

УДК 531.36 : 62—50

© 1991 г.

В. В. Белецкий, М. Д. Голубицкая

СТАБИЛИЗАЦИЯ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

Исследуется свойство резонансности антропоморфной ходьбы. (Резонансной (периодической) названа ходьба, в которой все звенья шагающего устройства колеблются с соизмеримыми частотами¹.) Строится закон управления, обеспечивающий неасимптотическую устойчивость номинального периодического режима. Производится сравнение энерготрат на периодическом и окрестных непериодических режимах. Устанавливается локальная минимальность функционала энерготрат на устойчивых резонансных режимах.

1. Постановка задачи. Ходьба как резонансное явление. Очевиден факт резонансности регулярной ходьбы: все элементы шагающего устройства колеблются «в такт» ходьбы, так что их частоты соизмеримы с частотой шага. Многочисленные исследования [1—4] процесса двуногой ходьбы посвящены описанию именно регулярной, периодической ходьбы. Тем не менее специфических эффектов эти исследования не могли обнаружить. Действительно, отличие резонансных движений от нерезонансных можно выявить только их сравнением. Из этого следует, что надо изучать периодическую ходьбу вместе со своей непериодической окрестностью.

Специфическим резонансным эффектом является, например, свойство устойчивых периодических движений доставлять экстремумы достаточно широкому классу функционалов [5—8]. В частности, можно предположить, что функционал энерготрат ходьбы достигает минимума на хорошо организованных устойчивых периодических режимах. Для проверки этого предположения построим простую модель периодической ходьбы, обладающую в определенном смысле свойством устойчивости, и сравним значения энергетического функционала на периодическом и близких непериодических режимах.

2. Описание модели. Основные уравнения. Рассмотрим двуногий шагающий аппарат, состоящий из корпуса и двух невесомых двузвенных ног, шарнирно прикрепленных к точке O корпуса аппарата (фиг. 1). Предположим, что движение аппарата одноопорно и безударно, контакт ноги с опорной поверхностью точечный, связь односторонняя.

Пусть аппарат движется в плоскости NXZ (фиг. 1). Обозначим: ρ — расстояние от точки O до центра масс C корпуса, M — масса, J — момент инерции корпуса относительно точки O , X , Z — координаты точки O , X_v , Z_v — координаты точки опоры, θ — угол между вектором OC и положительным направлением оси NZ (фиг. 1).

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \sqrt{\frac{M\rho g}{J}} t, \quad j = \frac{J}{M\rho^2}, \quad x = \frac{X}{\rho}, \quad z = \frac{Z}{\rho}, \quad x_v = \frac{X_v}{\rho}, \quad z_v = \frac{Z_v}{\rho} \quad (2.1)$$

¹ Белецкий В. В., Голубицкая М. Д. Стабилизация и резонансные явления в модельной задаче двуногой ходьбы: Препринт. № 14. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР. 1987. 23 с.

Производную угла θ по безразмерному времени τ обозначим θ' .

Уравнение плоских колебаний корпуса [4] в переменных (2.1) имеет вид

$$(j + (z - z_v) \cos \theta + (x - x_v) \sin \theta) \theta'' + ((x - x_v) \cos \theta + (z - z_v) \sin \theta) \theta'^2 - (j + z'') \sin \theta + x'' \cos \theta = (j + z'')(x - x_v) - x''(z - z_v) \quad (2.2)$$

Безразмерные координаты x_v , z_v точек постановки конечностей являются кусочно-постоянными функциями времени, так что входящие в уравнение (2.2) функции $x - x_v$, $z - z_v$ разрывны (кусочно-непрерывны).

Будем считать, что возможности системы управления позволяют обеспечить любой наперед заданный, достаточно гладкий, закон $x(\tau)$, $z(\tau)$ движения точки подвеса ног. Согласно полуобратному методу заданной синергии [1], траекторию, скорость или ускорение этой точки можно рассматривать как управление.

Рассмотрим регулярную ходьбу по горизонтальной прямой с длительностью шага τ_0 и длиной l :

$$x_v = (v - 1)l, \quad z_v = 0, \quad \tau \in [(v - 1)\tau_0, v\tau_0] \quad v = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Время τ_0 есть основной период процесса. Пусть задано τ_0 -периодическое движение точки подвеса ног, а закон движения корпуса определяется интегрированием уравнения (2.2). Будем называть ходьбу периодической, или резонансной, если за целое число шагов корпус совершает целое число периодических колебаний: $\theta(\tau + \tau_k) = \theta(\tau)$, где $\tau_k = \text{const}$ — период колебаний корпуса, $n\tau_0 = m\tau_k$, $m, n \in N^+$.

Величина средних энергозатрат на единицу пути за N шагов ходьбы оценивается функционалом [4]

$$w_N = \frac{1}{Nl} \int_0^{N\tau_0} (|q(\theta' - \alpha')| + |u(\alpha' - \beta')|) d\tau \quad (2.4)$$

Здесь q , u — управляющие моменты в тазобедренном и коленном суставах опорной ноги, α , β — углы бедра и голени с вертикалью.

В рассматриваемой модели управляющие моменты q , u , а также углы α , β вычисляются по конечным формулам через функции $x(\tau)$, $z(\tau)$, $\theta(\tau)$ и их производные по времени [4].

3. Номинальный режим. Исследуем как основной периодический режим, в котором одно колебание корпуса совершается за один шаг ходьбы: $n = m = 1$.

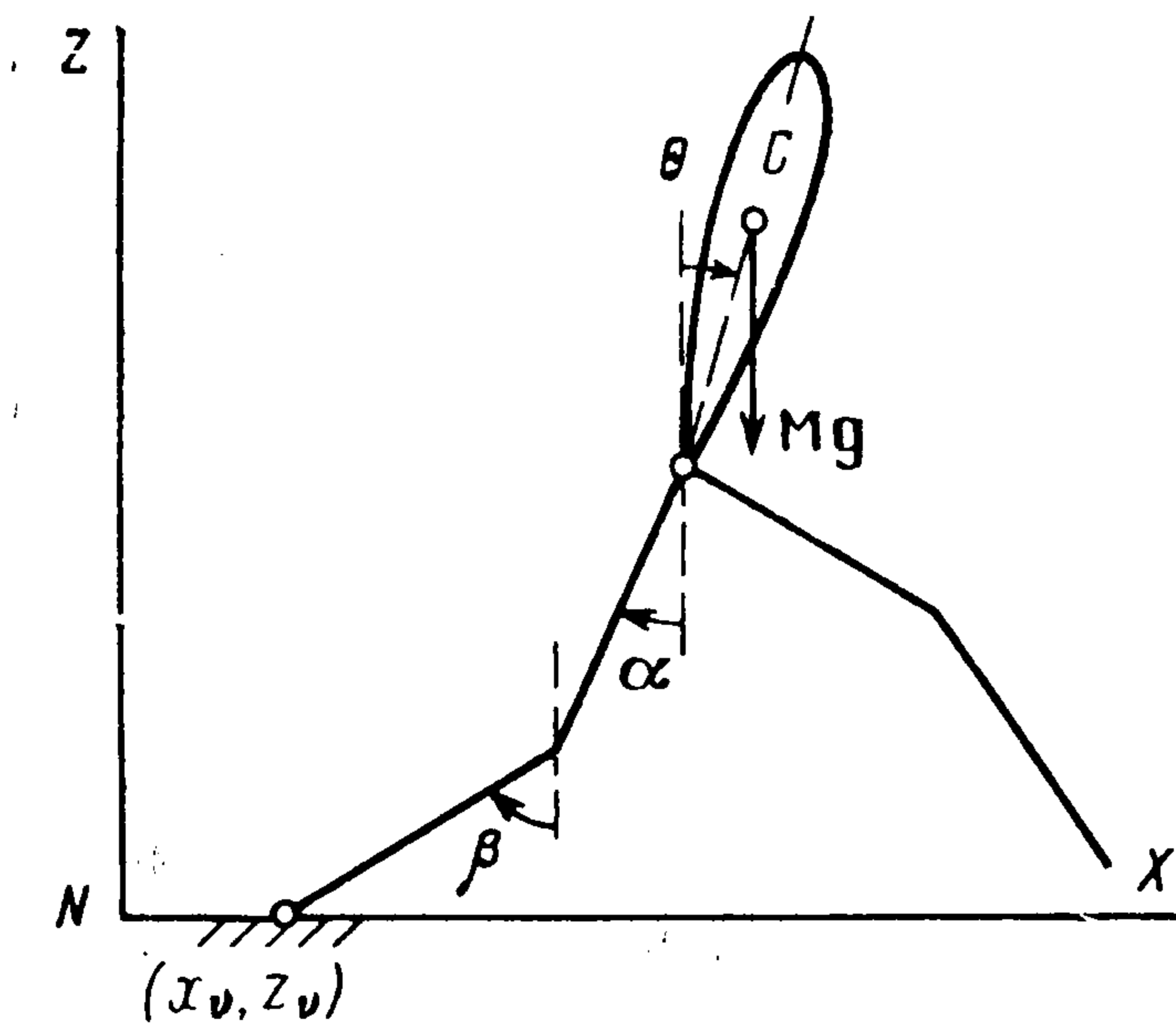
Например, рассмотрим комфортабельную ходьбу [4, 9, 10], в которой $\tau_k = \tau_0$, а точка подвеса ног движется на постоянной высоте h от опорной горизонтали с постоянной скоростью $v = l/\tau_0$. Если считать, что походка симметрична ($x(0) = -l/2$), то движение точки O осуществляется по закону

$$x = x_* = v\tau - l/2 \quad z = z_* = h \quad (3.1)$$

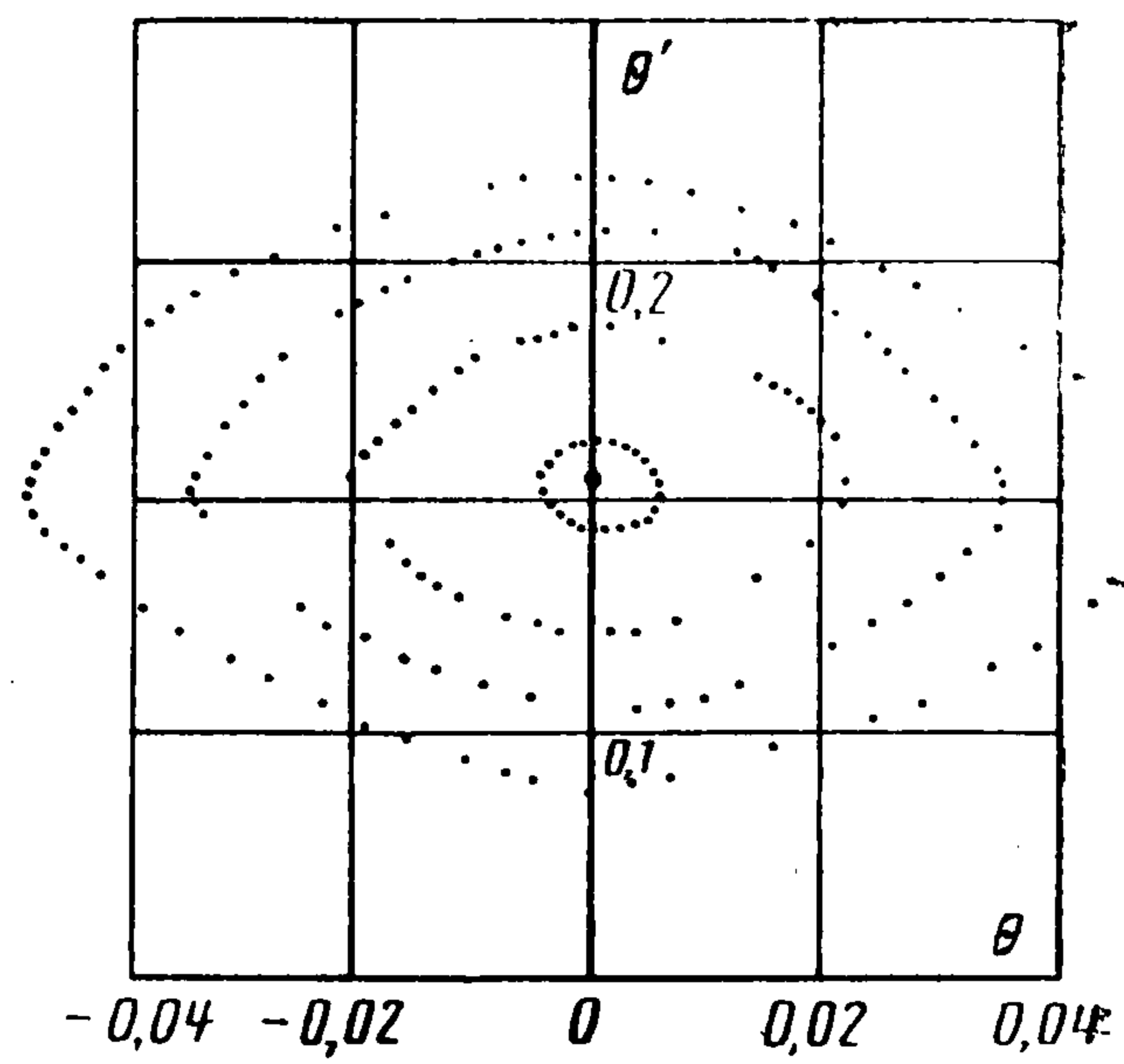
а уравнение (2.2) принимает вид

$$((j + h \cos \theta) + (x_* - x_v) \sin \theta) \theta'' + ((x_* - x_v) \cos \theta - h \sin \theta) \theta'^2 - j \sin \theta = j(x_* - x_v)$$

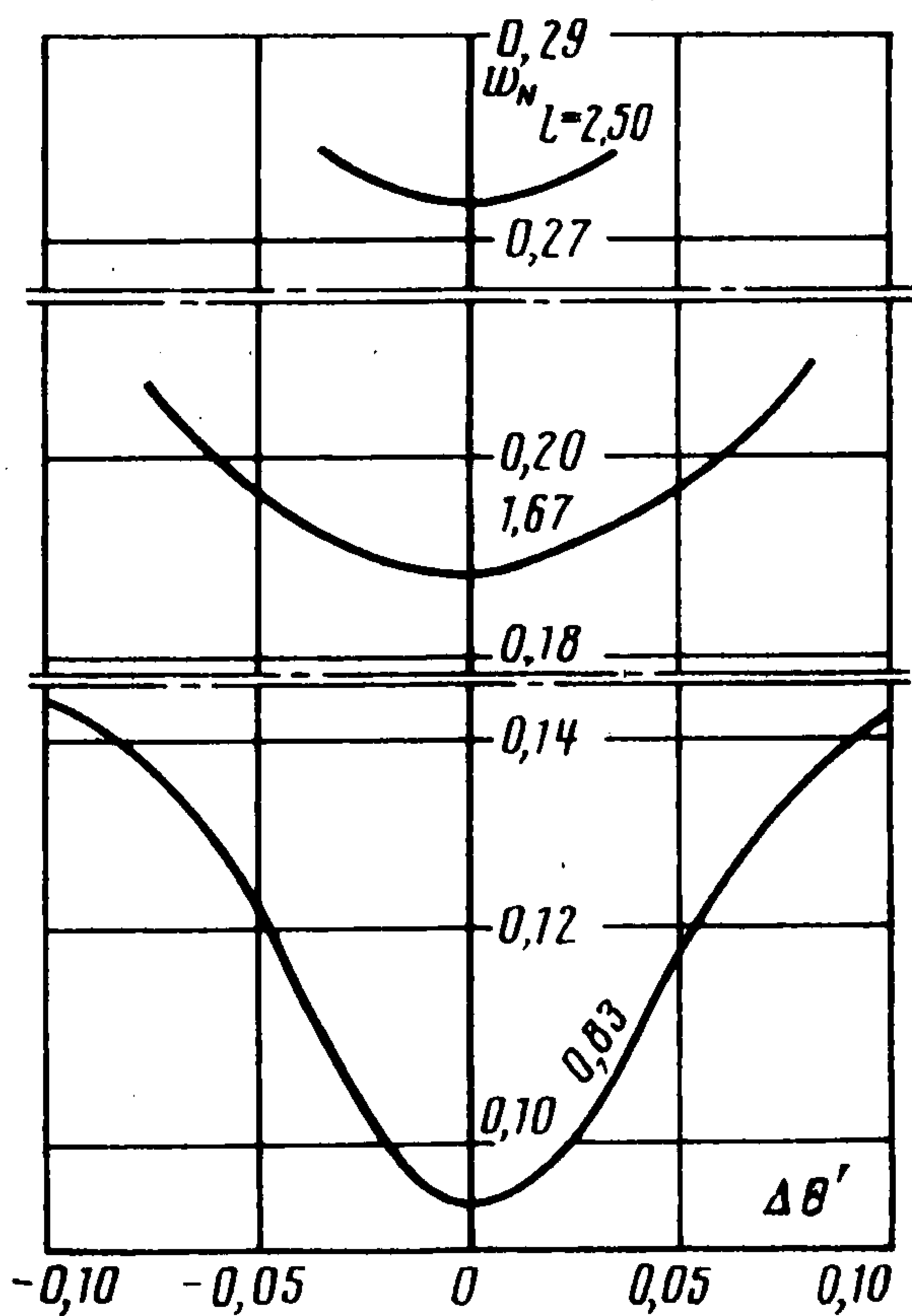
В условиях (2.3), (3.1) это уравнение имеет [4, 9, 10] непрерывное τ_0 -периодическое решение $\theta_*(\tau)$. Комфортабельный режим $x_*(\tau)$, $z_*(\tau)$, $\theta_*(\tau)$ исследуем в качестве номинального.



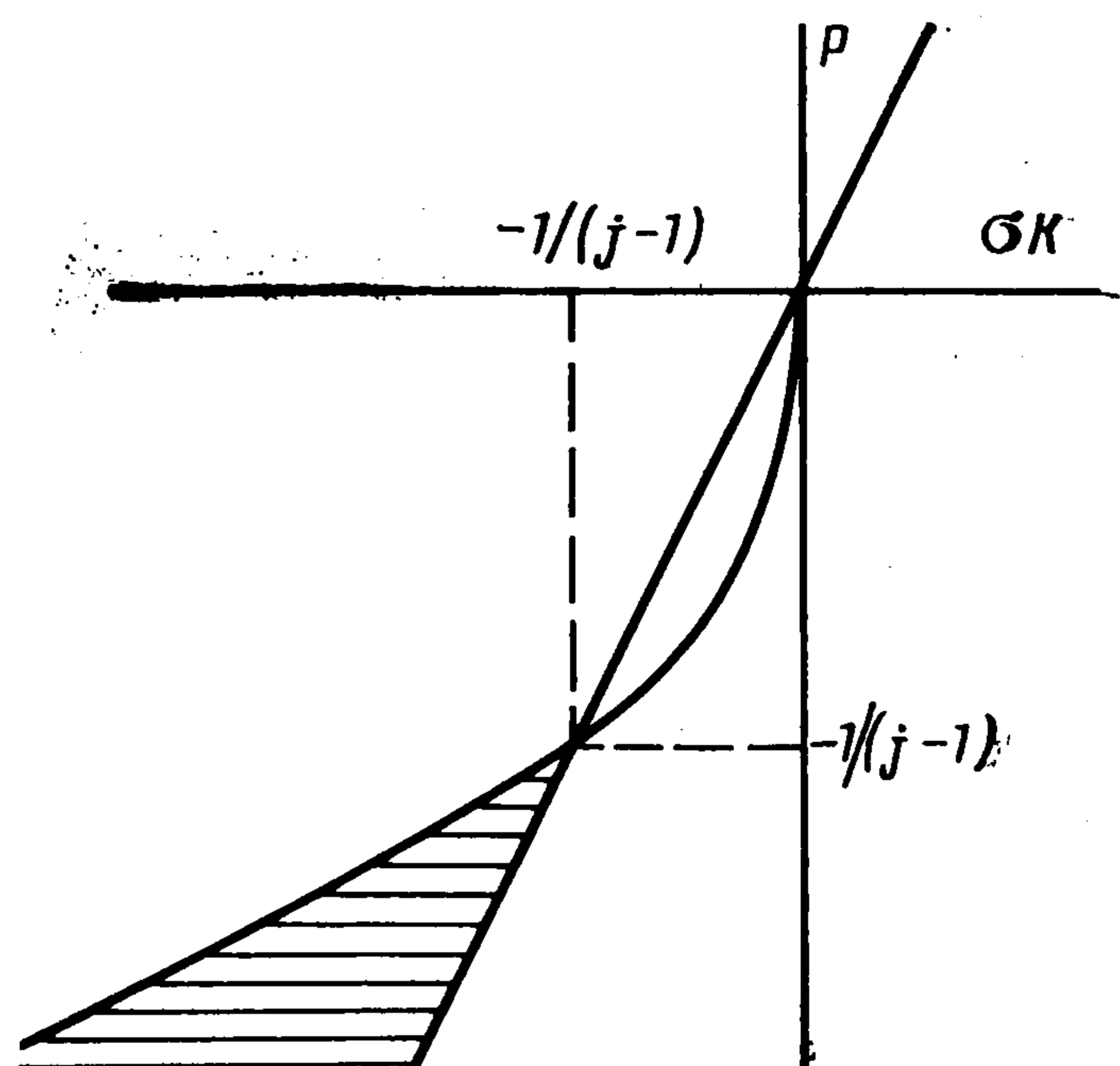
Фиг. 1



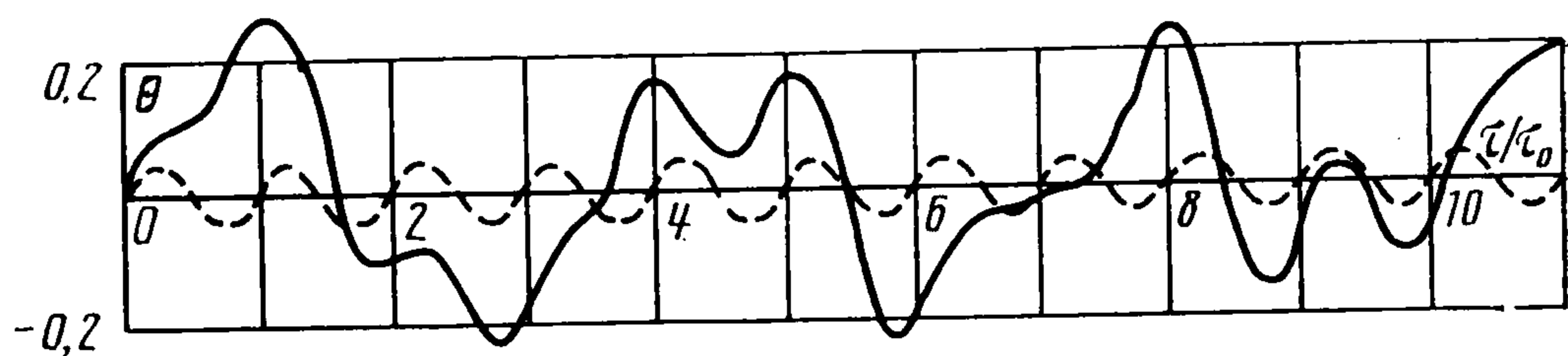
Фиг. 2



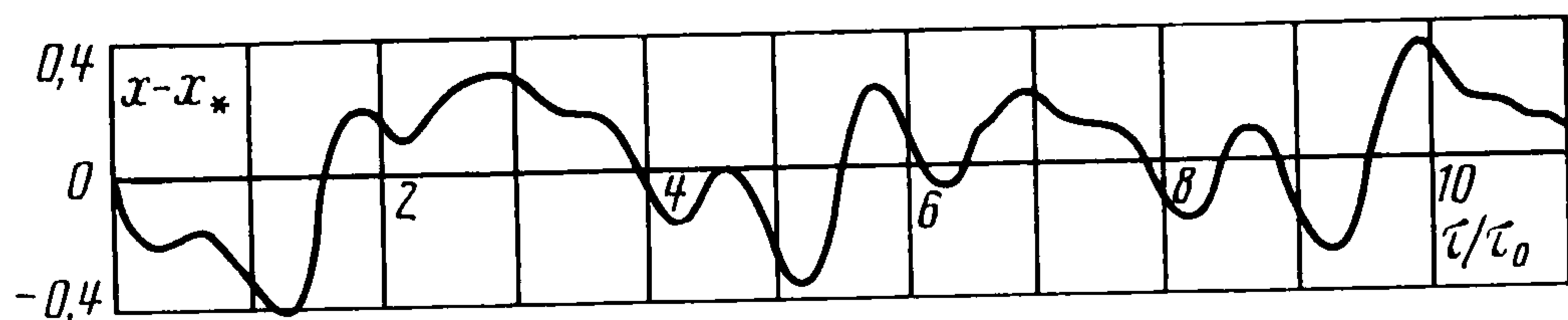
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

4. **Задача стабилизации.** Известно, что движение $\theta_*(\tau)$ корпуса в комфортабельной ходьбе неустойчиво [4], управляющие моменты в суставах не могут обеспечить существование близких к номиналу неперiodических походок. Чтобы сформировать семейство таких походок, необходимо построить алгоритм стабилизации комфортабельной ходьбы.

Различные процессы свободной стабилизации могут осуществляться, например, путем управления длиной и длительностью шага [4]. В данной работе решается другая задача — создание устойчивых τ_0 -периодических колебаний корпуса на периодическом режиме ходьбы с фиксированной длиной l и фиксированной длительностью τ_0 шага. Сформулируем эту задачу.

Пусть колебания корпуса описываются уравнением (2.2) и задана следовая дорожка (2.3). Требуется найти такой закон управления шагающим аппаратом, при котором: 1) возможно комфортабельное движение (3.1) точки подвеса ног, 2) уравнение (2.2) в частном случае (3.1) имеет τ_0 -периодическое решение $\theta = \theta_*(\tau)$, 3) частное решение $\theta_*(\tau)$ обладает в некотором смысле свойством устойчивости.

5. Стабилизация корпуса (предельная задача). Рассмотрим уравнение (2.2) движения корпуса, полагая, что ускорение точки подвеса ног является управлением. Положим

$$x'' = \sigma \operatorname{arctg} k (\theta - \theta_*), \quad z = h \quad (5.1)$$

В отсутствие управляющего момента в тазобедренном суставе корпус аппарата можно рассматривать как физический маятник на подвижном основании. Если точка подвеса находится на неизменной высоте ($z = h$), то неустойчивое равновесие ($\theta = 0$) маятника можно стабилизировать, управляя координатой x по закону $x'' = \sigma \operatorname{sign} \theta$, $\sigma = \operatorname{const}$, $\sigma > 0$. Этот простой, кусочно-постоянный закон управления позволяет исследовать задачу о стабилизации маятника аналитически (см. работу, цитированную в сноске на с. 193). Попытка использовать аналогичное управление в задаче о стабилизации корпуса при ходьбе (п. 4) привела к необходимости заменить разрывную функцию $\operatorname{sign} (\theta - \theta_*)$ подходящей для численного исследования непрерывной функцией, конкретно функцией $\operatorname{arctg} k (\theta - \theta_*)$, $k = \operatorname{const}$.

Система уравнений (2.2), (5.1) имеет частное решение $x = x_*$, $\theta = \theta_*$. В общем случае горизонтальное движение точки некомфортабельно, закон $x(\tau)$ определяется путем совместного интегрирования уравнений (2.2), (5.1).

В качестве первого приближения к решению системы (2.2), (5.1) рассмотрим следующую предельную задачу: предположим, что движение точки O комфортабельно, $x(\tau)$ в уравнении (2.2) определено формулой (3.1), но на корпус оказывается управляющее воздействие $x''(\tau)$, причем $x''(\tau)$ в (2.2) определено формулой (5.1). (Уравнения предельной задачи представляют собой асимптотику системы (2.2), (5.1) при малых размерах корпуса, см. работу, цитированную в сноске на с. 193.) Уравнение (2.2) в предельной задаче отщепляется от (5.1) и становится уравнением с τ_0 -периодическими кусочно-непрерывными коэффициентами, обладающими τ_0 -периодическим решением $\theta = \theta_*(\tau)$. Исследуем это решение на устойчивость.

Рассмотрим сначала случай, когда следовая дорожка (2.3) определяет не ходьбу, а стояние: $l = 0$, $x_v = 0$. Тогда комфортабельный режим реализуется в виде $x_*(\tau) = 0$, $z_*(\tau) = h$, $\theta_*(\tau) = 0$. Линеаризовав уравнение (2.2) в условиях предельной задачи в окрестности $\theta_* = 0$: $\theta'' = j(1 - \sigma k(h + 1))\theta / (j + h)$, получим необходимые условия стабилизации корпуса в задаче стояния

$$\sigma k > 1 / (1 + h) \quad (5.2)$$

Стабилизирующее действие управления (5.1), (5.2) в предельной задаче с ненулевой длиной шага было проверено численно. Расчеты проведены для аппарата с антропоморфными характеристиками: $M = 70$ кг, $J = 9,63$ кг·м², $\rho = 0,24$ м, длина каждого звена двузвенной ноги 0,425 м; размерные параметры номинального режима: $H =$

$= \rho h = 0,8$ м; $t_0 = \tau_0 [J/(M\rho h)]^{1/2} = 0,625$ с. Результаты численного интегрирования предельной задачи ходьбы с безразмерной длиной шага $l = 1,67$ и параметрами управления $\sigma = 0,1$, $k = 100$ приведены на фиг. 2, где дается картина точечных отображений на фазовой плоскости (θ, θ') за период τ_0 . неподвижной точке отображения отвечает периодическое движение $\theta_*(\tau)$. Все точечные отображения принадлежат замкнутым эллипсообразным кривым, что демонстрирует устойчивость номинального режима. Разные кривые отвечают разным отклонениям $\Delta\theta'(0)$ от начальных данных $\theta_*'(0)$ периодического режима в предположении, что $\Delta\theta(0) = 0$.

Анализ массового счета предельной задачи на ЭВМ показал, что управление (5.1), (5.2) может стабилизировать номинальный режим, если безразмерная длина шага l при ходьбе не превышает некоторое критическое значение $l_0(\sigma, k)$. Для любых l , $0 \leq l < l_0(\sigma, k)$ на фазовой плоскости (θ, θ') существует окрестность точки $(\theta_*(0), \theta_*'(0))$, порождающая семейство близких к номиналу непериодических походок (выход на границу этой окрестности приводит к нарушению сервосвязей [11] и падению аппарата). На номинальных периодических и окрестных непериодических режимах было произведено вычисление удельных энергозатрат (2.4); число N шагов, в течение которых осреднялся функционал, выбиралось столь большим, чтобы величина функционала с заданной степенью точности не зависела от N .

На фиг. 3 приведена зависимость энергетического функционала w_N окрестных непериодических режимов от начального рассогласования $\Delta\theta' = \theta'(0) - \theta_*'(0)$ по угловой скорости корпуса. Видно, что фиг. 2, 3 в совокупности отражают ожидаемый результат: энергозатраты ходьбы достигают минимума на устойчивом резонансном режиме.

6. Стабилизация ходьбы. Рассмотрим полную задачу (2.2), (5.1). Исследование показывает, что управление (5.1), (5.2), стабилизирующее движение корпуса в предельной задаче, не обеспечивает устойчивости движения в полной задаче ходьбы. В управление (5.1) не входит обратная связь по отклонению от номинального $x_*(\tau)$ поступательного движения, т. е. поступательное движение не стабилизировано. Это приводит к неустойчивости как поступательного движения, так и колебаний корпуса. Назовем одновременную стабилизацию и поступательного движения, и колебаний корпуса стабилизацией ходьбы.

Для осуществления стабилизации ходьбы введем в управление обратную связь по отклонению $x - x_*$ от номинального поступательного режима. Зададим вместо (5.1) новый закон движения

$$x'' = \sigma \operatorname{arctg} k (\theta - \theta_*) + p (x - x_*), \quad p = \text{const}, \quad z = h \quad (6.1)$$

Исследуем систему (2.2), (6.1) на устойчивость. Пусть $l = 0$, $x_v = 0$, тогда $x_*(\tau) \equiv 0$, $\theta_*(\tau) \equiv 0$. Линеаризуем систему (2.2), (6.1) в окрестности x_* , θ_* :

$$\begin{aligned} \theta'' &= j(j+h)^{-1} ((1 - \sigma k(h+1))\theta + (1 - (1+h)px)) \\ x'' &= j(\sigma k\theta + px) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Условия устойчивости линейной системы (6.2) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \sigma k < p < (1 + \sigma k(h+1) - 2\sqrt{\sigma k(1-j)})/(j+h) \\ \sigma k < 1/(1-j) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Параметры σ , k , p , удовлетворяющие неравенствам (6.3) гарантируют неасимптотическую устойчивость линейной системы в задаче стояния.

На фиг. 4 область (6.3) в плоскости параметров $(\sigma k, p)$ заштрихована. Заметим, что из (6.3) и фиг. 4 следует неустойчивость при $p = 0$, т. е. при отсутствии в управлении обратной связи по поступательному движению.

При исследовании полной задачи ходьбы, описываемой уравнениями (2.2), (6.1), были выбраны параметры управления, удовлетворяющие не-

обходимым условиям (6.6) устойчивости в задаче стояния. Численное интегрирование системы (2.2), (6.1) в условиях (6.3) показало, что на некотором множестве значений l , $0 \leq l \leq l_0(\sigma, k, p)$, управление (6.1) в определенном смысле стабилизирует ходьбу. На большом интервале времени $[0, N\tau_0]$, где $N > 50$ (при расчетах N выбиралось из условия выхода функционала w_N на стационарное значение), возмущенное движение $\theta(\tau)$, $x(\tau)$ находилось в некоторой ограниченной окрестности комфортабельного режима $\theta_*(\tau)$, $x_*(\tau)$, малой вместе с возмущением.

На фиг. 5, 6 приведены примеры поведения функций $\theta(\tau)$, $x(\tau) - x_*(\tau)$ в возмущенном движении. Представленный здесь неперiodический режим ходьбы отвечает параметрам управления $\sigma = 10$, $k = 1$, $p = -9,4$, длине шага $l = 2,50$ и возмущению $\Delta\theta' = 0,07$. Для сравнения приведена зависимость $\theta_*(\tau)$. Видно, что возмущенное движение отслеживает номинальный режим, не имея в рассматриваемом промежутке времени систематических уходов с номинала.

Таким образом, управление (6.1) в условиях (6.3) позволяет сформировать семейство неперiodических походок, близких к номинальной перiodической походке в течение достаточно большого промежутка времени.

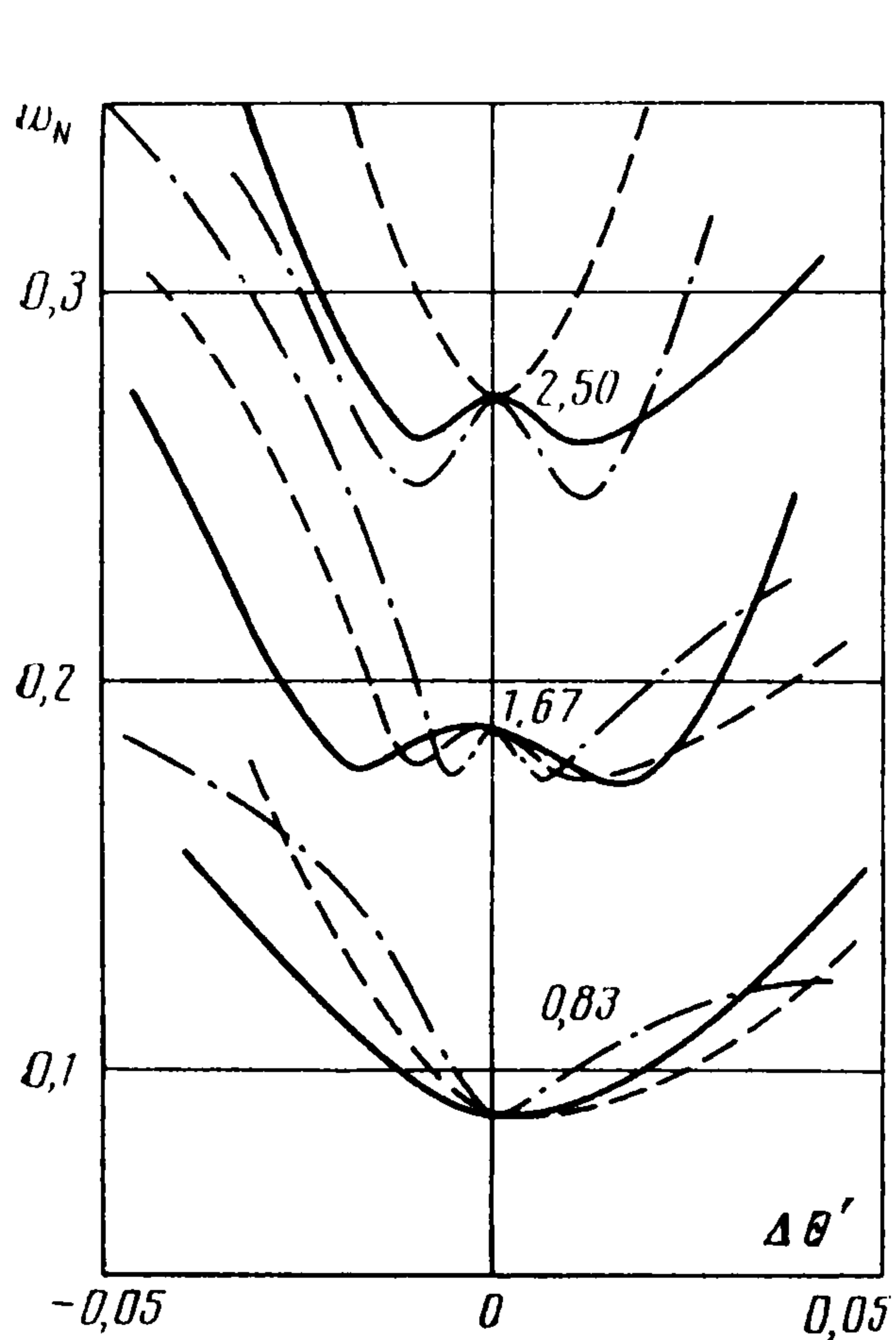
7. Экстремальные свойства резонансных режимов ходьбы. На фиг. 7 представлены результаты численного исследования энергетике номинальных перiodических режимов и их неперiodических окрестностей. Приведены зависимости функционала w_N от начальных возмущений угловой скорости $\Delta\theta'$ при невозмущенном значении других фазовых координат: сплошные кривые отвечают параметрам управления $\sigma = 10$, $k = -1$, $p = 9,4$, штриховые — $\sigma = 5$, $k = -1$, $p = 4,9$; штрихпунктирные — $\sigma = 15$, $k = -1$, $p = 13,9$. На кривых указаны безразмерные значения l (значениям $l = 0,83 \dots 2,50$ соответствуют размерные $L = 0,2 \dots 0,6$ м). Во всех случаях энергозатраты w_N как функция $\Delta\theta'$ достигают локального экстремума на номинальном перiodическом режиме, т. е. при $\Delta\theta' = 0$. При малой длине шага функционал w_N минимален в точке $\Delta\theta' = 0$. В этом случае τ_0 — перiodическая (резонансная) ходьба энергетически выгоднее близких нерезонансных способов движения.

С увеличением длины шага может происходить бифуркация минимума. Значение w_N при $\Delta\theta' = 0$ становится локально максимальным, зато в окрестности номинала появляются два локальных минимума w_N при некоторых $\Delta\theta' \neq 0$.

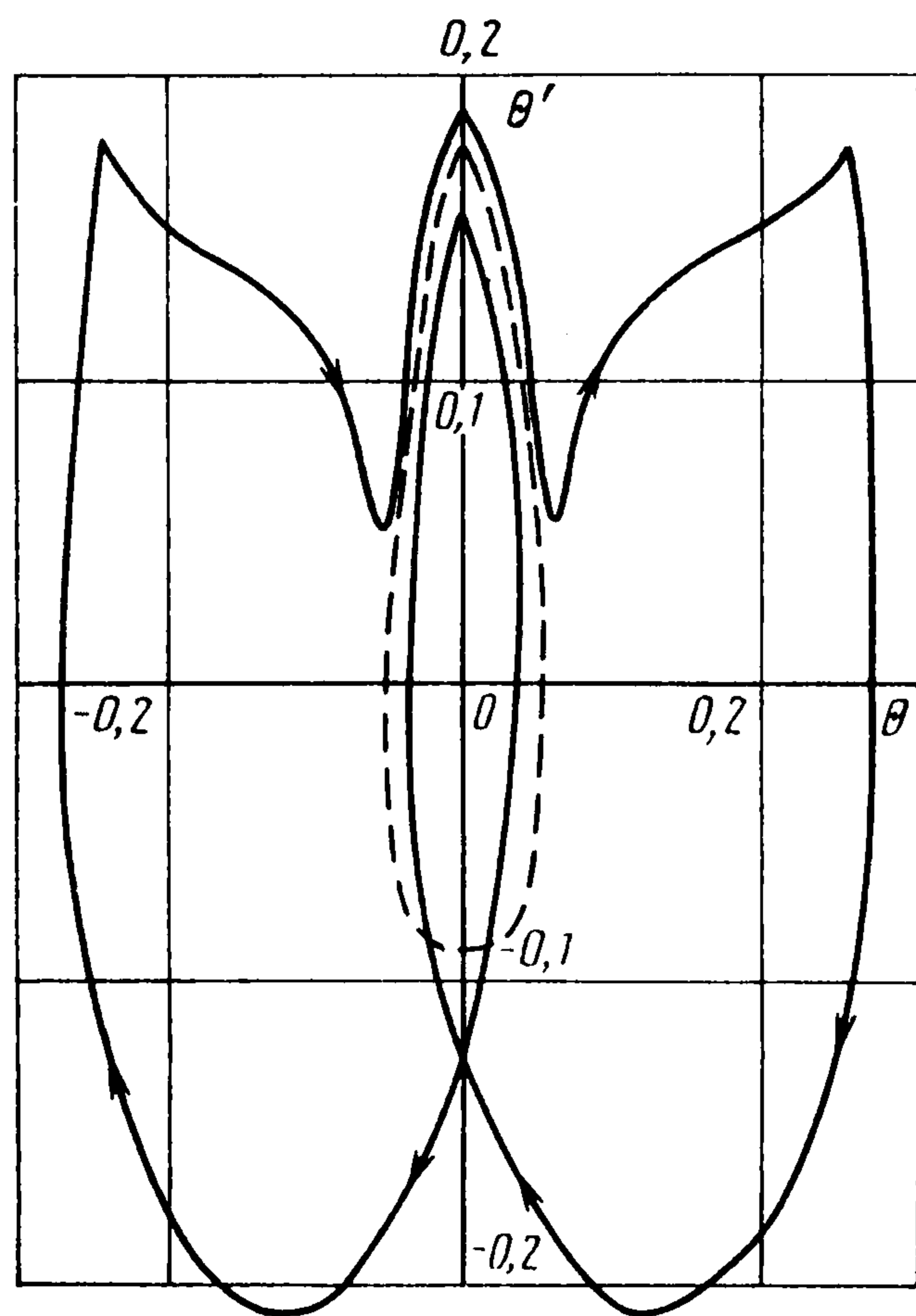
Появление локального минимума w_N — следствие известного факта энергетической невыгодности комфортабельных походок по сравнению с некомфортабельными [4, 12, 13]. Интересно, что новые локальные минимума функционала w_N достигаются на новых перiodических и устойчивых режимах ходьбы.

На фиг. 8 изображен фазовый портрет колебаний корпуса на одном из таких режимов (как оказалось, $4\tau_0$ -перiodическом; параметры режима: $\sigma = 10$, $k = -1$, $p = 9,4$, $l = 2,09$). Корпус совершает одно колебание за четыре шага ходьбы (точки заострения на фиг. 8 отвечают моментам смены опорной ноги). Для сравнения приведен фазовый портрет номинального комфортабельного τ_0 -перiodического режима (штриховая линия). Два локальных минимума w_N на графике отвечают одному и тому же режиму, но сдвинутому по фазе.

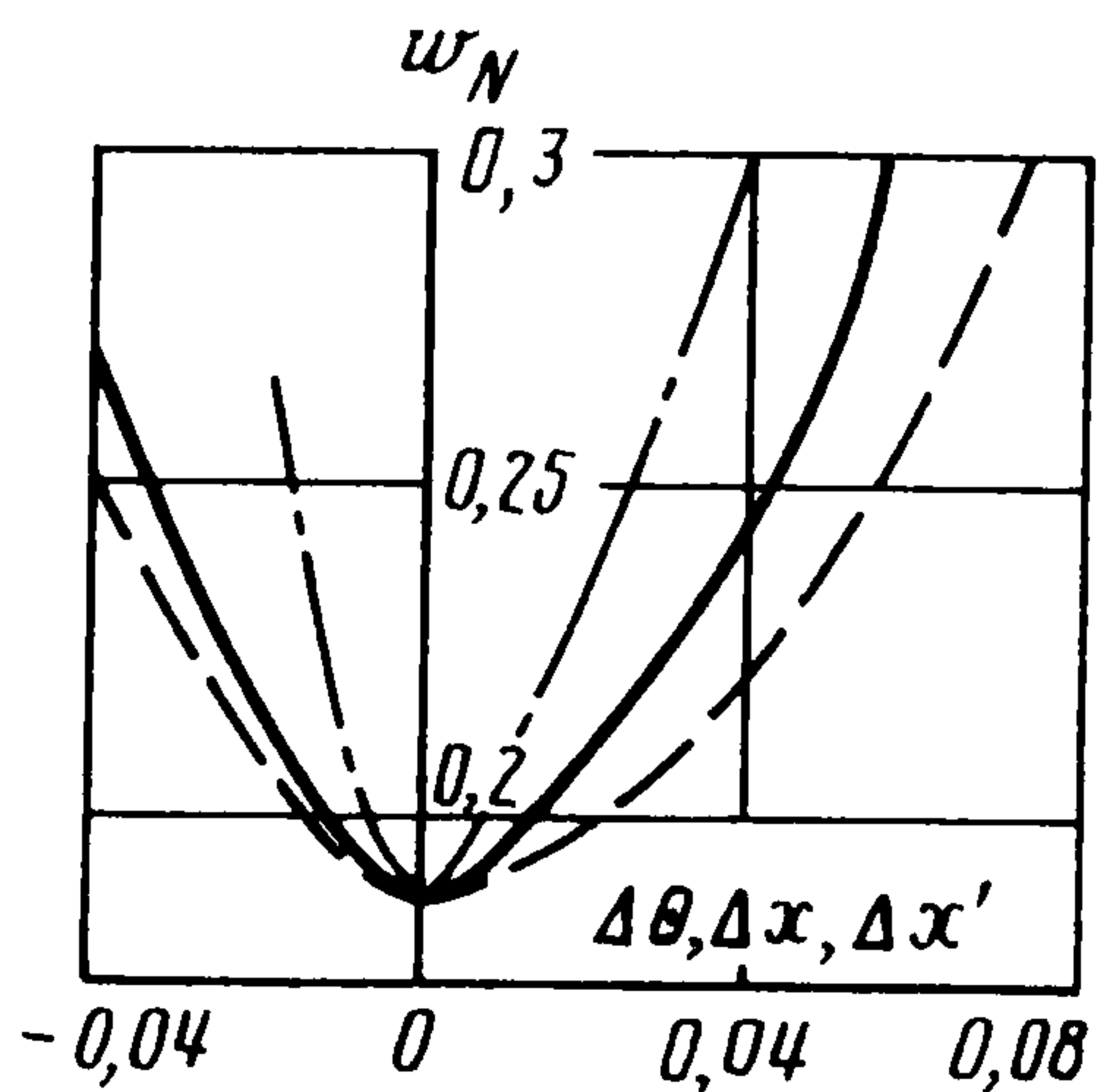
Таким образом, на основании экстремального свойства функционала энергозатрат получены новые перiodические походки без априорного условия перiodичности.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Отметим, что локальный минимум ω_N достигается одновременно по всем фазовым переменным. На фиг. 9, например, приведены зависимости ω_N от отклонений $\Delta\theta$, Δx , $\Delta x'$ (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые соответственно) при $\Delta\theta' = \Delta\theta_{01}'$, где $\Delta\theta_{01}'$ отвечает упомянутому $4\tau_0$ -периодическому движению.

Проведенное исследование свидетельствует в пользу утверждения о локальной минимальности энергозатрат на устойчивых периодических (резонансных) режимах ходьбы. Этот факт может служить по крайней мере одной из причин наблюдаемой резонансности двуногой ходьбы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. М.: Мир, 1976. 541 с.
2. Ларин В. Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Наук. думка, 1980. 168 с.
3. Формальский А. М. Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
4. Белецкий В. В. Двуногая ходьба — модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984. 286 с.
5. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
6. Белецкий В. В., Шляхтин А. М. Экстремальные свойства резонансных движений // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. Вып. 4. С. 829—832.

7. *Белецкий В. В., Касаткин Г. В.* Об экстремальных свойствах резонансных движений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. Вып. 1. С. 58—62.
8. *Козлов В. В.* Усреднение в окрестности устойчивых периодических движений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. Вып. 3. С. 567—570.
9. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы. I—II // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 3—14; № 4. С. 3—13.
10. *Белецкий В. В., Лавровский Э. К.* Модельная задача двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 156—165.
11. *Белецкий В. В., Голубицкая М. Д.* Плоские режимы стояния и ходьбы на месте двуногого шагающего аппарата // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 226—237.
12. *Белецкий В. В., Голубицкая М. Д.* Модельная задача двуногой ходьбы с вертикальной некомфортабельностью // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. 1981. № 3. С. 62—68.
13. *Белецкий В. В., Кирсанова Т. С., Лавровский Э. К.* Исследование комфортабельных режимов движения двуногого аппарата // Исследование робототехнических систем. / Ред. И. М. Макаров и др. М.: Наука, 1982. С. 195—231.

Москва, Свердловск

Поступила в редакцию
22.V.1990