический тензор ε_{ijk}, так что в некоторой декартовой системе координат $\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$, или в более явной форме:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{Vmatrix}$$

Бывает также удобно представлять винты как дуальные векторы

$$s = \omega + \varepsilon v$$

Здесь ε — формальный символ, называемый дуальной единицей, который коммутирует с векторами и удовлетворяет условию $\varepsilon^2 = 0$.

Несложное вычисление показывает, что

$$[s_1, s_2] = s_1 \wedge s_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \varepsilon(\omega_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge \omega_2) = \\ = (\omega_1 + \varepsilon v_1) \wedge (\omega_2 + \varepsilon v_2)$$

Это означает, что коммутатор алгебры Ли соответствует дуальному векторному произведению $\wedge$ (использовать различные обозначения для двойственного и стандартного векторного произведения необязательно, так как смысл должен быть ясен из контекста).

Винт скоростей твердого тела может быть подсчитан следующим образом. Пусть движение твердого тела задается, как и раньше, зависимостью $\gamma(t)$, но теперь t — время. Производные по времени равны $\gamma^{\cdot}(t)$. В каждый момент $t = t_0$ это касательный вектор к группе, но не обязательно винт. Для того чтобы превратить его в винт, нужно привести его к единице умножением справа на обратный элемент $\gamma(t)^{-1}$. Таким образом, винт скоростей тела в момент t_0 равен

$$s(t_0) = \gamma^{\cdot}(t_0)\gamma^{-1}(t_0) = \begin{Vmatrix} R^{\cdot}(t_0) R^T(t_0) & -R^{\cdot}(t_0) R^T(t_0) x(t_0) + x^{\cdot}(t_0) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

В терминах дуальных векторов получаем, что

$$s(t_0) = \omega(t_0) + \varepsilon(v(t_0) - \omega(t_0) \wedge x(t_0))$$

где ω — обычная угловая скорость твердого тела аналогично случаю, когда рассматриваются только вращения относительно фиксированной точки (см., например, [10], с. 8).

Каждая группа Ли G имеет естественное присоединенное представление, которое действует на ее алгебре Ли, и возникает в результате рассмотрения сопряжений в группе. Следующие отображения являются гладкими: f_g: $G \to G$, где $f_g(h) = ghg^{-1}$ для всех x, $h \in G$. Все они переводят тождественный элемент в себя, так что якобиан каждого отображения в единице является линейным отображением на алгебре Ли. Так как $f_g f_{g'} = f_{gg'}$, то якобианы задают линейное представление группы G.

Используя исходное представление $E(3)$, можно вычислить присоединенное представление:

$$\begin{Vmatrix} \Omega' & v' \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} R^T & -R^T x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R\Omega R^T & -R\Omega R^T x + Rv \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

В терминах шестимерных векторов это равенство может быть записано как

$$\begin{Vmatrix} \omega' \\ v' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R & 0 \\ XR & R \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \omega \\ v \end{Vmatrix}$$

где $X_{ij} = -\varepsilon_{ijk} x_k$, а R — та же величина, что и раньше. Это дает описание трансформации винтов при «жестком» изменении координат.

Можно отобразить элементы алгебры Ли в исходную группу, используя экспоненциальные отображения

$$s \mapsto e^s = 1 + s + s^2/2 + \ldots + s^n/n! + \ldots$$

Если применить матричное представление алгебры Ли, степени s могут интерпретироваться как степени матриц. Результатом экспоненциального отображения будет матрица в соответствующем представлении группы. Однако независимо от того, какое представление используется, будет получаться тот же самый элемент группы. Таким образом, отображение имеет смысл, даже если оно не связано с конкретным представлением.

Выберем некоторый элемент $s \in e(3)$. Тогда множество элементов группы вида $e^{\theta s}$ для всех скалярных θ образует подгруппу группы $E(3)$. Физически эта подгруппа является группой симметрии для нижней пары Рело с одной степенью свободы [9]. Отсюда вытекает, что жесткие движения относительно рассматриваемого шарнира сводятся к однопараметрической подгруппе.

Далее предположим, что параметр шарнира возрастает с постоянной скоростью. Относительное движение двух сторон шарнира задается величиной $g(t) = e^{ts}$ и винт скоростей такого движения имеет вид $\dot{g} g^{-1} = se^{ts}e^{-ts} = s$, т. е. постоянен.

2. Момент и инерция. Стандартной характеристикой движения твердого тела является винт $a = p + \varepsilon M$, который далее будет называться моментом. Кинетическая энергия тела может быть записана как

$$E_k = {}^1/_2 s \circ a = {}^1/_2 (p\, v + M\omega)$$

Это уравнение принадлежит, по-видимому, Боллу [9] и, хотя формально справедливо, дает ложное представление о природе момента. Адекватность этого уравнения объясняется случайным свойством трехмерного пространства.

В современной механике момент понимается как линейная функция скоростей: $r^* : e(3) \to \mathbf{R}$. Пространство всех таких функций образует векторное пространство той же размерности, что и исходное пространство векторов скоростей. Это векторное пространство функций обычно называется двойственным (дуальным) векторным пространством. Но чтобы избежать смешения с дуальными числами, шестимерные векторы скорости будут называться винтами, а векторы моментов ковинтами. На более традиционном языке винты будут называться ковариантными векторами, а ковинты — контравариантными векторами. Векторное пространство ковинтов будет обозначаться $e^*(3)$.

По аналогии с винтами можно представить ковинт как вектор-столбец $r^* = (M, p)^T$, где M и p — угловой момент и импульс соответственно. Выражение $r^*(s)$ может быть записано как матричное произведение

$$r^*(s) = (M^T, p^T) \begin{Vmatrix} \omega \\ v \end{Vmatrix} = 2E_k$$

Теперь ясно, что винты и ковинты — различные объекты, так как они по-разному изменяются при «жесткой» замене координат. В новых координатах $s' = Hs$, где H — блочная (6×6)-матрица вида

$$H = \begin{Vmatrix} R & 0 \\ XR & R \end{Vmatrix}$$

Здесь R — матрица вращений, а $X_{ij} = -\varepsilon_{ijk}x_k$. Фактически это присоединенное представление группы на ее алгебре Ли.

Для того чтобы скалярная величина $r^*(s)$ оставалась постоянной, необходимо, чтобы $r^{*\prime} = (H^T)^{-1} r^*$. В отличие от обычных случаев чистого вращения матрица H не ортогональна, так что $(H^T)^{-1} \neq H$. В действительности

$$(H^T)^{-1} = \begin{Vmatrix} R & XR \\ 0 & R \end{Vmatrix}$$

В этой форме понятие ковинта не так уж и ново. Например, для робота с шестью шарнирами строки обратной матрицы Якоби являются ковинтами [11]. Они также встречаются в задачах гибридного управления роботами [12], так как «усилия» также являются ковинтами. Важно отметить, что винты и ковинты действительно различаются, и, хотя два этих векторных пространства изоморфны, они не являются естественно изоморфными.

Многие авторы пытались представить динамику твердого тела при помощи формализма дуальных векторов. Это привлекательная мысль, так как алгебра дуальных векторов в высшей степени компактна. Неудобства доставляет то обстоятельство, что если рассматривать скорости и моменты как двойственные векторы, то трудно интерпретировать моменты инерции, и обычно это приводит к неуклюжим обозначениям и выражениям.

Перейдем теперь к алгебраическим свойствам ковинтов. Пусть в $\mathbf{R}^3$ зафиксированы ортонормальные базисные векторы. Соответствующий набор базисных векторов в $e(3)$ обозначим $i, j, k, \varepsilon i, \varepsilon j, \varepsilon k$. Тогда в двойственных обозначениях винт может быть записан как

$$s = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k + v_x \varepsilon i + v_y \varepsilon^j + v_z \varepsilon k$$

Соответствующий базис для ковинтов будет $i^*, j^*, k^*, \varepsilon_i^*, \varepsilon_j^*, \varepsilon_k^*$, где

$$l^*(n) = \varepsilon_l^*(\varepsilon n) = \begin{cases} 1, & l = n \\ 0, & l \neq n \end{cases}, \quad l, n \in \{i, j, k\}$$

а все недиагональные члены равны нулю.

Отсюда вытекает, что ковинт может быть записан как

$$r^* = M_x i^* + M_y j^* + M_z k^* + p_x \varepsilon_i{}^* + p_y \varepsilon j^* + p_z \varepsilon_k{}^*$$

Заметим, что e^* (3) — векторное пространство над действительными, но не над дуальными числами. Возможность векторного умножения моментов утрачена, но взамен получена новая билинейная операция $\{\ \}$: $e^*(3) \times e(3) \to e^*(3)$. Она получается из скобки Ли винтов при помощи соотношения

$$\{r^*,\ s_1\}(s_2) = r^*(s_1 \wedge s_2)$$

Например, $\{\varepsilon_i{}^*,\ \varepsilon j\} = -k^*$, так как

$$\{\varepsilon_i{}^*,\ \varepsilon j\}(k) = \varepsilon_i{}^*(\varepsilon j \wedge k) = \varepsilon_i{}^*(-\varepsilon i) = -1$$

Однако

$$\{\varepsilon_i{}^*,\ \varepsilon j\}(l) = \varepsilon_i{}^*(\varepsilon j \wedge l) = 0$$

для всякого базисного элемента $l \neq k$.

В терминах векторов-столбцов можно показать, что

$$\{r^*, s\} = \left\{\begin{Vmatrix} M \\ p \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \omega \\ v \end{Vmatrix}\right\} = \begin{Vmatrix} \omega \wedge M + v \wedge p \\ \omega \wedge p \end{Vmatrix}$$

Последнее выражение представляет собой векторное произведение двух винтов, у которых переставлены первые и последние три компоненты. Однако вышеизложенное относится к любой координатной системе.

Возникает вопрос, как после разделения понятий скорости и момента интерпретировать моменты инерции. Ответ состоит в том, что моменты инерции следует понимать как операторы (тензоры), преобразующие скорости в моменты. Оператору инерции соответствует линейный изоморфизм $K: e(3) \to e^*(3)$. Оператор K может быть представлен как симметрический тензор или как симметрическая (6×6)-матрица. Таким образом, корректный способ получения ковинта из винта определяется равенством $r^* = Ks$. Для K пока нет однозначного выбора. Однако для конкретного твердого тела K в точности определяется уравнениями элементарной механики.

$$M = A\omega + m(c \wedge V),\ p = mv + m(\omega \wedge c)$$

где m — масса тела, c — положение центра масс, A — (3×3)-тензор инерции. Тогда имеет место формула

$$K = \begin{Vmatrix} A & mC \\ mC^T & mI \end{Vmatrix}$$

Как обычно, I — единичная (3×3)-матрица, а $C_{ij} = -\varepsilon_{ijk} c_k$. Кинетическая энергия тела определяется соотношением $E_k = (1/2)\, Ks(s) = (1/2)\, s^T K s$, где s понимается как вектор-столбец. Отсюда можно усмотреть, что замена координат, определяемая (6×6)-матрицей указанного выше вида, приводит к следующему изменению тензора инерции:

$$K' = (H^T)^{-1} K H^{-1}$$

Это уравнение отражает комбинацию тензорных свойств (3×3)-матрицы инерции и теоремы Штейнера о параллельных осях. Его можно понимать как теорему о косых осях.

Чтобы увидеть связь с теоремой Штейнера, рассмотрим случай, когда H является чистой трансляцией, а начало исходной системы координат находится в центре масс тела. В этом случае вычисления упрощаются, так как

$$K = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & mI \end{Vmatrix},\qquad H = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ X & I \end{Vmatrix}$$

и таким образом,

$$K' = \begin{Vmatrix} I & X \\ 0 & I \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & mI \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I & 0 \\ -X & I \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A - mX^2 & mX \\ -mX & mI \end{Vmatrix}$$

Вычисления подтверждают это: $X^2 = xx^T - x^T xI$, где xx^T — внешнее, или диадное произведение. Для сравнения отсылаем читателя к формулировке теоремы Штейнера в учебниках (например [10], с. 85).

3. Уравнения Ньютона — Эйлера. Теперь, введя удачные обозначения, можно получить уравнения движения изолированного твердого тела, имитируя стандартный вывод уравнений движения тела с неподвижной точкой. Начнем со сравнения производных по времени в неподвижной инерциальной системе координат Σ и в связанной с твердым телом системе Σ'. В каждый момент времени существует жесткое преобразование $H(t)$, переводящее компоненты винта из системы Σ в систему Σ'.

Рассмотрим произвольный винт q или ковинт m^*. Производные по времени в выбранных системах координат запишутся как Dq и $D'q$. Связь между ними определяется теоремой Кориолиса ([10], с. 10]).

В системе координат Σ винт q может быть записан так:

$$q = \sigma_x i + \sigma_y j + \sigma_z k + u_x \varepsilon i + u_y \varepsilon j + u_z \varepsilon k$$

В инерциальной системе координат производная винта по времени Dq получается покомпонентным дифференцированием. В координатах Σ' имеем

$$q = \sigma_x' i + \sigma_y' j + \sigma_z' k + u_x' \varepsilon i + u_y' \varepsilon j + u_z' \varepsilon k$$

Эти новые компоненты винта задаются соотношением

$$\begin{Vmatrix} \sigma' \\ u' \end{Vmatrix} = H \begin{Vmatrix} \sigma \\ u \end{Vmatrix}$$

т. е. относительное движение систем координат — «жесткое». Дифференцируя последнее равенство по времени, получаем

$$\begin{Vmatrix} \sigma^{\cdot\prime} \\ u^{\cdot\prime} \end{Vmatrix} = H \begin{Vmatrix} \sigma^{\cdot} \\ u^{\cdot} \end{Vmatrix} + H^{\cdot} \begin{Vmatrix} \sigma \\ u \end{Vmatrix}$$

В терминах производных по времени в системе координат этот результат может быть записан так

$$D'q = Dq + H^{\cdot} H^{-1} q$$

Используя выражение для H из разд. 2, имеем

$$H^{\cdot} H^{-1} = \begin{Vmatrix} R^{\cdot} R^T & 0 \\ X^{\cdot} + X R^{\cdot} R^T - R^{\cdot} R^T X & R^{\cdot} R^T \end{Vmatrix}$$

$$H^{\cdot} H^{-1} q = s \wedge q, \quad s = \begin{Vmatrix} \omega \\ x^{\cdot} + x \wedge \omega \end{Vmatrix}$$

(s — винт скоростей системы координат Σ' относительно Σ, ω — относительная угловая скорость двух систем координат, а x — вектор позиции начала координат Σ' в системе Σ). Таким образом, соотношение между производными по времени имеет вид

$$D'q = Dq + s \wedge q$$

Аналогично, для ковинтов имеем

$$D'm^* = Dr^* + \{r^*, s\}$$

Теперь можно вывести уравнения движения. Для этого достаточно повторить вывод уравнений Эйлера ([4], с. 143). Пусть $m^* = Ks$ — момент ковинта твердого тела. Тогда в силу законов Ньютона в инерциальной системе координат имеем $Dm^* = f^*$, где f^* — общее «усилие», приложенное к телу: $f^* = (T, F)^T$ (T — результирующий момент силы, F — результирующая сила, действующая на тело). По теореме Кориолиса

$$D'm^* = \{m^*, s\} + f^*$$

Итак, получено уравнение движения твердого тела в форме Ньютона—Эйлера. Превратим его в дифференциальное уравнение относительно s, так как $m^* = Ks$, а D' — производная в связанной системе координат, $D'K = 0$. В результате

$$Ks^{\cdot} = \{Ks, s\} + f^*$$

Отсюда ясно, как объединить уравнения для нескольких твердых тел и улучшить обычную рекурсивную формулировку динамики роботов посредством исключения реакций в шарнирах. Однако необходима определенная осторожность, так как винт скоростей представлен здесь в координатах, связанных с телом (или звеном для робота).

4. Производные для кинематических цепей. Выше было показано, что производные по времени винта или ковинта в различных системах координат связаны простыми геометрическими соотношениями. Это справедливо и для других производных, если известна кинематика. Для разомкнутой кинематической цепи, которая встречается в шестизвенном роботе, ситуация в особенности простая.

Предположим, что $s_1(t), s_2(t), \ldots, s_6(t)$ — винты шарниров робота. Изменение позиции и ориентации i-го звена по отношению к начальному положению в момент $t = 0$ определяется некоторым жестким отображением H_i. Прямое кинематическое отображение представляется как произведение экспоненциальных функций от угловых переменных

$$H_i = \exp(\theta_1 s_1(0)) \exp(\theta_2 s_2(0)) \ldots \exp(\theta_i s_i(0))$$

Соответствующий винт скоростей задается производной по времени от этого выражения (см. [1]), но также может быть записан в терминах скоростей шарниров

$$q_i^{\cdot} = H_i^{\cdot} H_i^{-1} = J_i \theta^{\cdot}$$

Здесь $\theta^{\cdot}$ — шестимерный вектор скоростей шарниров $\theta_1^{\cdot}, \ldots, \theta_6^{\cdot}$, а матрица J_i — якобиан прямого кинематического отображения. Ее значение нетрудно оценить, так как $H_i = I$ при $t = 0$. Поэтому

$$H_i^{\cdot}(0) H_i^{-1}(0) = \theta_1^{\cdot}(0) s_1(0) + \theta_2^{\cdot}(0) s_2(0) + \ldots + \theta_i^{\cdot}(0) s_i(0)$$

Здесь неявно было использовано матричное представление винтов, но в силу замечаний, сделанных в конце разд. 1, это несущественно. Винты могут быть представлены как шестимерные векторы. Тогда столбцы матрицы Якоби будут иметь вид: $J_i = (s_1(0), s_2(0), \ldots, s_i(0), 0, \ldots, 0)$. Якобианы являются (6×6)-матрицами, J — обычный якобиан манипулятора. Относительно начальной конфигурации никаких специальных предположений не делается. Тогда, вообще говоря, якобиан может быть записан как

$$J_i(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_i(t), 0, \ldots, 0)$$

Столбцы якобиана — текущие значения винтов шарниров. В дальнейшем, чтобы упростить обозначения, явная зависимость от времени будет обычно опускаться.

Частные производные также могут быть вычислены. Например,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}s_i = \begin{cases} s_j \wedge s_i, & j \leqslant i \\ 0, & j > i \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_j}\dot{q}_i = \begin{cases} s_j \wedge (q_i^{\cdot} - q_j^{\cdot}), & j \leqslant i \\ 0, & j \geqslant i \end{cases}$$

так как присоединенное представление группы дает:

$$s_i(t) = \exp(\theta_1 s_1(0)) \ldots \exp(\theta_{i-1}(0)s_{i-1}(0))s_i(0)\exp(-\theta_{i-1}s_{i-1}(0)) \times \ldots$$
$$\ldots \times \exp(-\theta_1 s_1(0))$$

Для ковинтов можно использовать коприсоединенное представление группы, так что для производных ковинта моментов i-го звена получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}m_i^* = \begin{cases} \{m_i^*, \ s_j\}, & j \leqslant i \\ 0, & j > i \end{cases}$$

Так как винты шарниров не зависят от $\theta_i^{\cdot}$, их производные по времени, а следовательно, и производные по времени якобианов легко вычисляются. Принимая во внимание, что $q_j^{\cdot} = J_j\theta^{\cdot} = \theta_1^{\cdot} s_1 + \ldots$ $\ldots + \theta_2^{\cdot}s_2 + \ldots + \theta_j^{\cdot}s_j$, имеем

$$\frac{d}{dt}s_i = \sum_{j=1}^{6}\theta_j^{\cdot}\frac{\partial}{\partial\theta_j}s_i = q_i^{\cdot} \wedge s_i$$

Другой подход к вычислению производных якобианов приведен в [13]. Производные по времени якобианов теперь легко вычисляются. Например, столбец производных $J_6^{\cdot}$ имеет вид

$$J_6^{\cdot} = (q_1^{\cdot} \wedge s_1, \ q_2^{\cdot} \wedge s_2, \ \ldots, q_6^{\cdot} \wedge s_6)$$

Рассмотрим производные по времени тензоров инерции. В разд. 2 было изучено влияние движения твердого тела на тензор инерции. Тензор инерции i-го звена может быть записан в любой момент времени как

$$K_i(t) = (H_i^T)^{-1}(t)K(0)H_i^{-1}(t)$$

Здесь H_i — обычное произведение экспонент, так что при $t = 0$ производная по времени от K_i равна

$$K_i^{\cdot}(0) = (-\theta_1^{\cdot}s_1^T - \theta_2^{\cdot}\, s_2^T - \ldots - \theta_i^{\cdot}s_i^T)\,K_i(0) +$$
$$+ K_i(0)(-s_1\theta_1^{\cdot} - s_2\theta_2^{\cdot} - \ldots - s_i\theta_i)$$

В этом уравнении винты надо понимать как (6×6)-матрицы. Запишем (6×6)-винт скоростей i-го звена как

$$Q_i^{\cdot} = s_1\theta_1^{\cdot} + s_2\theta_2^{\cdot} + \ldots + s_i\theta_i^{\cdot}$$

Эти вычисления опять не зависят от исходной позиции, поэтому имеем

$$K_i^{\cdot} = -Q_i^{\cdot T}\, K_i - K_iQ_i^{\cdot}$$

Соотношение между $q^{\cdot}$ и $Q^{\cdot}$ задается в координатах следующим образом:

$$\text{если } q = \begin{Vmatrix} \omega \\ v \end{Vmatrix}, \text{ то } Q^{\cdot} = \begin{Vmatrix} \Omega & 0 \\ V & \Omega \end{Vmatrix}, \text{ где } V_{ij} = -\varepsilon_{ijk}v_k$$

5. Лагранжева механика для шестизвенного робота. Рассмотрим кинетическую энергию E_k цепочки твердых тел, соединенных шарнирами с одной степенью свободы. Ввиду замечаний, сделанных в разд. 3, общая кинетическая энергия манипулятора может быть записана как

$$E_k = (1/2)\sum_{i=1}^{6} m_i^*(q_i^{\cdot}) = (1/2)\sum_{i=1}^{6} q_i^{\cdot T}K_iq_i^{\cdot} = (1/2)\,\theta^{\cdot T}\{\sum_{i=1}^{6} J_i^TK_iJ_i\}\,\theta^{\cdot}$$

где m_i^* — момент ковинта i-го звена.

Сопряженный момент для координаты θ_i вычисляется с учетом того, что уже известно относительно строк якобианов. Результат достаточно простой, так как большая часть членов не зависит от θ_i:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot\theta_i}\left(\dot\theta^T\left\{\sum_{i=1}^{b} J_i^T K_i J_i\right\}\dot\theta\right) = \sum_{j=i}^{6} \dot q_j^T K_j s_i = \sum_{j=i}^{6} m_j^*(s_i)$$

Это соотношение означает, что сопряженный момент, соответствующий углу i-го шарнира, может быть найден в результате вычисления суммы моментов шарниров, начиная с i-го, на винте i-го шарнира.

Рассмотрим производные кинетической энергии по шарнирным углам. Принимая соотношения, найденные для производных винтов и ковинтов, имеем

$$\frac{\partial E_k}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\sum_{j=1}^{6} m_j^*(\dot q_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6} m_j^*(s_i \wedge \dot q_j) + m_j^*(s_i \wedge (\dot q_j - \dot q_i)) =$$

$$= \sum_{j=i}^{6} m_j^*\left(s_i \wedge \left(\dot q_j - \frac{1}{2}\dot q_i\right)\right)$$

Объединяя эти результаты, получаем выражение для обобщенных моментов, связанных с обобщенной координатой θ_i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot\theta_i}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \theta_i} = \sum_{j=i}^{6} \dot m_j^*(s_i) + m_j^*((\dot q_j + \dot q_i) \wedge s_i)$$

Для случая, когда гравитация не учитывается, последнее выражение непосредственно дает момент шарнира. Однако, как правило, нужно принимать во внимание вклад гравитации в потенциальную энергию. Потенциальная энергия может быть подсчитана, если известны высоты центров масс звеньев. Для удобства запишем $\rho_i = (m_i c_i, c_i)$, где m_i — масса i-го звена, а c_i — вектор координат центра масс. Если обозначить через $\rho_i(0)$ значение ρ_i в исходной конфигурации, то последующие значения будут

$$\rho_i = \exp(\theta_1 s_1(0)) \ldots \exp(\theta_i s_i(0))\rho_i(0)$$

Здесь винты понимаются как (4×4)-матрицы.

Предположим, что гравитация действует в направлении $-k$. Тогда потенциальная энергия робота может быть записана как

$$E_p = g e_k^T \sum_{i=1}^{6} \rho_i$$

где $e_k = (k, 0)^T$ — четырехмерный вектор, а g — ускорение силы тяжести. Частные производные дают значения моментов сил, связанных с шарнирами:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_i} = g e_k^T s_i \sum_{j=i}^{6} \rho_j$$

Винт опять понимается как (4×4)-матрица. Однако можно заметить, что типичный член в правой части может быть записан при помощи трехмерных векторов:

$$g e_k^T s_i \rho_j = k(m_j g \omega_j \wedge c_j + m_j g v_j)$$

Выражение упрощается, если воспользоваться двойственностью между винтами и «усилиями».

Можно записать типичный член как

$$-W_j^*(s_i) = m_j gk(\omega_j \wedge c_j + v_i)$$

$$W_j^* = \begin{Vmatrix} -m_j g c_j \wedge k \\ -m_j gk \end{Vmatrix}$$

где W_j^* — усилие, обусловленное силой тяжести, действующей на j-е звено, причем винты шарниров вновь представлены шестимерными векторами.

Объединяя все эти результаты и уравнения Лагранжа, получаем соотношения для обобщенных моментов шарниров

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{6} m_j^{*\cdot}(s_i) + m_j^*((q_j^{\cdot} + q_i^{\cdot}) \wedge s_i) + W_j^*(s_i)$$

Они также могут быть записаны только в терминах винтов скоростей и моментов инерции. Для этого надо найти производные по времени от моментов ковинтов. Так как $m_j^* = K_j q_j^{\cdot}$, имеем

$$m_j^{*\cdot} = K_j^{\cdot} q_j^{\cdot} + K_j q_j^{\cdot\cdot}$$

Используя соотношения для производных по времени от тензоров инерции, полученные в разд. 4, имеем

$$m_j^{*\cdot} = K_j q_j^{\cdot\cdot} - Q_j^{\cdot T} K_j q_j^{\cdot}$$

Здесь были использованы равенства $Q^{\cdot} q^{\cdot} = q^{\cdot} \wedge q^{\cdot} = 0$.

Значение момента ковинта на винте шарнира равно

$$m_j^{*\cdot}(s_i) = q_j^{\cdot\cdot T} K_j s_i - q_j^{\cdot T} K_j (q_j^{\cdot} \wedge s_i)$$

Таким образом, в терминах скоростей звеньев уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид

$$\tau_i = \sum_{j=i}^{6} q_j^{\cdot\cdot T} K_j s_i + q_j^{\cdot T} K_j (q_i^{\cdot} \wedge s_i) + W_j^*(s_i)$$

Эти уравнения выглядят особенно просто и элегантно. Однако они могут быть записаны в терминах координат шарниров, для чего заметим, что $q_i^{\cdot\cdot} = J_i \theta^{\cdot\cdot} + J_i \theta^{\cdot}$. После вычислений уравнения движения принимают вид

$$\tau_i = \sum_{j=i}^{6} \Big\{ \sum_{k=1}^{j} s_i^T K_j s_k \theta_k^{\cdot\cdot} + \sum_{k=2}^{j} \sum_{e=1}^{k-1} s_i^T K_j (s_e \wedge s_k) \theta_k^{\cdot} \theta_e^{\cdot} + \sum_{k=1}^{j} \sum_{e=1}^{i-1} s_k^T K_j (s_e \wedge s_i) \theta_k^{\cdot} \theta_e^{\cdot} + W_j^*(s_i) \Big\}$$

6. Заключительные замечания. Основная цель статьи — показать, что для величин, используемых в динамике роботов, можно получить простые выражения. Если робот представляет собой стандартную цепочку твердых тел, соединенных шарнирами с одной степенью свободы, то эти выражения можно непосредственно вычислить.

Когда работа начиналась, была надежда на то, что использование теории винтов будет с вычислительной точки зрения предпочтительнее общепринятого подхода. К сожалению, эти надежды не оправдались, хотя сравнения довольно затруднительны, так как нет полной ясности в вопросе, что́ следует включать в подсчет операций. Можно несколько улучшить используемые алгоритмы, вводя «винт гравитации» $g = (0, gk)^T$, так что $W_j^* = K_j g$. Теперь член в уравнениях движения, содержащий потенциальную энергию, может быть включен в член, содержащий ускорения:

$$\tau_i = \sum_{j=i}^{6} (q_j^{\cdot\cdot} - j)^T K_j s_i + q_j^{\cdot T} K_j (q_i^{\cdot} \wedge s_i)$$

Полученные результаты важны с теоретической точки зрения, так как все написанное выше имеет геометрическую интерпретацию. Никакие предположения о шарнирах, кроме того, что каждый имеет одну степень свободы, не делались. Автор также старался использовать как можно меньше систем координат, как правило одну. Имеется надежда, что это позволит исследовать вопросы, связанные с проектированием роботов. Например, как спроектировать робот, чтобы избежать или минимизировать динамическое взаимодействие между звеньями? Допустим, необходимо гарантировать, что моменты в i-м шарнире τ_i не зависят от ускорений других шарниров. Нетрудно убедиться, что это означает, что $\partial^2 E_k/\partial\theta_i^{\cdot}\partial\theta_j^{\cdot} = 0$, $i \neq j$. При учете полученных ранее результатов имеем

$$\frac{\partial^2 E_k}{\partial\dot\theta_i \partial\dot\theta_j} = \sum_{k=i}^{j} s_j^T K_k s_i = 0, \quad i \neq j$$

Это дает ограничения на возможные положения шарниров и масс.

Теперь ясно, что следует делать, чтобы перейти к систематическому изучению задачи.

Автор также надеется, что полученные результаты могут быть распространены на случай упругих шарниров и тем самым привести к упрощению трактовки важных для практики моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг Ф. М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
2. *Pennock G. R., Yang A. T.* Dynamic analysis of a multi-rigid body open-chain system // Trans. ASME. J. Mech. Transmiss. and Automat. in Des. 1983. V. 105, No 1. P. 28—34.
3. *Abraham R., Marsden J. E.* Foundations of Mechanics. London: Benjamin / Cummings, 1978. 806 p.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М., Наука, 1979. 431 С.
5. *Brockett R. W.* Robotic manipulators and product of exponentials formula // Mathematical Theory of Networks and Systems (Beer Sheva 1983): Lecture Notes in Computer Science. New York: Springer Verlag, 1984. V. 58. P. 120—129.
6. *Herve J. M.* // Analyse structurelle des mechanismes par groupe des deplacements // Mech. and Mach. Theory. 1978. V. 13. No 4. P. 437—450.
7. *Selig J. M.* A note on the principle of transference // ASME paper 86-DET-174, 1986.
8. *Selig J. M., Rooney J.* Reuleaux pairs and surfaces that cannot be gripped // Intern. J. Robotics Reseach. 1989. V. 8. No 5. P. 79—87.
9. *Ball R. S.* A treatise on the theory of screws. Cambridge: Cambr. Univ. Press. 1900. 544 p.
10. *Woodhouse N. M. J.* Introduction to analysis of a dynamics. Oxford: Clarendon Press, 1987. 180 p.
11. *Hunt K. H.* Robot kinematics: A compact analytic inverse solution for velocities // ASME paper 86-DET-127, 1986.
12. *Lipkin H., Duffy J.* Invariant kinestatic filtering // Proc. 7th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms, Seville, 1987. V. 1. Oxford: Pergamon Press, 1987.
13. *Gu Y.-L., Luh J. Y. S.* Dual-number transformation and its applications to robotics // IEEE J. Robotics and Automation, 1987. V. RA—3, No. 6. P. 615—623.

Лондон

Поступила в редакцию
15.03.1990