

УДК 531.36 : 62—50

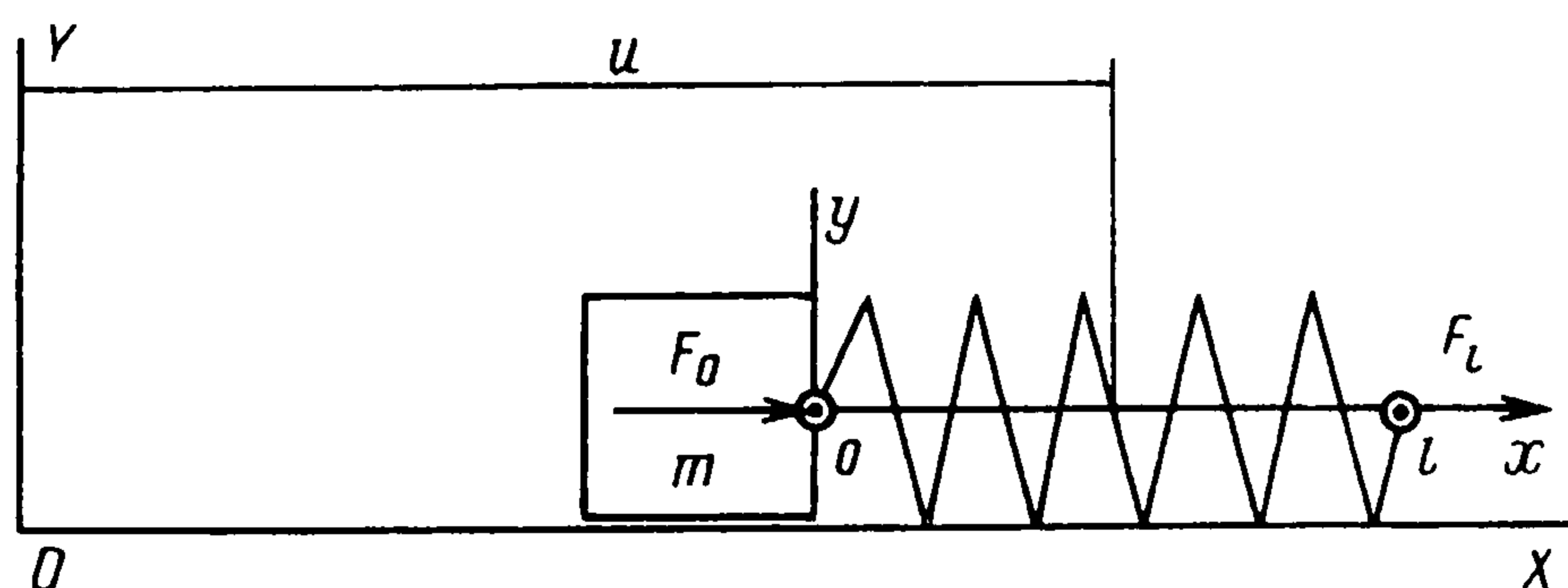
© 1991 г.

Л. Д. Акуленко

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ГИБРИДНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Исследуются одноосные (поступательные или вращательные) движения механической системы, содержащей абсолютно твердые тела (материальные точки или маховики). Эти части системы последовательно соединены между собой упругими элементами с распределенными характеристиками (пружинами, брусами или валами). Считается, что к твердым телам или к концам упругих звеньев приложены сосредоточенные управляющие воздействия (силы или моменты сил). Ставится и приближенно решается задача о приведении гибридной (дискретно-континуальной) системы в требуемое состояние движения, как целого, без относительных упругих колебаний. В основе предлагаемого конструктивного подхода лежит известное свойство квазистационарности вынужденных упругих отклонений при условии достаточной гладкости и плавности управляющих воздействий.

1. Постановка задачи. Для определенности сперва рассмотрим однонаправленные вдоль оси X управляемые движения простейшей гибридной колебательной системы (фиг. 1). Механическая система содержит аб-



Фиг. 1

солютно твердое тело m (материальную точку), соединенное с упругим брусом (распределенной пружиной) ol . Геометрические, инерционные и упругие характеристики упругого звена предполагаются постоянными: l — длина, ρ — линейная плотность, σ — жесткость на сжатие. Условия движения считаются таковыми, что упругие деформации удовлетворяют условиям применимости линейной теории.

К абсолютно твердому телу массой m (в точке $x = 0$) и к концу упругого элемента ($x = l$) приложены сосредоточенные переменные управляющие силы $F_0(t)$, $F_l(t)$; одна из функций $F_{0,l}(t)$ может быть тождественно равной нулю. Начальное состояние системы при $t = 0$ считается известным. Требуется в некоторый конечный момент времени $t = T < \infty$ выбором управлений $F_{0,l}(t)$ из некоторого допустимого класса перевести систему в заданное состояние движения. Обычно в прикладных задачах в качестве основного ставится условие отсутствия упругих колебаний при $t > T$ (см. [1—5] и др.).

Перейдем к математической постановке задачи динамики и управления движением гибридной системы посредством сосредоточенных граничных управлений. Уравнения состояния распределенной упругой системы

и силовые граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u'' &= \sigma u'', \quad 0 < x < l; \quad u = u(t, x) \\ m u''(t, 0) &= \sigma u'(t, 0) + F_0(t), \quad \sigma u'(t, l) = F_l(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $u = u(t, x)$ — абсолютное смещение сечения x , $x \in [0, l]$ в момент времени t . Точками обозначено дифференцирование по t , штрихами — по x . Движение системы (1.1) рассматривается на некотором ограниченном интервале времени t , $t \in [0, T_f]$, $T \leq T_f < \infty$. Начальное состояние системы, т. е. смещения и скорости сечений упругого звена, а также твердого тела считаются заданными:

$$u(0, x) = g^0(x), \quad u'(0, x) = h^0(x), \quad x \in [0, l] \quad (1.2)$$

где g^0, h^0 — достаточно гладкие функции, причем $g^0(+0) = g^0(0)$, $h^0(+0) = h^0(0)$. Задача управления заключается в выборе допустимых финитных [1] функций $F_{0,l}(t)$, $F_{0,l}(t) \in \{F(t)\}$, $t \in [0, T_f]$, таких, что

$$u(T, x) = g^T(x), \quad u'(T, x) = h^T(x), \quad x \in [0, l] \quad (1.3)$$

Функции $F_{0,l}(t)$, $g^{0,T}(x)$, $h^{0,T}(x)$ выбираются так, чтобы существовало классическое или сильное решение задачи [1—3, 6, 7]. Заметим, что при $u(t, x) \equiv s(t)$ система совершает движение как целое без относительных упругих колебаний. Таким образом, если потребовать, чтобы $g^T = \text{const}$, $h^T = \text{const}$, то при $F_{0,l}(t) \equiv 0$ для $t \geq T$ система будет перемещаться как целое с постоянной скоростью h^T (см. далее).

В системе (1.1)—(1.3) для удобства решения краевой задачи вводятся безразмерные переменные и параметры. Это позволяет также существенно уменьшить число параметров. Перейдем к безразмерным переменным следующим образом:

$$\begin{aligned} t^* &= vt, \quad x^* = xl^{-1}, \quad m^* = m(\rho l)^{-1}, \quad v^2 = \sigma(\rho l^2)^{-1} \\ u^*(t^*, x^*) &\equiv u(t^*, v^{-1}, x^*l) l^{-1}, \quad f_{0,1}(t^*) \equiv F_{0,1}(t^*v^{-1})(\rho l^2 v^2)^{-1} \\ g^{0,T*}(x^*) &\equiv g^{0,T}(x^*l) l^{-1}, \quad h^{0,T*}(x^*) \equiv h^{0,T}(x^*l)(lv)^{-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Далее звездочка опускается. В соотношениях (1.4) единицы времени, длины и массы связаны с соответствующими параметрами упругой части системы, которая предполагается существенной. Возможны другие способы введения единиц измерения, которые должны определяться в каждом конкретном случае соображениями удобства. Итак, при помощи замены (1.4) уравнения движения имеют вид (1.1), в котором $\rho = \sigma = l = 1$; интервалы времени также преобразуются согласно (1.4) ($vT \rightarrow T$, $vT_f \rightarrow T_f$).

Заметим, что в качестве механических моделей системы (1.1)—(1.3) можно взять абсолютно жесткий маховик, насаженный на упругий вал с распределенными крутильной жесткостью и инерционной характеристикой. К аналогичным уравнениям приводит модель натянутой струны, к одному из концов которой присоединена материальная точка; возможны и другие механические интерпретации задачи (1.1)—(1.3). Случай $m = 0$ (управление брусом) рассмотрен автором в [8], где методами проблемы моментов [1] построено через исходные произвольные функции $g^{0,T}(x)$, $h^{0,T}(x)$, точное решение задачи управления (1.1)—(1.3), оптимальное в смысле среднеквадратического критерия качества.

2. Построение решения при заданных силовых воздействиях. В случае известных функций $f_{0,1}(t)$, $t \in [0, T_f]$ решение краевой задачи (1.1) с начальными условиями (1.2) строится при помощи метода разделения переменных (метода Фурье [1—3, 6, 7]). Соответствующая самосопряженная краевая задача на собственные значения и функции и ее решение имеют вид

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0, & X'(0) &= mX''(0) = -m\lambda^2 X(0), & X'(1) &= 0 \\ D(m, \lambda) &\equiv \lambda^2 (\sin \lambda + m\lambda \cos \lambda) = 0, & \lambda &= \arg D \\ \lambda_0 &= 0, & \lambda_n &= \lambda_n(m), & n &= 1, 2, \dots \\ X_0(x, m) &= a_0 = \text{const}, & X_n(x, m) &= a_n \varphi_n(x, m) \\ \varphi_n(x, m) &\equiv \cos \lambda_n x - m\lambda_n \sin \lambda_n x & (\varphi_0 &\equiv 1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Значения собственных чисел $\lambda_n(m)$, $n \geq 1$ (корни характеристического уравнения $D(m, \lambda) = 0$) для различных $m \geq 0$ и $n = 1, 2, \dots$ приведены, например в [9] и др. Из (2.1) следует, что при фиксированном $m > 0$ собственные числа имеют асимптотику при $n \gg 1$ вида

$$\lambda_n(m) = \lambda_n^0 - (m\lambda_n^0)^{-1} + O((m\lambda_n^0)^{-2}), \quad \lambda_n^0 = \frac{1}{2}\pi(2n - 1)$$

Эта асимптотика справедлива также для всех значений $n \geq 1$ при $m \gg 1$; в пределе при $m \rightarrow \infty$ имеет место случай бруса с фиксированным левым концом, для которого собственные значения и ортонормированные функции таковы: $\lambda_n = \lambda_n^0$, $\xi_n = \sqrt{2} \sin \lambda_n x$.

Рассмотрим асимптотику при малых m , $0 \leq m \ll 1$. Если $m > 0$, то ее можно получить для «не очень больших» n , $n = 1, 2, \dots, n^*$, где $mn^* \ll 1$; имеем

$$\lambda_n(m) = \pi n - m(\pi n)(1 - m) + O((m\pi n)^3)$$

В пределе при $m = 0$ получаем случай свободного однородного бруса, собственные значения и ортонормированные функции для которого равны [8]:

$$\lambda_0 = 0, \quad \xi_0 \equiv 1; \quad \lambda_n = \pi n, \quad \xi_n = \sqrt{2} \cos \lambda_n x$$

Заметим, что в случае $m \gg 1$ ($m \rightarrow \infty$) при $f_0 \sim m$ краевое условие (1.1) для $x = 0$ принимает вид кинематического граничного управления: $mu''(t, 0) = f_0(t)$. Это, очевидно, означает, что масса m и левая граница бруса перемещаются независимо от его упругих колебаний. Исследование такой задачи управления может представить определенный прикладной интерес.

Система собственных функций $\{X_n(x)\}$, $n \geq 0$ ортогональна с весом $\chi(x, m) = 1 + m\delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака [7]. Это доказывается непосредственным интегрированием выражения $X_n X_{n'} \chi$ по x , $x \in [0, 1]$ с учетом (2.1). Ортонормированные с весом χ собственные функции $\xi_n(x, m)$, образующие базис $\{\xi_n(x, m)\}_\chi$ ($n = 0, 1, \dots$), имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_n(x, m) &= X_n(x, m) \|X_n\|_\chi^{-1} = \varphi_n(x, m) r_n^{-1}(m) \\ (\xi_n, \xi_{n'})_\chi &= \delta_{nn'}; \quad n, n' = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$r_n^2(m) = \|\varphi_n\|_\chi^2 \equiv \int_0^1 \varphi_n^2(x, m) \chi(x, m) dx > 0$$

$$\begin{aligned} r_0^2 &= 1 + m, & r_n^2 &= \frac{1}{2} + m + \frac{1}{2}m^2\lambda_n^2 - (1 + m^2\lambda_n^2)(2m\lambda_n^2)^{-1} \sin^2 \lambda_n \\ & & & (n \geq 1) \end{aligned}$$

Здесь $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера; при вычислении $r_n^2(m)$ ($n = 1, 2, \dots$) учтено тождество $\sin \lambda_n + m \lambda_n \cos \lambda_n \equiv 0$, поскольку $\lambda_n(m)$ — корни характеристического уравнения (2.1). Предельными переходами $m \rightarrow 0$ или $m \rightarrow \infty$ получаются приведенные выше выражения.

Применяя известный прием [10] (см. также [8]), для коэффициентов Фурье $\theta_n(t)$, $n \geq 0$ разложения искомого решения задачи (1.1), (1.2) получим счетную систему дифференциальных уравнений, связанных через управления $f_{0,1}(t)$:

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) \xi_n(x, m) \equiv \vartheta_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \xi_n(x, m)$$

$$\vartheta_0'' = \varphi_0(t), \quad \varphi_0(t) \equiv [f_0(t) + f_1(t)] M^{-1}, \quad \vartheta_0(0) = s^0, \quad \vartheta_0'(0) = v^0 \quad (2.3)$$

$$\theta_n'' + \lambda_n^2 \theta_n = \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) \equiv \xi_n(0, m) f_0(t) + \xi_n(1, m) f_1(t)$$

$$\xi_n(0, m) = r_n^{-1}, \quad \xi_n(1, m) = (1 + m^2 \lambda_n^2) r_n^{-1} \cos \lambda_n$$

$$\theta_n(0) = g_n^0, \quad \theta_n'(0) = h_n^0, \quad n \geq 1$$

Переменная $\vartheta_0 = \theta_0 r_0^{-1}$ имеет смысл координаты центра масс системы; $M = (1 + m)$ — ее полная масса, $(f_0 + f_1)$ — суммарная сила. Остальные коэффициенты θ_n ($n \geq 1$) описывают колебания всех мод относительно движущегося центра масс; если $\theta_n(t) \equiv 0$ ($n \geq 1$), то система (1.1) совершает движение как целое (см. разд. 1). Начальные значения g_n^0, h_n^0 ($n \geq 0$) — коэффициенты Фурье с весом χ функций начальных распределений $g^0(x), h^0(x)$ (1.2) по базису $\{\xi_n(x, m)\}_\chi$, причем $s^0 = g_0^0 r_0^{-1}$, $v^0 = h_0^0 r_0^{-1}$ — начальные положение и скорость центра масс.

Интересно отметить, что если для некоторого $n \geq 1$ взять функции $f_0(t)$ и $f_1(t)$ пропорциональными:

$$f_0(t) \equiv -\cos \lambda_n (1 + m^2 \lambda_n^2) f_1(t), \quad t \in [0, T]$$

то такие воздействия не окажут влияния на указанную моду колебаний, поскольку согласно (2.3) $f_n(t) \equiv 0$. Колебания данной моды будут свободными, в частности будут отсутствовать при $g_n^0 = h_n^0 = 0$.

Движение счетномерной системы (2.3) при заданных управляющих воздействиях $f_0(t), f_1(t)$, $t \in [0, T]$ определяется квадратурами

$$\vartheta_0(t) = s^0 + v^0 t + \int_0^t (t - \tau) \varphi_0(\tau) d\tau, \quad \vartheta_0'(t) = v^0 + \int_0^t \varphi_0(\tau) d\tau$$

$$\theta_n(t) = g_n^0 \cos \lambda_n t + \frac{h_n^0}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n (t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau$$

$$\theta_n'(t) = d\theta_n(t)/dt, \quad n \geq 1 \quad g_n^0 = (g^0, \xi_n)_\chi, \quad h_n^0 = (h^0, \xi_n)_\chi \quad (2.4)$$

Будем предполагать, что коэффициенты g_n^0, h_n^0 достаточно быстро убывают с ростом номера n , т. е. функции $g^0(x), h^0(x)$ выбраны из соответствующего класса гладкости [2, 6—8]. Граничные воздействия $f_{0,1}(t)$ считаются также достаточно гладкими. Тогда подстановка выражений (2.4) в ряд (2.3) приводит к искомому сильному или классическому решению $u = u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2). Этот ряд, а также ряды для производных u по t, x , полученных почленным дифференцированием, будут сходиться в среднеквадратическом или равномерно, или будут приводить к обобщенным функциям (при условии отсутствия гладкости).

3. Приближенное решение упрощенной основной задачи управления движением гибридной системы. Систему (2.3) можно интерпретировать

как счетную совокупность маятников (линейных осцилляторов), находящихся на общем подвижном основании, к которому приложены управляющие силы $f_{0,1}(t)$ [8, 11]. Частоты колебаний этих маятников в общем случае несоизмеримы, т. е. свободные колебания такой системы являются почти периодическими. Задача управления движением (1.1)—(1.3) для общих конечных условий $g_n^T, h_n^T \neq 0, g_n^T = \theta_n(T), h_n^T = \dot{\theta}_n(T)$ на основе системы (2.3) может быть асимптотически приближенно решена для $T \gg 1$ ($T \rightarrow \infty$) в постановке, предложенной автором [1]. Изложенный подход к управлению требует, однако, реализации весьма сложной функции, содержащей полином и почти периодическую функцию от t . Этот подход в общем случае не обеспечивает произвольной заданной точности управления по степеням малого параметра, величина которого связана с интервалом времени T и величиной управления.

Ниже предлагается подход к приближенному решению задачи управления с требуемой точностью для основной ограниченной постановки. А именно, будем считать, что $h_n^0 = g_n^0 = 0, n \geq 1$, т. е. относительные начальные колебания в системе отсутствуют. Они могут быть погашены на предварительном этапе управления или затухнуть в силу малой естественной диссипации. Ставится задача приведения объекта в требуемое состояние движения как целого, причем после окончания процесса управления упругие колебания должны быть погашены с наперед заданной степенью точности по малому параметру ε ($T \sim \varepsilon^{-1}$):

$$|\theta_n(t)| = \frac{1}{\lambda_n} \left| \int_0^T \sin \lambda_n(t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau \right| \leq c_n \varepsilon^\eta \quad (3.1)$$

$$|\dot{\theta}_n(t)| = \left| \int_0^T \cos \lambda_n(t - \tau) \varphi_n(\tau) d\tau \right| \leq d_n \varepsilon^\eta$$

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1, \eta > 0, n \geq 1; f_{0,1}(t) \equiv 0, t > T$$

где c_n, d_n — достаточно быстро стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$ коэффициенты.

Предлагается искать управляющие функции $f_0(t), f_1(t)$ в классе гладких, медленных и финитных функций [1]. Формализуем эти допущения

$$f_{0,1}(t) \equiv f_{0,1}(\kappa) \in \Phi^K [0, \Theta], \quad \kappa = \varepsilon t \in [0, \Theta], \quad T = \Theta \varepsilon^{-1} \quad (3.2)$$

$$\Phi^K [0, \Theta] = \{ \varphi(\kappa, \Theta): \varphi(\kappa) \neq 0, \kappa \in [0, \Theta]; \varphi^{(k)}(\kappa, \Theta) \equiv 0, \kappa \in [0, \Theta]; \varphi^{(k)}(\kappa, \Theta)|_{\kappa=0, \Theta} = 0; k = 0, 1, \dots, K, K < \infty \}$$

Здесь $\{\varphi\}$ — функции медленного времени κ , обращающиеся в нуль вместе со своими производными до K -го порядка включительно; $(K + 1)$ -я производная предполагается интегрируемой в собственном или несобственном смысле (см. далее); коэффициент $\Theta > 0$ от ε не зависит.

Физический смысл предположения о медленности функций $f_{0,1} = f_{0,1}(\kappa)$ заключается в том, что за время процесса управления T происходит много (порядка ε^{-1}) колебаний упругой части системы (колебаний низшей 1-й моды), что обычно имеет место на практике и не является обременительным условием. Действительно, обычно $F_{0,l} = F_{0,l}(\Omega t)$, где Ω — характерная частота управления в размерном времени $t \in [0, T]$, например, $\Omega \sim 1/T$. При переходе к безразмерным переменным по формулам (1.4) получим

$$f_{0,1}(\varepsilon t^*) \equiv F_{0,l}((\Omega/\nu) t^*) (\rho l^2 \nu^2)^{-1}$$

где полагаем $\Omega/\nu = \varepsilon \ll 1$.

Считаем, что начальные (1.2) и конечные (1.3) условия отвечают состоянию движения объекта как целого, без относительных колебаний

$$\begin{aligned} \vartheta_0(0) &= s^0, & \dot{\vartheta}_0(0) &= v^0 \\ \alpha^2 [\vartheta_0(T) - s^T]^2 + \beta^2 [\dot{\vartheta}_0(T) - v^T]^2 &= 0, & \alpha^2 + \beta^2 &> 0 \\ g_n^{0,T} &= h_n^{0,T} = 0, & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

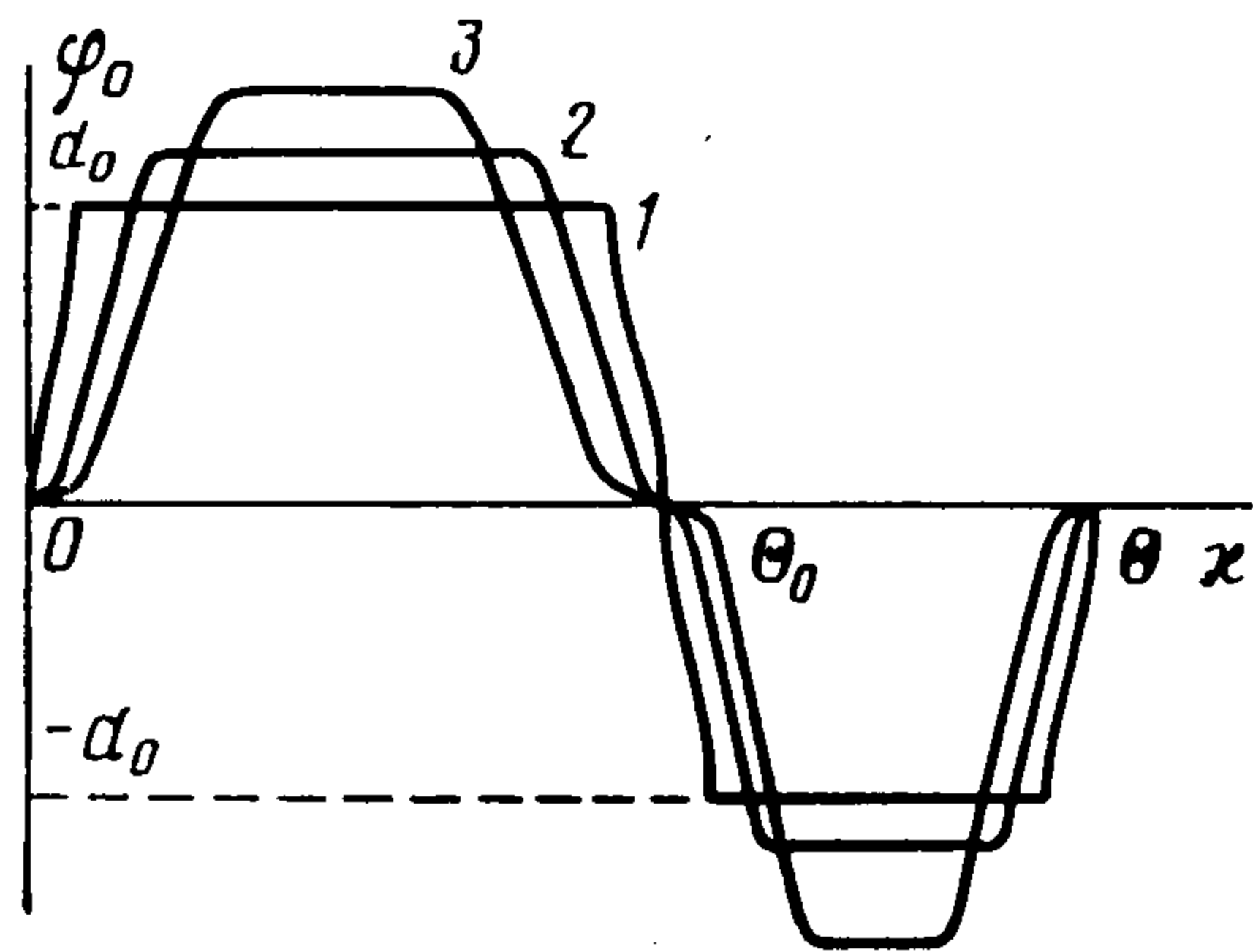
Эти условия означают, что $g^{0,T} = \text{const}$, $h^{0,T} = \text{const}$. Конечное условие (3.3), налагаемое на движение центра масс, означает при $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, что $\vartheta_0(T) = s^T$, $\dot{\vartheta}_0(T) = v^T$, где s^T , v^T заданы. Если $\alpha = 0$, то задана скорость $\dot{\vartheta}_0(T) = v^T$, а значение $\vartheta_0(T)$ произвольно; в случае $\beta = 0$ — наоборот. Не ограничивая общности, положим $s^T = v^T = 0$, что достигается заменами $\vartheta_0 = s + s^T + v^T(t - T)$, $\dot{\vartheta}_0 = v + v^T$ либо $\vartheta_0 = s + s^T$, $\dot{\vartheta}_0 = v + v^T$. В первом случае вводится подвижная система координат ($\dot{s} = v^T$), а во втором — $\dot{s} = v + v^T$.

Рассмотрим теперь движение центра масс системы (2.3) для управляющих функций $f_{0,1}(x)$ вида (3.2). При $\alpha, \beta \neq 0$ должны выполняться оба условия

$$\begin{aligned} -\int_0^\Theta (\Theta - x) \varphi_0(x) dx &= \varepsilon^2 s^0 + \varepsilon v^0 \Theta \quad (\alpha \neq 0) \\ -\int_0^\Theta \varphi_0(x) dx &= \varepsilon v^0 \quad (\beta \neq 0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

а при $\beta = 0$ ($\alpha \neq 0$) или $\alpha = 0$ ($\beta \neq 0$) — одно из двух равенств (3.4). Выбором функций $f_{0,1}(x) \in \Phi^K[0, \Theta]$ (3.2) можно обеспечить выполнение условий (3.4), причем если $\varepsilon^2 |s^0| + \varepsilon |v^0| \sim 1$, т. е. $s^0 \sim \varepsilon^{-2}$, $v^0 \sim \varepsilon^{-1}$, то $\varphi_0(x) \sim 1$; если же $\varepsilon |s^0| + |v^0| \sim 1$, т. е. $s^0 \sim \varepsilon^{-1}$, $v^0 \sim 1$, то $\varphi_0(x) \sim \varepsilon$.

Вторая ситуация может оказаться предпочтительней, поскольку приводит к малым $O(\varepsilon)$ упругим смещениям, что обеспечивает применимость линейной теории упругости с требуемой точностью по ε . Возможны и другие, в том числе промежуточные, асимптотики по ε для s^0 , v^0 и $\varphi_0(x)$. Выбор и построение функций $f_{0,1}(x)$ из класса $\Phi^K[0, \Theta]$ не представляет затруднений. Вид функции $\varphi_0(x)$ для различных значений K представлен качественно на фиг. 2, кривые 1—3. Кривая 1 может иметь



Фиг. 2

особенности типа $x^{1-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, $x \rightarrow 0$; она соответствует $K = 0$, т. е. функции φ_0 , близкой к кусочно-постоянной (релейной) и дающей управление, близкое к оптимальному по быстродействию. Кривая 2 отвечает значению $K = 1$; она близка к трапецевидной со сглаженными углами и имеет конечные углы наклона. Кривая 3 соответствует значению $K \geq 2$. Если одно из условий (3.4) не налагается ($\beta = 0$ или $\alpha = 0$), то управление $\varphi_0(x)$ можно взять в виде, аналогичном приведенным на фиг. 2,

но без смены знака функций $\varphi_0(x)$, т. е. в виде функций $\varphi_0(x)$ на участке $x \in [0, \Theta_0]$. Заметим, что величина Θ может быть фиксированной и задаваться заранее; тогда размах значений $\varphi_0(x)$ будет определяться на-

чальными условиями. И наоборот, если ограничен размах изменения управления, например $|\varphi_0(x)| \leq d_0$, то величина определяется в процессе решения задачи типа оптимального быстрогодействия.

Таким образом, управляющие воздействия $\varphi_0(x) \in \Phi^K [0, \Theta]$ позволяют существенным образом изменить движение центра масс системы, т. е. переменных $\vartheta_0, \vartheta_0^*$ (или s, v). Покажем, что при этом упругие колебания возбуждаются относительно слабо для $t \in [0, T]$ и дадим оценки остаточных колебаний при $T < t \leq T_f$ в терминах малого параметра.

Заметим, что в процессе управления упругие смещения могут быть существенными, порядка управляющего воздействия $|f_0| + |f_1|$, однако они имеют квазистатический характер. Чтобы это установить, вычислим $\theta_n(t), \theta_n^*(t), n \geq 1$ по формулам (2.4) при $g_n^0 = h_n^0 = 0$.

Сперва рассмотрим интервал управления $t \in [0, T]$. Интегрируя выражения (2.4) последовательно по частям, получим в итоге

$$\theta_n(t) = \lambda_n^{-2} \varphi_n(x) - \varepsilon^2 \lambda_n^{-4} \varphi_n''(x) + \varepsilon^4 \lambda_n^{-6} \varphi_n^{(4)}(x) - \varepsilon^6 \lambda_n^{-8} \varphi_n^{(6)}(x) + \varepsilon^8 \lambda_n^{-10} \varphi_n^{(8)}(x) - \dots + \Delta_{n,K}(x, \varepsilon) + \varepsilon^{K+1} \lambda_n^{-(K+2)} I_{n,K}(t, \varepsilon) \quad (3.5)$$

$$\theta_n^*(t) = d\theta_n(t)/dt = \varepsilon \lambda_n^{-2} \varphi_n'(x) - \varepsilon^3 \lambda_n^{-4} \varphi_n'''(x) + \varepsilon^5 \lambda_n^{-6} \varphi_n^{(5)}(x) - \varepsilon^7 \lambda_n^{-8} \varphi_n^{(7)}(x) + \varepsilon^9 \lambda_n^{-10} \varphi_n^{(9)}(x) - \dots + \Delta_{n,K}^*(x, \varepsilon) + \varepsilon^{K+1} \lambda_n^{-(K+1)} I_{n,K}^*(t, \varepsilon)$$

$$[n \geq 1, \quad t \in [0, T], \quad T = \Theta \varepsilon^{-1}]$$

Остаточные члены $\Delta_{n,K}, \Delta_{n,K}^*$ и $I_{n,K}, I_{n,K}^*$ имеют различный вид в зависимости от четности числа K . Для нечетного значения $K = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем выражения

$$\Delta_{n,K} = \pm \varepsilon^{K-1} \lambda_n^{-(K+1)} \varphi_{n(x)}^{(K-1)}, \quad \Delta_{n,K}^* = \pm \varepsilon^K \lambda_n^{-(K+1)} \varphi_n^{(K)}(x) \quad (3.6)$$

$$I_{n,K}(t, \varepsilon) = \mp \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \varphi_n^{(K+1)}(\varepsilon \tau) d\tau$$

$$I_{n,K}^*(t, \varepsilon) = \mp \int_0^t \cos \lambda_n(t - \tau) \varphi_n^{(K+1)}(\varepsilon \tau) d\tau$$

Аналогично для четного $K = 2k$ получим

$$\Delta_{n,K} = \pm \varepsilon^K \lambda_n^{-(K+2)} \varphi_n^{(K)}(x), \quad \Delta_{n,K}^* = \pm \varepsilon^{K-1} \lambda_n^{-(K+1)} \varphi_n^{(K-1)}(x) \quad (3.7)$$

$$I_{n,K}(t, \varepsilon) = \mp \int_0^t \cos \lambda_n(t - \tau) \varphi_n^{(K+1)}(\varepsilon \tau) d\tau$$

$$I_{n,K}^*(t, \varepsilon) = \pm \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \varphi_n^{(K+1)}(\varepsilon \tau) d\tau$$

Знаки \pm и \mp в выражениях (3.6), (3.7) определяются кратностью четырех чисел K и $K - 1$. Предполагается (см. (3.2) и определение класса функций Φ^K), что интегралы $I_{n,K}$ и $I_{n,K}^*$ (3.6), (3.7) существуют для $t \in [0, \Theta \varepsilon^{-1}]$, и имеют место следующие степенные оценки по ε (например [4]):

$$\begin{aligned} |I_{n,K}|, |I_{n,K}^*| &= O(\varepsilon^{-\gamma}), \quad \gamma < 1, \quad |f_0| + |f_1| = O(1) \\ |I_{n,K}|, |I_{n,K}^*| &= O(\varepsilon^{1-\gamma}), \quad \gamma < 1, \quad |f_0| + |f_1| = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценки типа (3.8) справедливы, если функции $\varphi^{(K+1)}(\kappa)$ имеют конечное число особенностей вида $(\kappa - \kappa_i)^{-\nu}$, где i — номер интегрируемого разрыва второго рода ($i = 1, 2, \dots, i^*$) [4]. Таким образом, для случаев 1, 2 кривых $\varphi_0(\kappa)$, представленных на фиг. 2, получим соответственно выражения

$$\begin{aligned} K = 0: \theta_n(t) &= \lambda_n^{-2} \varphi_n(\kappa) + \varepsilon O(I_{n,0} \lambda_n^{-2}) \\ \theta_n^*(t) &= \varepsilon O(I_{n,0}^* \lambda_n^{-1}), \quad n \geq 1 \\ K = 1: \theta_n(t) &= \lambda_n^{-2} \varphi_n(\kappa) + \varepsilon^2 O(I_{n,1} \lambda_n^{-3}) \\ \theta_n^*(t) &= \varepsilon \lambda_n^{-2} \varphi_n'(\kappa) + \varepsilon^2 O(I_{n,1}^* \lambda_n^{-2}) \\ t &\in [0, \Theta \varepsilon^{-1}], \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно (3.5)—(3.8) можно получить выражения для координат упругих смещений в случае $K \geq 2$. Из найденных выражений следует, что упругие деформации в процессе управления $f_{0,1}(\kappa)$, $t \in [0, T]$ содержат квазистатические смещения и относительно малые быстрые осцилляции. Главный по ε член квазистатических деформаций равен

$$U_0(\kappa, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\kappa)}{\lambda_n^2} \xi_n(x), \quad U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots + \varepsilon^K U_K \quad (3.10)$$

$$u(t, x, \varepsilon) = U(\kappa, x, \varepsilon) + w(t, x, \varepsilon) \equiv U_0(\kappa, x) + W(t, x, \varepsilon)$$

где для w имеем оценки типа $O(\varepsilon^{K+1-\nu})$ или $O(\varepsilon^{K+2-\nu})$, см. (3.8).

Исследуем относительные колебания системы после окончания процесса управления $T < t \leq T_f$. Полагая для $t > T$ функции $\varphi_n(\kappa) \equiv 0$ и учитывая конечные условия (3.2), получим оценки (см. (3.1))

$$\begin{aligned} |\theta_n(t)| &= \varepsilon^{K+1} \lambda_n^{-(K+2)} O(I_{n,K}), \quad T \leq t \leq T_f \\ |\theta_n^*(t)| &= \varepsilon^{K+1} \lambda_n^{-(K+1)} O(I_{n,K}^*), \quad T_f = \Theta_f \varepsilon^{-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Итак, в результате применения гладких и плавных финитных управлений центр масс объекта существенно изменяет свое состояние движения. В системе остаются относительно малые упругие колебания, величина которых может быть оценена заранее и выбором управления сделана пренебрежимо малой. Это обстоятельство представляет определенный интерес для прикладных задач прецизионного управления сложными гибридными системами, поскольку полученные выводы справедливы также для систем более общего вида.

4. Заключительные замечания. 4.1. Обобщение задачи управления на случай двух-массовой и многомассовой гибридных систем. Рассмотрим некоторое обобщение механической модели системы (фиг. 1). Предположим, что на правом конце (точка $x = l$) имеется дополнительная масса m_l (массу на левом конце в точке $x = 0$ обозначим m_0). Перейдем к безразмерным переменным по формулам (1.4): $m_{0,1}^* = m_{0,l} (\rho l)^{-1}$. Получим краевую задачу вида (1.1)

$$\begin{aligned} u'' &= u'', \quad 0 < x < 1; \quad u = u(t, x) \\ m_0 u''(t, 0) &= u'(t, 0) + f_0(t), \quad m_l u''(t, 1) = -u'(t, 1) + f_1(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

При заданных функциях $f_{0,1}(t)$ начальные условия могут иметь общий вид (1.2). Как и выше, будем рассматривать задачу управления в ограниченной постановке (см. разд. 3, формулы (3.3)). Проведем построения решения краевой задачи (4.1), аналогичные указанным в разд. 2. Самосопряженная краевая задача на собственные зна-

чения и функции и ее решение имеют вид

$$\begin{aligned}
 X'' + \lambda^2 X &= 0, & X'(0) &= -m_0 \lambda^2 X(0), & X'(1) &= -m_1 \lambda^2 X(1) \\
 D(m_0, m_1, \lambda) &\equiv \lambda^2 [(1 - \lambda^2 m_0 m_1) \sin \lambda + \lambda (m_0 + m_1) \cos \lambda] = 0, & D(m_0, m_1, \lambda) &\equiv \\
 &\equiv D(m_1, m_0, \lambda) \\
 \lambda &= \arg D: \lambda_0 = 0, & \lambda_n &= \lambda_n(m_0, m_1) \equiv \lambda_n(m_1, m_0) \\
 X_0 &= a_0 \varphi_0 \equiv \text{const}, & X_n &= a_n \varphi_n(x, m_0, m_1) \\
 \varphi_0 &\equiv 1, & \varphi_n &\equiv \cos \lambda_n x - m_0 \lambda_n \sin \lambda_n x \quad (4.2) \\
 \|X_n\|_{\chi}^2 &= a_n^2 \|\varphi_n\|_{\chi}^2, & \chi &= \chi(x, m_0, m_1) = 1 + m_0 \delta(x) + m_1 \delta(x-1) \\
 \|\varphi_n\|_{\chi}^2 &= r_n^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x, m_0, m_1) \chi(x, m_0, m_1) dx = 1/2 + 1/2 m_0 + 1/2 m_0^2 \lambda_n^2 + \\
 &+ m_1 (\cos \lambda_n - m_0 \lambda_n \sin \lambda_n)^2 + 1/2 \lambda_n (\lambda_n^{-2} - m_0^2) \sin \lambda_n \cos \lambda_n - m_0 \sin \lambda_n, & n &\geq 1 \\
 \|\varphi_0\|_{\chi}^2 &= M = 1 + m_0 + m_1, & (\varphi_n, \varphi_{n'})_{\chi} &= r_n^2 \delta_{nn'}
 \end{aligned}$$

Исследуем кратко корни $\lambda_n(m_0, m_1)$ характеристического уравнения $D = 0$ (4.2). Уравнение и его корни симметричны относительно $m_0, m_1 \geq 0$. При $m_0 = 0$ или $m_1 = 0$ оно обращается в (2.1). Если $m_0 \rightarrow \infty$ ($m_1 > 0$) или $m_1 \rightarrow \infty$ ($m_0 > 0$), то в пределе получается характеристическое уравнение $\text{ctg } \lambda = m_{1,0} \lambda$, которое соответствует закреплённому левому или правому концу. Если же обе массы $m_{0,1} \rightarrow \infty$, то задача соответствует колебаниям закреплённого на обоих концах бруса: $\sin \lambda = 0, \lambda_n = \pi n$. Кроме того, если $m_0, m_1 > 0$ — конечны, то при $n \rightarrow \infty$ для λ_n имеет место асимптотика, отвечающая также случаю двустороннего закрепления: $\lambda_n = \pi n + (m_0 + m_1) \cdot (m_0 m_1 \pi n)^{-1} + O(n^{-2})$. При малых $m_0, m_1 \ll 1$ и «не очень больших n » ($1 \leq n \leq n^*$) имеет место асимптотика, отвечающая случаю свободного стержня:

$$\lambda_n = \pi n - \pi n (m_0 + m_1) (1 - m_0 - m_1) + O(((m_0 + m_1) \pi n)^3)$$

Ортонормированная с весом $\chi = \chi(x, m_0, m_1)$ система собственных функций $\xi_n(x, m_0, m_1) = \varphi_n r_n^{-1}$ обладает свойством базиса. При помощи подхода, изложенного в разд. 2, получаем счетную систему уравнений для координат $\vartheta_0(t), \theta_n(t)$ ($n \geq 1$) вида (2.3), где величины $m = m_0 + m_1, M = 1 + m$, функции φ_n и коэффициенты λ_n, r_n определены в (4.2), а скалярное произведение берется с указанным весом χ . Дальнейшие построения сохраняются в форме, приведенной в разд. 3.

Рассмотрим теперь многомассовую управляемую систему $p + 1$ твердых тел, соединённых последовательно посредством распределённых упругих элементов; количество последних $p, p \geq 1$. Предполагается, что $\rho_i, \sigma_i > 0$ — характеристики распределённых элементов; m_0, m_i ($i = 1, 2, \dots, p$) — массы тел, причем некоторые из них могут быть равны нулю. В результате приходим к решению совместной системы краевых задач

$$\begin{aligned}
 \rho_i u_i'' &= \sigma_i u_i'', & 0 < x_i < l_i; & & u_i &= u_i(t, x_i) \\
 m_j u_j''(t, l_j) &= \sigma_{j+1} u_{j+1}'(t, 0) - \sigma_j u_j'(t, l_j) + F_j(t), & j &= 0, 1, \dots, p; \\
 |\sigma_0 &= \sigma_{p+1} = 0| \\
 u_k(t, l_k) &= u_{k+1}(t, 0), & k &= 1, 2, \dots, p-1
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $F_j(t)$ — управляющие функции, действующие на массы m_0, m_i ($i = 1, \dots, p$). Соответствующая совокупность краевых задач на собственные значения и собственные функции строится методом разделения переменных

$$\begin{aligned}
 u_i &= u_i(t, x_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(t) X_{i,n}(x_i) \\
 X_i'' + \lambda^2 X_i &= 0, & X_i &= X_i(x_i), & 0 \leq x_i \leq l_i \\
 X_i(x_i) &= a_i \cos \lambda x_i + b_i \sin \lambda x_i \\
 \lambda^2 (m_j \sigma_j \rho_j^{-1}) X_j(l_j) &= \sigma_{j+1} X_{j+1}(0) - \sigma_j X_j'(l_j) \\
 X_k(l_k) &= X_{k+1}(0)
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Получим систему $2p$ краевых условий, которым должны удовлетворять $2p$ функций $X_i(x_i)$, содержащих $2p$ произвольных постоянных a_i, b_i . Чтобы соответствующая однородная линейная алгебраическая система имела нетривиальное решение, параметр λ должен принимать значения, удовлетворяющие характеристическому уравнению $D(m, \rho, \sigma; \lambda) = 0$, где D — определитель $(2p \times 2p)$ -матрицы; m, ρ, σ — векторы

параметров системы. Вследствие громоздкости получающихся выражений выписывание определителя в общем виде нецелесообразно. Следует, однако, отметить, что $D = \lambda^{p+1} D_p$, где D_p — квазиполином, содержащий степени λ и произведения функций $\sin \lambda l_i, \cos \lambda l_i$. Нулевой корень $\lambda_0 = 0$ отвечает движению центра масс системы с массой $M = m_0 + \sum_i (m_i + \rho_i l_i)$ под действием суммарной силы $F(t) = F_0(t) + \sum_i F_i(t)$. Дальнейшие построения проводятся по аналогии с вышеприведенными. Гладкие плавные управления $f_j = f_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) обеспечивают требуемую относительную точность $O(\varepsilon^{K+1-\nu})$ управления движением гибридной колебательной системы более общего вида (4.3).

Изложенный подход применим также к управляемым системам с неоднородными характеристиками $\rho_i = \rho_i(x_i), \sigma_i = \sigma_i(x_i)$, которые могут быть исследованы точно или приближенно, например, при помощи методики работы [12].

4.2. Анализ движений для некоторых конкретных законов управления. Рассмотрим движение гибридной системы типа (1.1) или (4.1) под действием управляющих воздействий $f_0(x), f_1(x)$ заданного вида. Сперва возьмем законы релейного типа

$$f_{0,1}(x) = a_{0,1} \operatorname{sign}(\alpha_{0,1} - \beta_{0,1}x), \quad x \in [0, \Theta]$$

где параметры $a_{0,1}, \alpha_{0,1}, \beta_{0,1} = \text{const}$ и удовлетворяют условиям (3.4). Поскольку $f_{0,1}(x)$ не принадлежат классу Φ^0 , то оценки типа (3.9) для упругих колебаний не имеют места. Прямым интегрированием можно установить, что колебания и «квазистатическое смещение» имеют один и тот же порядок $|a_{0,1}|$ как в процессе управления $x \in [0, \Theta]$, так и после его окончания $x > \Theta$. Более того, в зависимости от момента $x_{0,1}^* = \alpha_{0,1} \beta_{0,1}^{-1}$ переключений и окончания $x = \Theta$ амплитуда колебаний может возрасти. Если величины $a_0, a_1 \sim \varepsilon$, т. е. $s^0 \sim \varepsilon^{-1}, |v^0 \sim 1$, то амплитуда остаточных колебаний будет также порядка ε .

Рассмотрим теперь строго трапецевидные с конечным углом наклона формы управления для $f_0(x), f_1(x)$, относящиеся к классу Φ^0 . Согласно (3.5), (3.8), получим $\theta_n(t) = \varphi_n(x) + \varepsilon O(\varphi_n' \lambda_n^{-3}), \theta_n'(t) = \varepsilon O(\varphi_n' \lambda_n^{-2})$ для $t \in [0, T]$ и $\theta_n(t) = \varepsilon O(\varphi_n' \lambda_n^{-3}), \theta_n'(t) = \varepsilon O(\varphi_n' \lambda_n^{-2})$ для $t \geq T$. Если $f_{0,1} \sim \varepsilon, f_{0,1}' \sim \varepsilon$, то абсолютное отличие от квазистатического приближения составит величину $O(\varepsilon^2)$.

В качестве механических моделей гибридных управляемых систем, рассмотренных выше, можно взять одноосную совокупность упругих валов и абсолютно жестких маховиков, последовательно соединенных струн с материальными точками на концах и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 414 с.
3. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 160 с.
4. Акуленко Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. Бербюк В. Е. Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 192 с.
6. Стеглов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
8. Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095—1103.
9. Будаг Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.
10. Гринберг Г. А. Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 141—168.
11. Акуленко Л. Д. Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596—607.
12. Акуленко Л. Д., Шамаев А. С. Приближенное решение некоторых возмущенных краевых задач // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 200—209.