

УДК 533.6.011

© 1991 г.

А. И. Рылов

О ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМАХ ОБТЕКАНИЯ ЗАОСТРЕННЫХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

Рассматривается сверхзвуковое плоское обтекание симметричного заостренного тела, в каждой точке которого угол наклона стенки меньше предельного угла для ударной поляры, отвечающей набегающему потоку. Показано, что при любых скоростях потока невозможны режимы обтекания с образованием как присоединенной ударной волны (УВ) сильного семейства, так и с отошедшей УВ, с последующим дозвуковым течением между УВ, телом и звуковой линией. По существу результаты А. А. Никольского [1] переносятся на случай произвольного числа Маха набегающего потока.

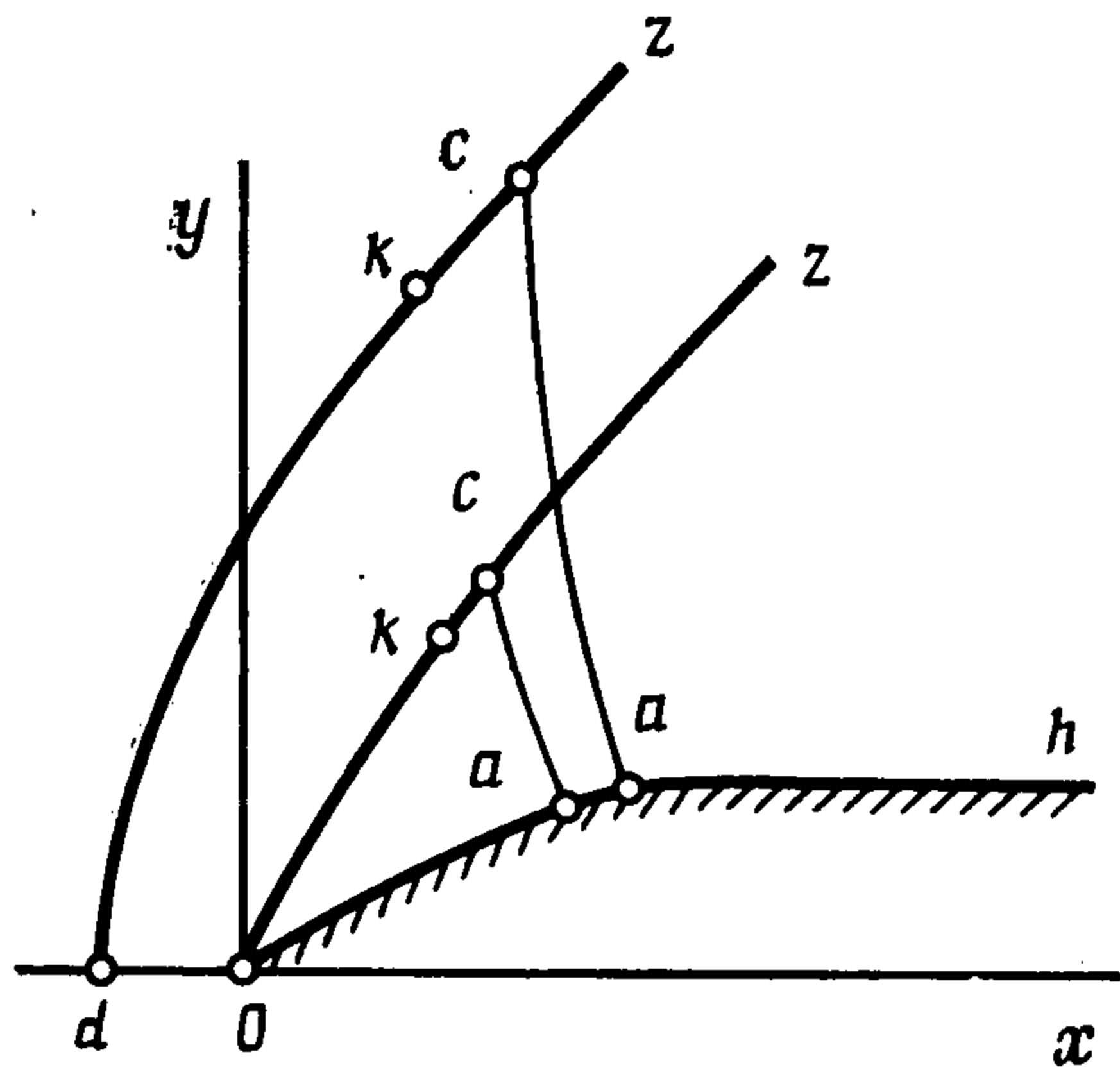
Невозможность обтекания конечного клина с образованием присоединенной УВ сильного семейства при существенных упрощающих допущениях была показана в работе [2]. В общей постановке, в предположении лишь отсутствия местных сверхзвуковых зон и замкнутых линий тока в области дозвукового течения между УВ, телом и звуковой линией задача была рассмотрена в [1].

В данной работе доказательство основано на монотонном изменении угла наклона вектора скорости вдоль линии постоянного давления (изобары). Этот факт, справедливый для вихревых течений, был установлен ранее [1], и ему предшествовал аналогичный результат для безвихревых течений [3]. В результате было показано [1], что при числах Маха набегающего потока $M_\infty < 1,7$ (показатель адиабаты $\kappa = 1,4$) невозможны режимы обтекания заостренных тел с присоединенной УВ сильного семейства и с отошедшей УВ, при этом было отмечено, что при $M_\infty > 1,7$ необходим совместный анализ до- и сверхзвуковой областей течения. Возможно, данное ограничение на M_∞ , а значит, и на предельный угол наклона стенки, послужило одной из причин того, что этот интересный результат не нашел отражения в последующих публикациях. Так, в известных руководствах [4—8] вопрос о возможности или невозможности образования присоединенной УВ сильного семейства при обтекании заостренных тел конечной толщины фактически не обсуждается, отмечается лишь, что в эксперименте реализуется УВ слабого семейства.

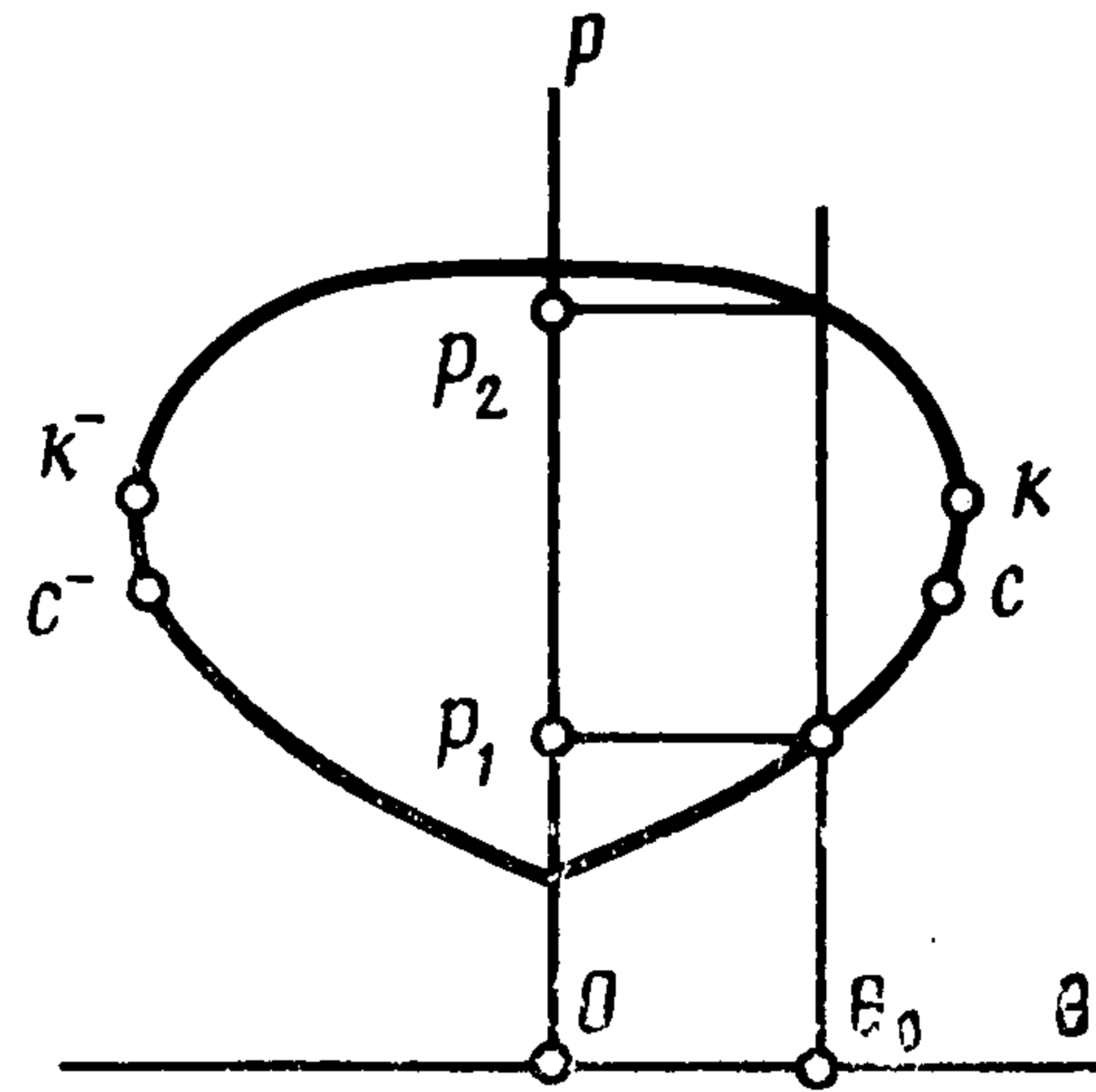
В предлагаемой работе используется основной элемент доказательства из [1], основанный на анализе изобары, выходящей из соответствующей точки УВ, с уточнением некоторых деталей. Но для давления на звуковой линии применяется другая оценка, нежели в [1]. В результате основные выводы уже не зависят от числа Маха набегающего потока.

Рассмотрим плоское симметричное обтекание заостренного тела конечной толщины равномерным горизонтальным сверхзвуковым потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с числом Маха M_∞ и показателем адиабаты κ . На фиг. 1 приведена верхняя половина Oh рассматриваемого тела. Ударная поляра, отвечающая набегающему потоку, приведена на фиг. 2. Здесь и далее приняты следующие обозначения: M — число Маха; q , θ — модуль и угол наклона вектора скорости; p , ρ , s — давление, плотность и энтропия.

Ударная поляра симметрична относительно оси $\theta = 0$. Точки s и s^- отвечают значению $M = 1$, точки, расположенные выше (ниже) точек s и s^- , — значениям $M < 1$ ($M > 1$). В точке k (k^-) угол θ достигает своего предельного максимального (минимального) значения θ_k ($-\theta_k$). Как известно, для политропных газов в точках k и k^- число $M < 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Напомним, что для бесконечного клина с углом заострения θ_0 $\theta_0 < \theta_k$ (фиг. 2), теория допускает два режима обтекания с присоединенными ударными волнами, отвечающими слабому ($p = p_1$) и сильному ($p = p_2$) семействам, при этом $p_1 < p_k < p_2$. Соответственно и для тела конечной толщины в зависимости от его геометрии можно ожидать разные режимы обтекания.

Далее будут рассмотрены следующие предполагаемые режимы обтекания заостренного тела Oh (фиг. 1).

Режим 1. Обтекание с присоединенной УВ Oz , отвечающей в точке заострения сильному семейству, при этом во всех точках области Oac $M \leq 1$.

Режим 2. Обтекание с отошедшей УВ dz , при этом во всех точках области $dOac$ $M \leq 1$.

Обязательное существование звуковых линий ac связано с тем, что при неограниченном удалении от тела УВ Oz и dz вырождаются в характеристики. Следовательно на Oz и dz существуют звуковые точки c , из которых выходят звуковые линии, либо достигающие тело в точке a , либо уходящие вдоль горизонтальной стенки тела вправо на бесконечность. Последнее может иметь место лишь в случае отошедшей УВ для узкого диапазона исходных параметров M_∞ , κ [9]. В этом случае достаточно считать, что точка a на фиг. 1 смещена вправо на бесконечность и что вдоль всей стенки $M < 1$. Как оказывается, из-за наличия указанных звуковых линий задача обтекания тел конечной толщины может принципиально отличаться от задачи обтекания бесконечного клина.

Из сделанных предположений следует, что на отрезках Oc и dc нет изломов и вдоль них все параметры, в том числе и энтропия s , меняются непрерывно, но необязательно монотонно. В областях дозвуковых течений Oac и $dOac$ непрерывны не только p и θ , но и s , а значит, и M , q и ρ .

Исследование дозвуковых неизоэнтропических течений в областях Oac и $dOac$ основывалось [1] на анализе изобар. Так, с использованием уравнений газовой динамики плоских вихревых течений в форме

$$p_N = -\rho q^2 \theta_L, \quad (M^2 - 1) p_L = -\rho q^2 \theta_N$$

было получено следующее выражение для производной, вычисленной вдоль изобары:

$$\theta_l = -p_n (1 - M^2 \sin^2 \beta) / (\rho q^2) \quad (1)$$

где p_L , θ_L , p_N , θ_N — производные, вычисленные вдоль линий тока и по нормали к ней, p_n — производная, вычисленная по нормали к изобаре, β — угол между вектором скорости и изобарой.

На основе (1) был следан следующий вывод.

Если при движении вдоль изобары в плоском дозвуковом вихревом течении область пониженного давления остается слева ($p_n \leq 0$), то при таком движении вектор скорости монотонно (возможно, не строго монотонно) поворачивается против часовой стрелки.

С использованием данного свойства изобар была показана [1] невозможность предполагаемых режимов обтекания при $M_\infty < 1,7$.

Для большей правомерности и эффективности в использовании указанного свойства изобар при анализе дозвуковых течений за УВ в добавление к [1] докажем следующие утверждения.

Утверждение 1. В дозвуковой области за УВ, на которую слева набегают однородный горизонтальный сверхзвуковой поток, давление p не может достигать своего локального экстремума в точках УВ за исключением точек, в которых одновременно выполнены два условия: $\theta = 0$, $\theta_y < 0$. Второе условие означает, что за УВ струйка тока сужается и поток в ней ускоряется. Такая ситуация может иметь место, например, за точкой нерегулярного отражения УВ от плоскости симметрии.

Действительно, если в дозвуковой области за УВ давление имеет локальный экстремум в некоторой точке t УВ, то в этом случае в малой окрестности точки t должны существовать охватывающие ее изобары, начинающиеся и заканчивающиеся на УВ. Но в силу отмеченного выше свойства это возможно лишь при $\theta = 0$, $\theta_y < 0$ и, как следствие, лишь в таком случае из точки t в дозвуковую область не выходит изобара. Во всех остальных случаях из точек УВ в дозвуковую область выходят изобары, что и будет использовано в дальнейшем.

Утверждение 2. В рассматриваемых режимах обтекания максимальное давление на звуковых линиях ac равно давлению p_c в звуковой точке c ударной поляры.

Действительно, на участках Oc и dc минимум энтропии достигается при $M = 1$, т. е. в точках c . Следовательно, и на ac минимум энтропии достигается в этих же точках. Принимая во внимание, что $p = p_0(s) f(M, \kappa)$, где $p_0(s)$ и $f(M, \kappa)$ — известные функции, причем $p_0(s)$ растет с убыванием s , получаем на ac $p \leq p_c$, что и требовалось доказать.

Утверждения 1 и 2 дают дополнительную информацию об экстремальных свойствах дозвуковых вихревых течений. Напомним также [1], что давление p не может достигать локального экстремума во внутренних точках области дозвукового течения. Исключение составляют точки, охватываемые замкнутыми изобарами, при полном обходе которых угол θ меняется на 2π , что имеет место при соударении струй с общей точкой торможения и при течениях с замкнутыми линиями тока [8].

Воспользуемся утверждениями 1 и 2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема. Сформулированные выше предполагаемые режимы обтекания заостренного тела при условии, что $\theta \leq \theta_k$ на дозвуковом участке стенки, а в точке заострения $\theta = \theta_0 < \theta_k$, невозможны при любых сверхзвуковых скоростях набегающего потока.

Доказательство. В силу непрерывности газодинамических параметров вдоль отрезков Oc и dc на них должны существовать точки, в которых θ достигает максимальное для ударной поляры значение θ_k . Обозначим эти точки на УВ также индексом k (если таких точек несколько, то ближайшие к точкам c). Следуя [1], рассмотрим изобары, выходящие из этих точек

в дозвуковые области Oac и $dOac$. Существование таких изобар следует из утверждения 1. Как известно [5], в дозвуковых течениях возможны точки ветвления. При наличии таких точек для продолжения исследуемых изобар выбираем крайние левые ветви (здесь и далее движение осуществляется от точки k).

При таком построении изобар $p_n \leq 0$, при этом p_n обращается в нуль лишь в указанных точках ветвления. Следовательно, при $M \leq 1$ вдоль исследуемых изобар в силу (1) $\theta_l \geq 0$ и во всех точках изобар, отличных от k , $\theta > \theta_k$. Изобары, вышедшие из точек k , не могут обрываться внутри дозвуковых областей и они должны достичь тех или иных точек их границ. Из утверждения 2 и из вида ударной поляры следует, что на звуковых линиях $p \leq p_c \leq p_k$, следовательно, исследуемые изобары не могут достичь звуковых линий ac . Но так как на этих изобарах $\theta > \theta_k$, то они не могут выйти на УВ Oc и dc , на стенки Oa , а также и на отрезок dO плоскости симметрии. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечания. 1°. В [1] давление p на звуковых линиях оценивалось сверху величиной p^* , равной давлению, получаемому после изоэнтропического торможения набегающего потока до $M = 1$; показано [1], что для $\kappa = 1,4$ при $M < 1,7$ имеем $p_k > p^*$, на основе чего и был сделан вывод о невозможности указанных режимов обтекания при $M_\infty < 1,7$.

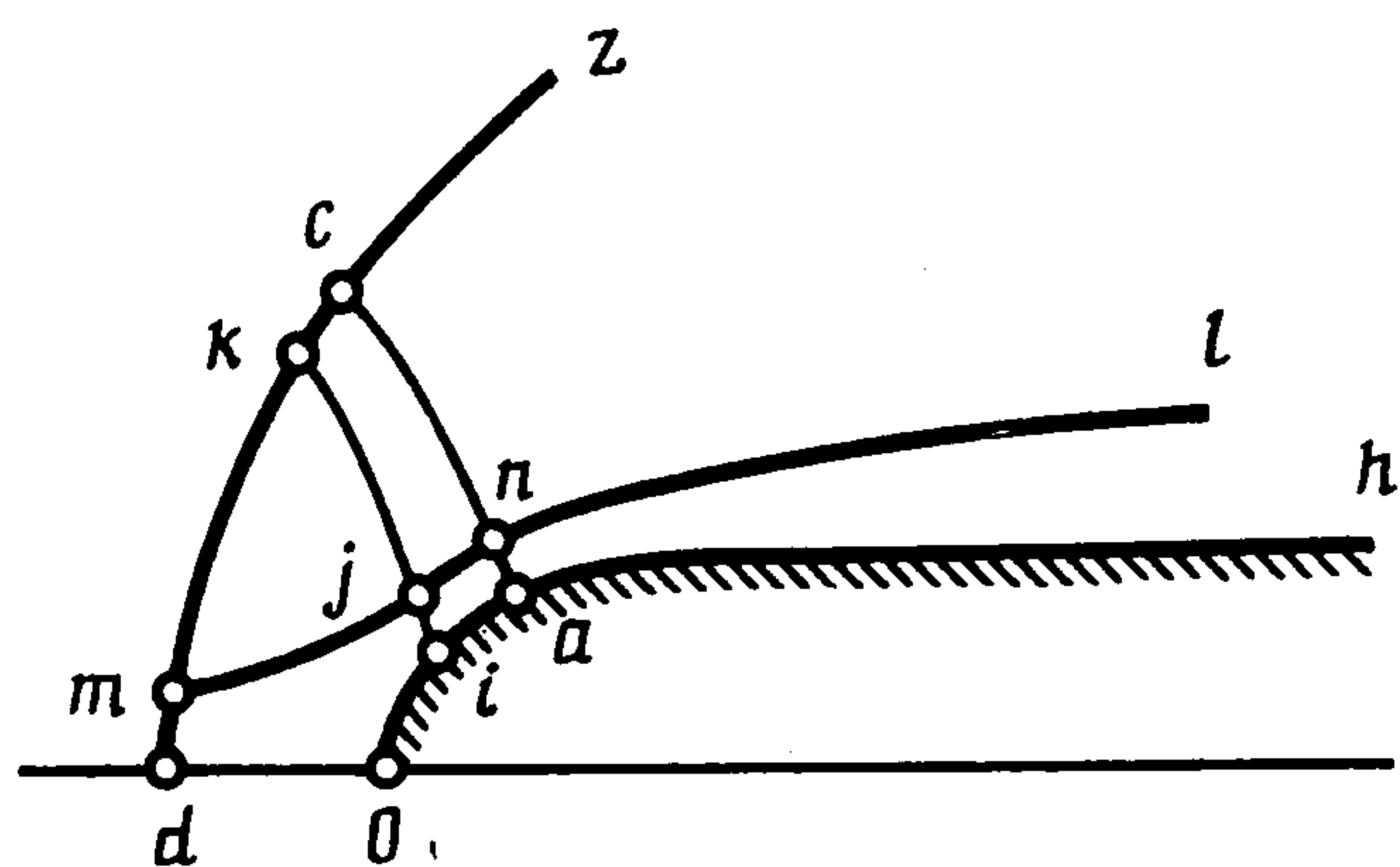
2°. При доказательстве теоремы опущена экзотическая ситуация, при которой вдоль исследуемых изобар угол θ возрастает на значительную величину $\varphi \leq 2\pi$ и при этом возможен, вообще говоря, выход изобар на УВ, на стенки или на плоскость симметрии. Не вдаваясь в детали, отметим лишь, что линии $\theta = \theta^* = \text{const}$ ($\theta_k < \theta^* < 2\pi$), выпущенные из точек таких изобар, не могут снова выйти на эти изобары и не могут достичь УВ, стенки тела и плоскости симметрии. Возможно лишь их пересечение в некоторой точке t дозвуковой области, при этом точка t должна охватываться замкнутыми изобарами, при полном обходе которых θ меняется на 2π . Как уже отмечалось выше, в такой точке t давление p должно достигать своего локального экстремума. Применительно к рассматриваемой задаче в окрестности точки t возможно лишь течение с замкнутыми линиями тока, как например, в случае передней отрывной зоны. В данной работе, как и в [1], предполагается отсутствие таких течений.

3°. Теорема не распространяется на случай, когда в точке заострения реализуется присоединенная УВ слабого дозвукового семейства, отвечающая точкам дуги sk ударной поляры, включая и случай $\theta_0 = \theta_k$.

Действительно, в этом случае на участке Oc правее точки O не гарантировано наличие точек, в которых значение θ не меньше максимального значения θ на дозвуковом участке стенки. В свою очередь отсутствие таких точек не позволяет прийти к противоречию при анализе изобар, на чем и основывалось доказательство теоремы.

4°. Если в точке заострения $\theta = \theta_0 < \theta_k$, но на дозвуковом участке стенки возможны значения $\theta > \theta_k$, то в этом случае теорема не справедлива, что видно из доказательства теоремы. Следовательно, в этом случае возможны режимы обтекания с отошедшей УВ и с присоединенной УВ, отвечающей сильному дозвуковому семейству, в зависимости от формы тела. Соответствующие примеры обтекания с отошедшей УВ хорошо известны [7], поэтому подробнее остановимся на примере обтекания с присоединенной УВ сильного дозвукового семейства.

Рассмотрим обтекание затупленного тела Oah , фиг. 3. Здесь dcz — отошедшая УВ, ac — звуковая линия, k — точка, в которой $\theta = \theta_k$, ki — изобара. Тогда в качестве верхней половинки искомого заостренного тела можно взять любую линию тока mnl , выходящую из отрезка dk УВ. Видно, что в окрестности точки m УВ от-



Фиг. 3

вечает сильному дозвуковому семейству. Далее, в области mpc $M < 1$ и $M = 1$ на pc , в точке j $\theta > \theta_k$. Иными словами, характерной особенностью построенного тела является то, что вдоль начальной части его стенки одновременно возрастают число Маха и угол наклона стенки.

5°. Если рассматриваемый газ не политропный, то теорема остается справедливой при выполнении утверждения 2. Если при этом звуковая точка c ударной поляры расположена выше точки k , то в условии теоремы необходимо θ_k заменить на θ_c .

Автор благодарит А. Н. Крайко, Ю. Б. Лифшица и В. В. Сычева за обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский А. А.* О плоских вихревых течениях газа // Никольский А. А. Теоретические исследования по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ. 1981. Вып. 2122. С. 74—85.
2. *Франкль Ф. И.* К вопросу о единственности решения задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 3. С. 421—424.
3. *Никольский А. А., Таганов Г. И.* Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481—502.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, 736 с.
5. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
6. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
9. *Терентьев Е. Д.* О форме звуковой линии при обтекании затупленного клина сверхзвуковым потоком совершенного газа // ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 2. С. 319—323.

Новосибирск

Поступила в редакцию
15.1.1990