

УДК 533.075

© 1991 г.

И. С. Меньшов

## ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА [О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

Рассматривается обобщение задачи о распаде произвольного разрыва в газе (задачи Римана) на случай, когда в начальный момент времени слева и справа от разрыва задано произвольное, вообще говоря, непостоянное по координате распределение газодинамических параметров (обобщенная задача Римана [1]). Доказывается разрешимость этой в общем случае неавтономной задачи и находятся аналитические формулы для ее решения в малой окрестности точки разрыва на плоскости  $x, t$ , где  $x$  — координата,  $t$  — время.

Полное исследование задачи Римана, являющейся автономной, было дано в работах Н. Е. Кочина [2]. Обобщенная задача Римана в общем случае неавтономна и не допускает простого аналитического решения во всей плоскости  $x, t$ . Однако некоторые аналитические соотношения для нее могут быть найдены. Так, для линейного начального распределения получены [1] аналитические формулы для значений производных газодинамических параметров вдоль контактного разрыва при  $t = 0$ .

Ниже обобщенная задача Римана рассматривается в малой окрестности точки разрыва на плоскости  $(x, t)$ , и в первом приближении по  $\theta = \sqrt{x^2 + t^2}$  строится ее аналитическое решение. В этом же приближении получены аналитические формулы для траекторий разрывов.

1. Обобщенная задача Римана сводится к следующей задаче Коши для одномерных нестационарных уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} (\rho\varphi)_t + (\rho u\varphi + F)_x &= 0 \\ \varphi &= (1, u, e + \frac{1}{2}u^2)^T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$F = (0, p, \rho u)^T, \quad \rho\varphi(0, x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x < 0 \\ \varphi_2(x), & x > 0 \end{cases}$$

где  $u, \rho, e$  — скорость, плотность и удельная внутренняя энергия,  $p = p(\rho, e)$  — давление,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — дифференцируемые в области определения функции, задающие начальное распределение параметров.

Запишем систему уравнений (1.1) в характеристическом виде, введя удельную энтропию  $s = s(\rho, e)$ , скорость звука  $a = a(\rho, e)$  и массовую скорость звука  $c = \rho a$ , а также новые переменные  $\theta$  и  $\lambda$ , связанные с  $x$  и  $t$  соотношениями  $\theta = \sqrt{x^2 + t^2}$ ,  $\lambda = xt^{-1}$

$$cD_+u + D_+p = 0, \quad cD_-u - D_-p = 0, \quad Ds = 0 \quad (1.2)$$

$$D = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\theta} (u - \lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} + \left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{u-\lambda} \right) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

$$D_{\pm} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\theta} (u \pm a - \lambda) \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} + \left( \frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{u \pm a - \lambda} \right) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

Решение системы уравнений (1.2) с точностью до  $O(\theta^2)$  ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(\lambda) + \theta u_1(\lambda), \quad p = p_0(\lambda) + \theta p_1(\lambda) \\ s &= s_0(\lambda) + \theta s_1(\lambda) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматривая нулевое приближение по  $\theta$ , можно получить, что функции с индексом нуль в (1.3) могут быть одного из трех типов: либо  $u_0, p_0, s_0 = \text{const}$ , что соответствует однородному постоянному потоку, либо удовле-

творять соотношениям

$$u_0 \mp a_0 = \lambda, \quad c_0 u_0' \pm p_0' = 0, \quad s_0 = \text{const} \quad (1.4)$$

что соответствует волне разрежения (верхний знак относится к волне, распространяющейся налево, нижний — направо), штрих означает производную по  $\lambda$ .

Имея решения нулевого приближения, рассмотрим для каждого из этих типов первое приближение по  $\theta$ . Если не оговорено особо, будем обозначать индексом нуль первые слагаемые (нулевое приближение), а индексом единица — коэффициенты при  $\theta$  (первое приближение) в разложениях типа (1.3).

*Постоянный поток.* Интегрируя соответствующую систему уравнений первого приближения

$$c_0 D_+^* u_1 + D_+^* p_1 = 0, \quad c_0 D_-^* u_1 - D_-^* p_1 = 0, \quad D^* s = 0 \quad (1.5)$$

$$D_{\pm}^* = \frac{d}{d\lambda} + \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{u_0 \pm a_0 - \lambda} \right), \quad D^* = \frac{d}{d\lambda} + \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{u_0 - \lambda} \right)$$

получим общее решение

$$\begin{cases} u_1 \\ p_1/c_0 \end{cases} = C_1 \frac{u_0 + a_0 - \lambda}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \pm C_2 \frac{u_0 - a_0 - \lambda}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (1.6)$$

$$s_1 = C_3 \frac{u_0 - \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные.

*Волна разрежения.* Рассмотрим для определенности случай, когда волна распространяется направо. Тогда система уравнений первого приближения запишется так:

$$c_0 u_1 + p_1 + (u_1 + a_1)(c_0 u_0' + p_0') = 0, \quad D^* s_1 = 0 \quad (1.7)$$

$$D_-^* u_1 - \frac{1}{c_0} D_-^* p_1 = \left[ \left( \frac{\partial c^{-1}}{\partial p} \right)_0 p_1 + \left( \frac{\partial c^{-1}}{\partial s} \right)_0 s_1 \right] p_0'$$

Операторы  $D_{\pm}^*, D^*$  имеют такой же вид, как в (1.5), а величины с индексом нуль (в частности, в операторах  $D^*, D_{\pm}^*$ ) — функции  $\lambda$ , для которых выполняются соотношения (1.4) с нижним знаком.

Интегрирование второго уравнения в (1.7) дает

$$s_1 = C_2 (1 + \lambda^2)^{-1/2} \exp \left[ - \int \frac{d\lambda}{u_0 - \lambda} \right] \quad (1.8)$$

где  $C_2$  — произвольная постоянная. Учитывая, что

$$a_1 = \left( \frac{\partial a}{\partial p} \right)_0 p_1 + \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)_0 s_1$$

можно выразить  $u_1$  из первого уравнения в (1.7)

$$u_1 = K_0(\lambda) p_1 + L_0(\lambda) s_1 \quad (1.9)$$

$$K_0(\lambda) = - \frac{1}{c_0} \frac{1 + 2a_0'}{1 + 2u_0'}, \quad L_0(\lambda) = - \frac{2u_0'}{1 + 2u_0'} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)_0$$

Исключая при помощи этого соотношения  $u_1$  из второго уравнения в (1.7), получим уравнение для определения

$$D_-^* [(K_0 - c_0^{-1}) p_1 + L_0 s_1] = (\partial c^{-1} / \partial s)_0 p_0' s_1$$

общее решение которого

$$p_1 = C \left( K_0 - \frac{1}{c_0} \right)^{-1} (1 + \lambda^2)^{-1/2} \exp \left[ - \int \frac{d\lambda}{u_0 - a_0 - \lambda} \right] \quad (1.10)$$

$$C = C(\lambda) = \int \sqrt{1 + \lambda^2} \exp \left[ \frac{d\lambda}{u_0 - a_0 - \lambda} \right] \left[ \left( \frac{\partial c^{-1}}{\partial s} \right)_0 p_0' s_1 - D_-^* (L_0 s_1) \right] d\lambda + C_1$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.

Формулы (1.8)—(1.10) дают общее решение первого приближения для случая правой волны разрежения в нулевом приближении. Аналогичным образом можно определить решение для левой волны разрежения. Эти решения существенно упрощаются, если воспользоваться соотношениями (1.4) для величин нулевого приближения. Действительно, для центрированной волны разрежения справедливо равенство

$$\exp \left[ - \int \frac{d\lambda}{u_0 - \lambda} \right] = c_0$$

используя которое и соотношения (1.4), после преобразований формул (1.8)—(1.10) (а также аналогичных формул для левой волны) общее решение первого приближения для случая волны разрежения можно записать так

$$p_1 = \frac{c_0 \sqrt{c_0}}{(c_0 K_0 \pm 1) \sqrt{1 + \lambda^2}} [C_1 + C_2 \Omega_0] \quad (1.11)$$

$$s_1 = C_2 (1 + \lambda^2)^{-1/2} c_0, \quad u_1 = K_0 p_1 + L_0 s_1$$

$$K_0 = \pm \frac{3 - 2u_0'}{c_0 (1 + 2u_0')}, \quad L_0 = \pm \frac{2u_0'}{1 + 2u_0'} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)_0$$

$$\Omega_0 = - \int \sqrt{c_0} \left[ \left( \frac{\partial \ln c}{\partial s} \right)_0 u_0' + L_0' + \frac{L_0}{2(\lambda - u_0)} \right] d\lambda$$

где верхний знак относится к волне разрежения, распространяющейся налево, а нижний — направо; параметры с индексом нуль определяются соотношениями (1.4);  $C_1, C_2$  — произвольные константы.

Таким образом, в аналитическом виде найдено общее решение первого приближения как в области постоянного течения, так в области волны разрежения. Отметим, что в первом случае общее решение определяется с точностью до трех произвольных постоянных, а во втором — с точностью до двух.

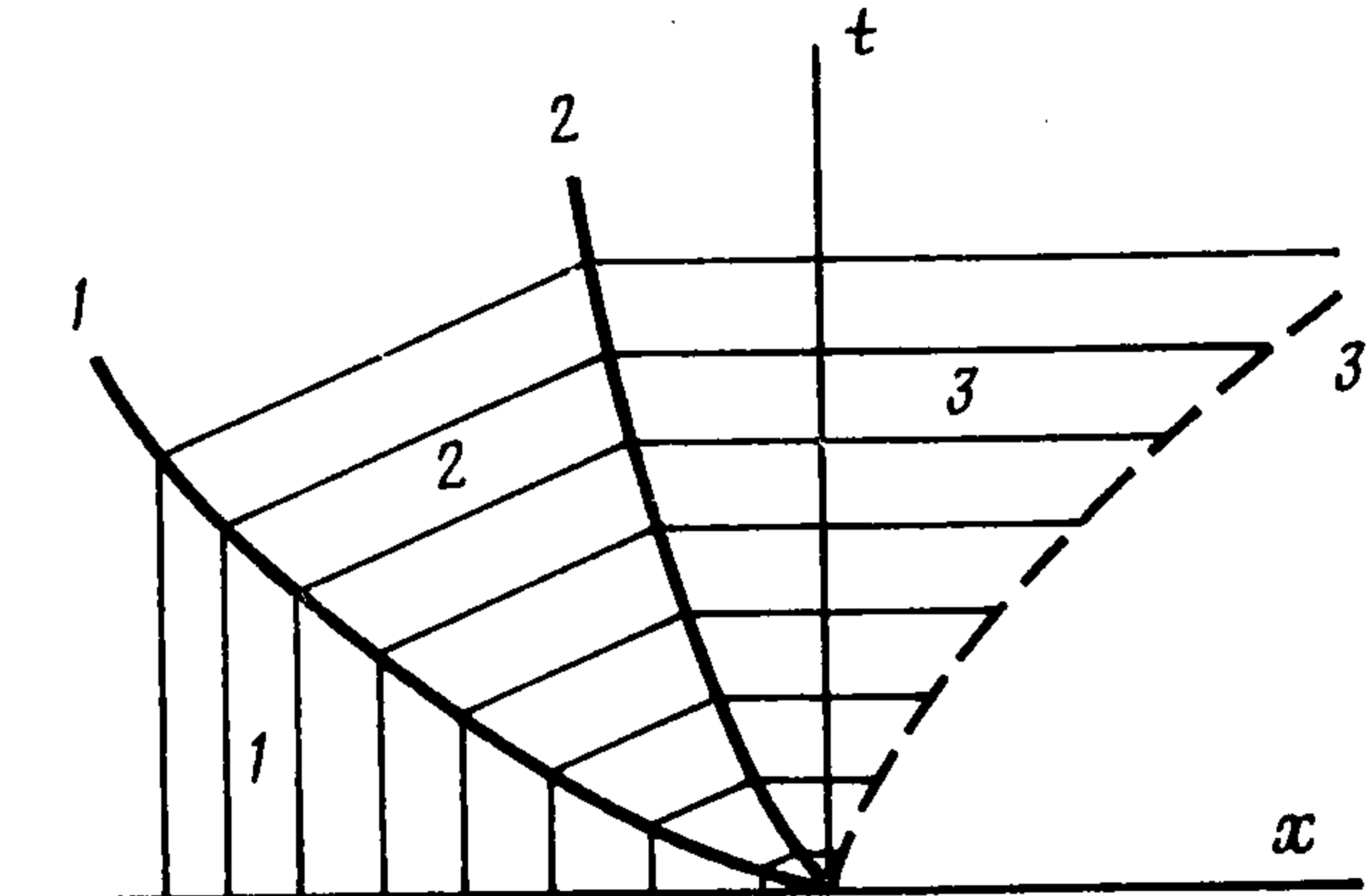
При решении классической задачи Римана вся область течения разбивается на ряд подобластей, отделенных одна от другой поверхностями разрыва параметров, в каждой из которых реализуется либо постоянный поток, либо волна разрежения. Общее решение в этих подобластях известно — оно описывается либо соотношениями (1.6), либо (1.8)—(1.11). Поэтому решение обобщенной задачи Римана можно считать построенным, но с точностью до некоторого числа ( $\leq 16$  в зависимости от конкретной задачи) произвольных постоянных. Значения этих постоянных должны определяться из рассмотрения соотношений на поверхностях разрыва параметров. В следующем разделе будет доказано, что обобщенная задача Римана в первом приближении решается аналитически до конца, т. е. определяются все постоянные, а также траектории разрывов на плоскости  $x, t$ .

2. В нулевом приближении по  $\theta$  (классический случай) при распаде разрыва образуется контактная поверхность, к которой примыкают слева и справа области постоянного течения, отделенные от невозмущенных областей либо ударной волной, либо веером волны разрежения, либо слабым разрывом. Будем предполагать, что волновая картина определяется классическим случаем, т. е., если в начальный момент при распаде возникает, например, ударная волна, то она остается таковой в течение некоторого конечного промежутка времени.

Рассмотрим область, лежащую с одной стороны от контактного разрыва (слева или справа) и покажем, что в этой области решение обобщенной

задачи Римана определяется с точностью до одной произвольной постоянной.

Пусть для определенности эта область левая. Введем двойной индекс для параметров среды: второе число в индексе будет обозначать порядок приближения, а первое — номер подобласти, в которой ищется решение (1 — невозмущенный поток, 2 — волна разрежения, 3 — постоянный поток, примыкающий к контактной поверхности, фигура). Так, например, давление в волне разрежения запишется в виде  $p_2 = p_{20}(\lambda) + \theta p_{21}(\lambda) + O(\theta^2)$ . Для поверхностей разрыва также введем нумерацию: 1, 2 — ограничивающие волну разрежения характеристики, 3 — контактная поверхность (фигура). В случае ударной волны или слабого разрыва область 2 исчезает, а траектории 1 и 2 сливаются в одну.



Уравнения траекторий этих разрывов представим в виде  $\lambda_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1}\theta + O(\theta^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда их скорости  $D_i = \lambda_{i0} + 2\lambda_{i1}\theta + O(\theta^2)$ .

Исходим из того, что решение задачи в нулевом приближении (параметры с индексом нуль) известно [3]. Произвольные постоянные в общих решениях для областей 1, 2, 3 будем определять из условий их «сшивки» на поверхностях разрыва.

Пусть начальное распределение параметров слева от разрыва задано в его окрестности в виде ряда по  $\theta$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\infty, \quad u = u_{10} + U_{10}\theta + O(\theta^2) \\ p &= p_{10} + P_{10}\theta + O(\theta^2), \quad s = s_{10} + S_{10}\theta + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Общее решение в области 1 определяется формулами (1.6). Используя условие «сшивки» этого решения с начальными данными (2.1), а именно

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} u_{11}(\lambda) = U_{10}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p_{11}(\lambda) = P_{10}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} s_{11}(\lambda) = S_{10}$$

можно определить произвольные постоянные и записать решение в области 1 в виде

$$\begin{aligned} u_{11} &= (1 + \lambda^2)^{-1/2} [(u_{10} - \lambda) U_{10} + P_{10}/\rho_{10}] \\ p_{11} &= \frac{(u_{10} - \lambda) P_{10} + c_{10} a_{10} U_{10}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad s_{11} = \frac{u_{10} - \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} S_{10} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если соотношения (2.1) — представление начальных данных справа от контактного разрыва ( $x > 0$ ), то путем сопряжения общего решения (1.6) с начальными данными на линии  $\lambda = +\infty$  аналогичным образом определяется решение первого приближения для правой невозмущенной области

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{(\lambda - u_{10}) U_{10} - P_{10}/\rho_{10}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \\ p_{11} &= \frac{(\lambda - u_{10}) P_{10} - c_{10} a_{10} U_{10}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad s_{11} = \frac{\lambda - u_{10}}{\sqrt{1 + \lambda^2}} S_{10} \end{aligned}$$

Таким образом, решение в невозмущенной области определяется полностью.

Далее рассмотрим «сшивку» этого решения с решением в области 3. При этом необходимо исследовать три случая, когда эти области отделены одна от другой ударной волной, слабым разрывом и волной разрежения.

*Ударная волна.* На ударной волне  $\lambda = \lambda_1(\theta)$  выполняются соотношения Ренкина — Гюгонио

$$\rho_3 v_3 = m_1, \quad p_3 + m_1 v_3 = I_1, \quad \frac{1}{2} v_3^2 + h_3 = H_1 \quad (2.3)$$

где  $v_3 = D_1 - u_3$ ,  $h_3$  — энтальпия,  $m_1$ ,  $I_1$ ,  $H_1$  — поток массы, импульса и энергии, определяемые по значениям параметров перед волной (в области 1).

Подставляя в (2.3) разложения вида (1.4) и рассматривая первое приближение по  $\theta$ , можно получить систему линейных уравнений для определения значений параметров области 3 на ударной волне:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda_{10}, \quad \rho_{30} v_{31} + v_{30} \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{30} p_{31} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{30} s_{31} \right] &= m_{11} \\ p_{31} + m_{10} v_{31} + m_{11} v_{30} &= I_{11} \\ v_{30} v_{31} + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{30} p_{31} + \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_{30} s_{31} &= H_{11} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Опуская достаточно громоздкую процедуру решения этой системы, приведем лишь конечный результат: значение параметров первого приближения в области 3 на фронте ударной волны ( $\lambda = \lambda_{10}$ ) представляются в виде

$$\begin{pmatrix} u_{31} \\ p_{31} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_{11} \begin{pmatrix} U_2 \\ P_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} S_1 = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_{30}^{-1} \left[ \left( 1 - \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} \right) (v_{30} - v_{10}) u_{11} + \left( \frac{1}{\rho_{10}} - \frac{1}{\rho_{30}} \right) \left( 1 - \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} M_{10}^2 \right) p_{11} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_{10} s_{11} + \frac{v_{10} (v_{30} - v_{10})}{\rho_{30}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{10} s_{11} \right], \quad U_1 = - \frac{1}{\rho_{30} (1 - M_{30}^2)} \left\{ \left[ 2\rho_{30} M_{30}^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho_{10} (1 + M_{30}^2) \right] u_{11} - v_{30} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{30} S_1 + \left( 1 + M_{30}^2 - \frac{\rho_{30}}{\rho_{10}} M_{30}^2 \right) v_{10} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{10} s_{11} + \right. \\ \left. + \frac{\rho_{10} M_{10}^2 (1 + M_{30}^2) - \rho_{30} M_{30}^2 (1 + M_{10}^2)}{m_{10}} p_{11} \right\}, \quad P_1 = m_{10} \left[ \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} - 2 \right) u_{11} + U_1 \right] + \\ + \left( 1 + M_{10}^2 - \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} M_{10}^2 \right) p_{11} - v_{10} (v_{30} - v_{10}) \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{10} s_{11} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} S_2 = \left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_{30}^{-1} \left( \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} - 1 \right) (v_{30} - v_{10}), \quad U_2 = 1 - \frac{1}{\rho_{30} (1 - M_{30}^2)} \left[ \rho_{10} (1 + M_{30}^2) - \right. \\ \left. - 2\rho_{30} M_{30}^2 - v_{30} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{30} S_2 \right], \quad P_2 = \left( 1 - \frac{\rho_{10}}{\rho_{30}} + U_2 \right) m_{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{10} = \lambda_{10} - u_{10}, \quad v_{30} = \lambda_{10} - u_{30}, \quad M_{10} = v_{10} a_{10}^{-1}, \quad M_{30} = v_{30} a_{30}^{-1} \\ m_{10} = \rho_{10} v_{10} = \rho_{30} v_{30} \end{aligned}$$

где  $s_{11}$ ,  $u_{11}$ ,  $p_{11}$  — значения параметров первого приближения в невозмущенной зоне (2.2) при  $\lambda = \lambda_{10}$ .

Подставляя значения параметров на ударной волне (2.5) в общее решение для области 3 (1.6), можно определить постоянные и, следовательно, найти решение в примыкающей к контактной поверхности зоне в случае ударной волны. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат: первое приближение в области между ударной волной и контактным разрывом имеет вид

$$\begin{aligned} u_{31}(\lambda) &= U_1(\lambda) + C U_2(\lambda) \\ p_{31}(\lambda) &= P_1(\lambda) + C P_2(\lambda), \quad s_{31}(\lambda) = S_1(\lambda) + C S_2(\lambda) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} U_i(\lambda) &= U_i \varphi_1(\lambda) + c_{30}^{-1} P_i \varphi_2(\lambda) \\ P_i(\lambda) &= c_{30} U_i \varphi_2(\lambda) + P_i \varphi_1(\lambda), \quad S_i(\lambda) = S_i \varphi_3(\lambda), \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\varphi_1(\lambda) = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{10}^2}{1 + \lambda^2}} \frac{(u_{30} - \lambda)(u_{30} - \lambda_{10}) - a_{30}^2}{(u_{30} - \lambda_{10})^2 - a_{30}^2}$$

$$\varphi_2(\lambda) = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{10}^2}{1 + \lambda^2} \frac{a_{30}(\lambda - \lambda_{10})}{(u_{30} - \lambda_{10}^2) - a_{30}^2}}$$

$$\varphi_3(\lambda) = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{10}^2}{1 + \lambda^2} \frac{u_{30} - \lambda}{u_{30} - \lambda_{10}}}$$

Постоянная  $C$  в (2.7) равна  $2\lambda_{11}$ , т. е. совпадает с коэффициентом при  $\theta$  в разложении скорости ударной волны  $D_1$  по  $\theta$ . Она произвольна. Таким образом, решение первого приближения в целом в области левее контактного разрыва в случае ударной волны описывается формулами (2.7)–(2.8) и имеет неопределенность ровно в одну произвольную постоянную.

*Слабый разрыв.* В этом случае ударная волна вырождается в характеристику, на которой должно выполняться условие равенства всех параметров. Используя это условие для параметров первого приближения и учитывая, что значения на характеристике в невозмущенной зоне известны ((2.2) при  $\lambda = \lambda_{10}$ ), а общее решение в области за характеристикой определяется формулами (1.6), можно записать систему линейных уравнений для определения трех произвольных постоянных общего решения. Можно убедиться, что ранг матрицы этой системы равен двум, а силу чего определяются только две постоянные и, следовательно, решение в области 3 может быть найдено с точностью до одной постоянной. Его можно представить так же, как в случае ударной волны, в виде (2.7), но соответствующие функции будут другие

$$U_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda) u_{11}(\lambda_{10}), \quad U_2(\lambda) = \frac{u_{30} + \varepsilon a_{30} - \lambda}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} \quad (2.9)$$

$$P_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda) p_{11}(\lambda_{10}), \quad P_2(\lambda) = \varepsilon c_{30} U_2(\lambda)$$

$$S_1(\lambda) = \Lambda_1 \frac{u_{30} - \lambda}{u_{30} - \lambda_{10}} s_{11}(\lambda_{10}), \quad S_2(\lambda) = 0$$

$$\varphi_1(\lambda) = \Lambda_1 \frac{u_{30} - \varepsilon a_{30} - \lambda}{u_{30} - \varepsilon a_{30} - \lambda_{10}}, \quad \Lambda_1 = \sqrt{\frac{1 + \lambda_{10}^2}{1 + \lambda^2}}, \quad \varepsilon = -1$$

Искривление характеристики в первом приближении описывается соотношением

$$\lambda_{11} = 1/2 [u_{11}(\lambda_{10}) + \varepsilon a_{11}(\lambda_{10})].$$

*Волна разрежения.* В этой области все множество решений определено двумя произвольными постоянными. «Сшивка» на первой характеристике двух решений — в невозмущенной области и в области волны разрежения — в первом приближении приводит к следующим условиям:

$$\lambda = \lambda_{10}, \quad u_{21} + \lambda_{11} u_{20}' = u_{11} \quad (2.10)$$

$$p_{21} + \lambda_{11} p_{20}' = p_{11}, \quad s_{21} = s_{11}$$

Из этих трех уравнений можно определить две произвольные постоянные  $C_1, C_2$  в формулах (1.11) и значение  $\lambda_{11}$ , характеризующее искривление первой характеристики волны разрежения. Опуская промежуточные выкладки, приведем конечный результат: первое приближение в волне разрежения описывается формулами

$$p_{21} = \Lambda_1 (c_{20} K_{20} - \varepsilon)^{-1} (c_{20}/c_{10})^{3/2} [-2\varepsilon p_{11}(\lambda_{10}) - c_{10} L_{20}(\lambda_{10}) s_{11}(\lambda_{10}) + \sqrt{c_{10} s_{11}(\lambda_{10})} \Omega_{20} \Big|_{\lambda_{10}}] \quad (2.11)$$

$$s_{21} = \Lambda_1 (c_{20}/c_{10}) s_{11}(\lambda_{10}), \quad u_{21} = K_{20} p_{21} + L_{20} s_{21}$$

а искривление первой характеристики

$$\lambda_{11} = \frac{u_{11} - K_{20} p_{11} - L_{20} s_{11}}{u_{20}' (1 - \varepsilon c_{10} K_{20})} \Big|_{\lambda = \lambda_{10}} \quad (2.12)$$

Здесь все величины с индексом 20 — функции  $\lambda$ , удовлетворяющие соотношениям для левой центрированной волны (1.5), а  $\varepsilon = -1$  так же, как в (2.9).

Решение в примыкающей к контактному разрыву области 3 описывается формулами (1.6) с тремя произвольными постоянными, определяемыми из условий «сшивки» на второй характеристике этого решения с решением (2.11)

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{20}, \quad u_{31} = u_{21} + u_{20}' \lambda_{21} \\ p_{31} &= p_{21} + p_{20}' \lambda_{21}, \quad s_{31} = s_{21} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Учитывая, что на левой характеристике  $\lambda = \lambda_{20}$  выполняется соотношение  $c_{30}u_{31} - p_{31} = 0$ , что непосредственно следует из (1.6), из (2.13) можно сразу определить величину, характеризующую в первом приближении искривление второй характеристики

$$\lambda_{21} = - \frac{\varepsilon p_{21}(\lambda_{20}) + c_{30}u_{21}(\lambda_{20})}{2u_{20}'(\lambda_{20})c_{30}}$$

Оставшиеся после этого два соотношения служат для определения трех постоянных. Следовательно, и в случае волны разрежения решение в области 3 имеет произвол в одну постоянную. После преобразований оно может быть представлено в виде (2.7) с функциями

$$\begin{aligned} U_1(\lambda) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{20}^2}{1 + \lambda^2}} \frac{u_{30} - \varepsilon a_{30} - \lambda}{u_{30} - \varepsilon a_{30} - \lambda_{20}} \frac{c_{30}u_{21}(\lambda_{20}) - \varepsilon p_{21}(\lambda_{20})}{c_{30}} \\ U_2(\lambda) &= \frac{\lambda_{20} - \lambda}{2\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad P_1(\lambda) = -\varepsilon c_{30}U_1(\lambda), \quad P_2(\lambda) = \varepsilon c_{30}U_2(\lambda) \\ S_1(\lambda) &= \frac{c_{30}}{c_{10}} \sqrt{\frac{1 + \lambda_{10}^2}{1 + \lambda^2}} \frac{u_{30} - \lambda}{u_{30} - \lambda_{20}} s_{11}(\lambda_{10}), \quad S_2(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Итак, решение в области 3, примыкающей к контактному разрыву слева, имеет вид (2.7) и (2.8), если слева от контактного разрыва распространяется ударная волна, (2.9) — если слабый разрыв, (2.14) — если волна разрежения. Это решение определено с точностью до одной произвольной постоянной. К точно такому же выводу можно прийти, если рассмотреть область, расположенную справа от контактного разрыва. Все полученные в разделе 2 формулы остаются справедливыми, если положить  $\varepsilon = 1$ .

Обозначим через  $C_l$  и  $C_r$  постоянные, определяющие решения слева и справа от контактного разрыва соответственно. Для нахождения этих постоянных воспользуемся равенством скоростей и давлений на контактной поверхности, которое в первом приближении имеет вид

$$u_{31}(-\lambda_{30}) = u_{31}(+\lambda_{30}), \quad p_{31}(-\lambda_{30}) = p_{31}(+\lambda_{30})$$

Подставляя в эти соотношения решения (2.7) в примыкающих к контактному разрыву областях, получим систему уравнений для определения  $C_l$  и  $C_r$

$$U_{1l} + C_l U_{2l} = U_{1r} + C_r U_{2r}, \quad P_{1l} + C_l P_{2l} = P_{1r} + C_r P_{2r}$$

где через  $l$  в индексе обозначены значения соответствующих функций при  $\lambda \rightarrow -\lambda_{30}$ , а через  $r$  — при  $\lambda \rightarrow +\lambda_{30}$ . Решение этой системы дает

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{[U_1]P_{2r} - [P_1]U_{2r}}{U_{2l}P_{2r} - U_{2r}P_{2l}}, \quad C_r = \frac{[U_1]P_{2l} - [P_1]U_{2l}}{U_{2l}P_{2r} - U_{2r}P_{2l}} \\ [U_1] &= U_{1r} - U_{1l}, \quad [P_1] = P_{1r} - P_{1l} \end{aligned} \quad (2.15)$$

и тем самым определяет полное решение обобщенной задачи Римана.

Искривление контактного разрыва в первом приближении определяется значением

$$\lambda_{31} = 1/2 (U_{1l} + C_l U_{2l})$$

3. Приведем вид функций  $K_0$ ,  $L_0$ ,  $\Omega_0$ , входящих в формулы (1.11) общего решения первого приближения для волны разрежения, для среды, имеющей двучленное уравнение состояния

$$e = \frac{p + \gamma p_*}{(\gamma - 1)\rho} - \frac{c_*^2}{\gamma - 1}$$

где  $p_* = \gamma^{-1}\rho_*c_*^2$ ,  $\gamma$ ,  $\rho_*$ ,  $c_*$  — некоторые постоянные величины. Идеальный газ является частным случаем ( $c_* = 0$ ).

Вводя энтропию  $s$  (точнее, некоторую ее функцию), можно представить плотность  $\rho$ , скорость звука  $a$  и удельную внутреннюю энергию  $e$  в виде функций  $s$  и давления  $p$

$$e(p, s) = \frac{p + \gamma p_*}{(\gamma - 1)s} (p + p_*)^{-1/\gamma} - \frac{c_*^2}{\gamma - 1} \quad (3.1)$$

$$\rho(p, s) = s(p + p_*)^{1/\gamma}, \quad a(p, s) = \sqrt{\gamma(p + p_*)^{1-1/\gamma}/s}$$

Формулы, определяющие решение в области центрированной волны разрежения для вещества с двучленным уравнением состояния, имеют вид

$$a(\lambda) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ \pm (u_1 - \lambda) + \frac{2}{\gamma - 1} a_1 \right] \quad (3.2)$$

$$u(\lambda) = \pm a(\lambda) + \lambda, \quad p(\lambda) = (p_1 + p_*) [a(\lambda)/a_1]^{2\gamma/(\gamma-1)} - p_*$$

где  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $a_1$  — параметры фона, по которому распространяется волна, верхний знак относится к волне, движущейся налево, нижний — направо.

Подставляя (3.1), (3.2) в (1.11), получим

$$K_0 = \pm \frac{1}{\rho a} \frac{3\gamma - 1}{\gamma + 5}, \quad L_0 = \mp \frac{2}{\gamma + 5} \frac{a}{s_1}$$

$$\Omega_0 = \pm \frac{8(\gamma + 1)}{(\gamma + 5)(3\gamma - 1)} \frac{a_1 \sqrt{\rho_1 a_1}}{s_1} \left( \frac{a}{a_1} \right)^{(3\gamma-1)/(2\gamma-2)}$$

4. Используя полученные выше соотношения, рассмотрим вопрос об изменении скорости стационарной ударной волны, движущейся по покоящемуся газу с параметрами  $\rho_{10}$ ,  $p_{10}$ , если, начиная с некоторой точки ( $x = 0$ ), плотность перед волной начинает изменяться по закону, который локально можно представить в виде

$$\rho_{10}(x) = \rho_{10} + R_{10}x + O(x^2)$$

Очевидно, это является частным случаем рассмотренной задачи, когда слева от контактного разрыва реализуется слабый разрыв, а справа — ударная волна. Постоянная  $C_r$  в (2.15), которая в данном случае определяет изменение скорости ударной волны, равна

$$C_r = -(c_{30}U_1 + P_1)/(c_{30}U_2 + P_2)$$

Подставляя в это соотношение  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  из (2.6), после преобразований получим, что ускорение, которое получает ударная волна при переходе через точку  $x = 0$ , может быть представлено в виде

$$a_{sh} = -F \frac{a_{10}^2 R_{10}}{\rho_{10}}, \quad F = \frac{M_{30}(2\gamma M_{10}^2 + 1 - \gamma) - (\gamma - 1)(M_{10}^2 - 1)}{M_{30}(2\gamma M_{10}^2 + 1 - \gamma) + 2M_{10}^2 + \gamma - 1}$$

где  $M_{10}$  — число Маха ударной волны,  $M_{30}$  — число Маха за фронтом волны. Можно убедиться, что  $F > 0$  при  $M_{10} > 1$ . Поэтому знак  $a_{sh}$  противоположен знаку  $R_{10}$ , т. е. если значение плотности перед волной возрастает, то ударная волна замедляется, и наоборот, причем модуль ускорения возрастает с ростом  $M_{10}$  как квадрат этой величины.

5. В заключение отметим следующее. Задача о распаде произвольного разрыва играет также важную роль в численных методах механики сплошной среды. В частности, ее решение используется при построении конечно-разностных схем для численного интегрирования нестационарных уравнений газовой динамики (так называемые схемы типа схемы С. К. Годунова [3]). При этом получается численная схема, имеющая первый порядок аппроксимации, что приводит к определенным погрешностям при проведении по ней численных расчетов. Полученное в данной работе аналитическое решение обобщенной задачи Римана может быть использовано для повышения порядка аппроксимации схемы С. К. Годунова, если кусочно-постоянную аппроксимацию заменить кусочно-линейной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ben-Artzi M., Falkovitz J. A second-order godunov-type scheme for compressible fluid dynamics // J. Comput. Phys. 1984. V. 55. N 1. P. 1—32.
2. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости. Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 5—42.
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию  
16.III.1990