

УДК 523.593

© 1991 г.

В. А. Батищев

НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

При больших числах Рейнольдса строятся формальные асимптотические разложения решения нелинейной задачи о волновом движении жидкости при заданных поверхностных касательных напряжениях. Вблизи свободной границы формируется нелинейный пограничный слой (ПС), для которого строится автомодельное решение. Течение вне ПС удовлетворяет уравнениям Эйлера. Свободная граница определяется из динамического краевого условия, которое учитывает касательные напряжения и поле скоростей в ПС. Численно рассчитано воздействие касательных напряжений на уединенные волны, а также на прогрессивные волны малой амплитуды.

Нелинейные ПС вблизи свободных границ при термокапиллярном течении изучались в [1—4]. Воздействие касательных напряжений на волновые движения жидкости при исчезающей вязкости в линеаризованной постановке рассмотрено в [5, 6], Асимптотические разложения решения стационарной нелинейной задачи со свободной границей построены в [7, 8].

1. Для системы уравнений Навье — Стокса при исчезающей вязкости $\nu \rightarrow 0$ рассматривается нелинейная задача о волновом движении жидкости под действием системы «бегущих» касательных напряжений $T(x - ct)$, заданных на свободной границе Γ

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ p &= 2\nu \rho \Pi n + \sigma k + p_*, \quad 2\nu \rho \Pi n - 2\nu \rho (n \Pi n) n = T(x - ct), \\ \partial G / \partial t + \mathbf{v} \nabla G &= 0, \quad (x, z) \in \Gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_z)$, $\mathbf{g} = -g e_z$, e_z — орт вертикальной оси z , g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, k — кривизна свободной границы Γ (считается, что $k > 0$, если граница Γ выпукла), σ — коэффициент поверхностного натяжения, n — единичный вектор внешней нормали к свободной границе, Π — тензор скоростей деформации, $p_* = \text{const}$ и T — заданные давление и касательное напряжение на свободной границе, c — скорость перемещения касательной нагрузки, $G(x, z, t) = 0$ — уравнение свободной границы в неявной форме. Предполагается, что жидкость заполняет горизонтальный слой D , ограниченный сверху свободной границей Γ , а снизу твердой стенкой S , на которой выполняется условие прилипания. На бесконечности задано поле скоростей. Функция $T(x - ct)$ считается интегрируемой на поверхности Γ . Начальные условия не задаются, так как решение задачи строится в виде бегущих волн вида $\mathbf{v}(x - ct)$.

Вблизи свободной границы и твердой стенки формируется ПС. В неограниченной области всюду вне ПС течение приближенно описывается уравнениями Эйлера. Ниже при $\nu \rightarrow 0$ строятся формальные асимптотические разложения решения задачи (1.1) в случае, когда характерное значение скорости U в ПС вблизи свободной границы по порядку величины сравнимо ($U \sim c$) или намного больше скорости распространения касательных напряжений.

тельных напряжений. В этом случае вблизи свободной границы возникает нелинейный ПС. Если же $U \ll c$, то уравнения ПС линеаризуются и решаются в квадратурах [8].

Задача (1.1) приводится к безразмерному виду и вводится малый параметр $\varepsilon = (\rho\nu^2 L^{-2} T_*^{-1})^{1/2}$, где L и T_* — характерные масштабы длины и касательного напряжения. Отметим, что малым ε соответствуют малые значения коэффициента вязкости. Характерное значение скорости в ПС вблизи свободной границы $U = (LT_*^2 \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/2}$ принимается за масштаб скорости. Безразмерное давление p' вводится соотношением $p = T_* p' - \rho g z$. Асимптотические разложения решения задачи (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ строятся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\sim \mathbf{h}_0 + \varepsilon^{1/2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{h}_1 + \mathbf{w}_1) + \dots \\ p' &\sim q_0 + p_0 + \varepsilon^{1/2} (p_1 + q_1 + r_1) + \dots, \quad \zeta \sim \zeta_0 + \varepsilon^{1/2} \zeta_1 + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $z = \zeta(x - ct)$ уравнение свободной границы.

Обозначим через D_Γ , D_S области ПС вблизи свободной границы и твердой стенки соответственно. Тогда \mathbf{h}_n , q_n — функции типа решений задачи ПС в D_Γ , а \mathbf{w}_1 , r_1 — в области D_S . Эти функции и их производные исчезают вне ПС. Решение задачи вне областей D_Γ , D_S определяют функции \mathbf{v}_1 , p_0 , p_1 .

Отметим, что характерный масштаб скорости U , порядки главных членов в разложениях (1.1) и порядки толщин пограничных слоев найдутся из условия равенства порядков вязких и инерционных членов в системе уравнений Навье — Стокса и в краевых условиях для касательных напряжений. В этом случае толщина пограничного слоя вблизи свободной границы имеет порядок ε .

Замечание. Асимптотические разложения решения задачи (1.1) в линейной постановке построены в [5]. Как в нелинейной задаче, так и в линеаризованной [5, 6] в случае конечных касательных напряжений скорость жидкости в ПС вблизи свободной границы на порядок больше, чем скорость внешнего течения (разложения (1.2)). Учет нелинейности изменяет толщину пс δ_n : в линейной задаче $\delta_n \sim \nu^{1/2}$, а в нелинейной $\delta_n \sim \nu^{2/3}$.

2. Краевая задача для главных членов асимптотики (1.2), определяющих течение в ПС вблизи свободной границы, получается применением к системе (1.1) второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [9].

Введем новую систему координат $x_1 = x - ct$, $z_1 = z$, перемещающуюся вдоль оси x со скоростью c вместе с системой касательных напряжений. Вблизи свободной поверхности в подвижных координатах введем локальные ортогональные координаты ξ , φ [8], где ξ — расстояние точки $N(x_1, z_1)$ до поверхности Γ , а φ — криволинейная координата на поверхности Γ основания нормали, опущенной из точки N . Предполагается, что отрезки нормалей к поверхности Γ при достаточно малых ξ не пересекаются.

Пусть $h_{\varphi n}$, $h_{\xi n}$ — компоненты вектора \mathbf{h}_n в локальных координатах. Определим поле скоростей, не зависящее от t , в подвижной системе координат $\mathbf{h}_n(\varphi, \xi)$. Подставляем (1.2) в (1.1), разлагаем \mathbf{v}_1 , p_0 , p_1 в ряды Тейлора по степеням ξ и полагаем $\xi = \varepsilon s$. Приравнявая нулю коэффициенты при ε^{-1} , ε^0 , находим, что $h_{\xi 0} = 0$, а для $h_{\varphi 0}$, $h_{\xi 2}$ выводим краевую задачу, считая координату φ длиной дуги вдоль свободной границы

$$(h_{\varphi 0} + V) \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + H_{\xi 2} \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = \frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_{\xi 2}}{\partial s} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s} = -T(\varphi), \quad H_{\xi 2} = 0 \quad (s = 0)$$

$$h_{\varphi 0} = 0 (s = \infty); \quad H_{\xi 2} = h_{\xi 2} + v_2 n |_{\Gamma}, \quad V = c/U$$

Вектор-функция h_1 удовлетворяет линейной краевой задаче, которая здесь не приводится.

Отметим, что краевая задача (2.1) при $V = 0$ была поставлена [1, 2] для ПС Марангони при исследовании термокапиллярного эффекта вблизи свободной границы. Найдены [3] условия разрешимости задачи (2.1) на конечном отрезке при заданном профиле скорости в начальном сечении в D_{Γ} .

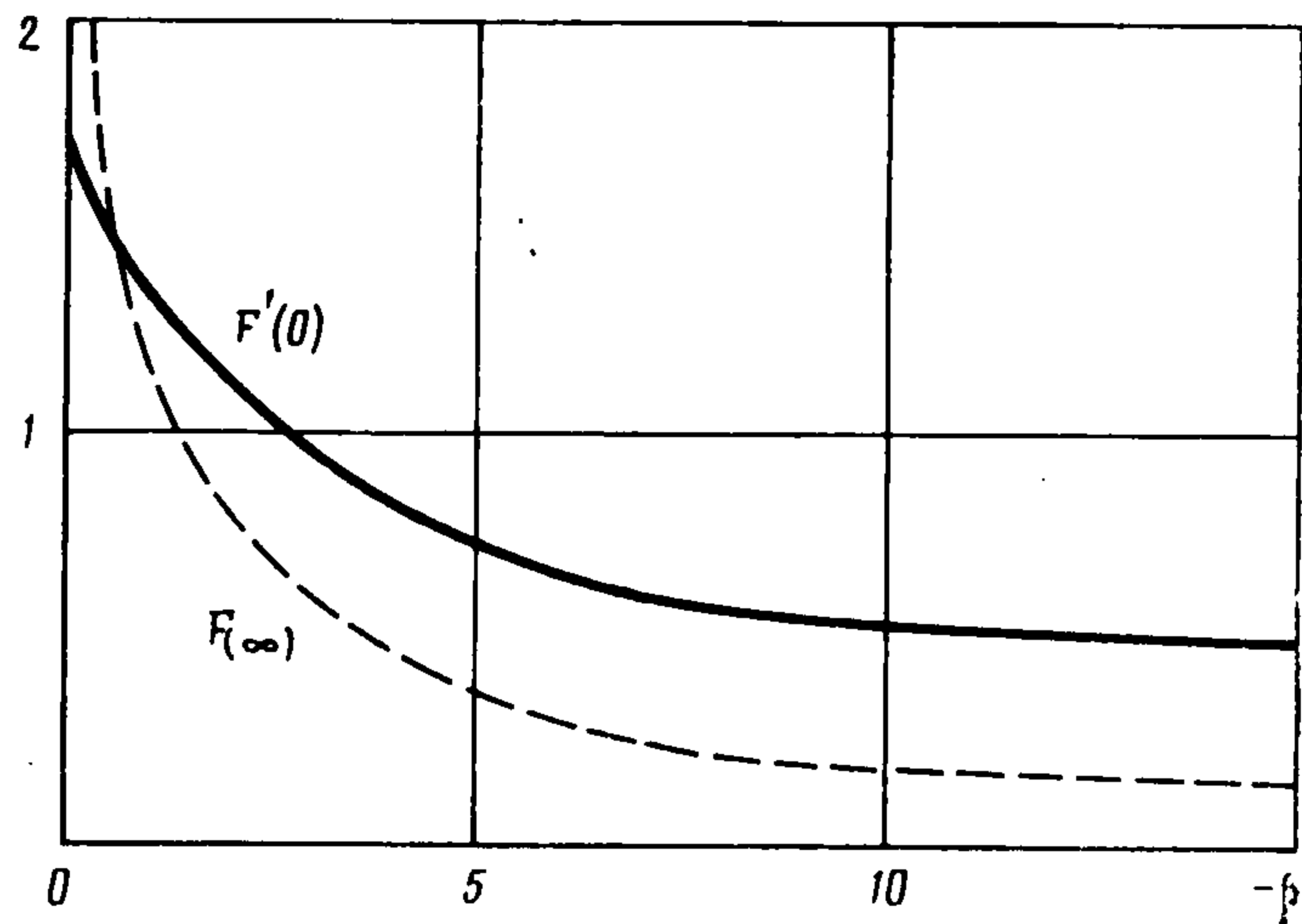
Приведем автомодельное решение задачи (2.1) при $T = \tau/\sqrt{\varphi}$. Отметим, что при $V = 0$ автомодельные решения найдены в [1, 2] в окрестности критической точки.

Введем функцию тока ψ соотношениями $h_{\varphi 0} = \partial\psi/\partial s$, $H_{\xi 2} = -\partial\psi/\partial\varphi$ и полагаем $\psi = \sqrt{\varphi\tau^{1/2}}F(\eta)$, где $\eta = s\tau^{-1/2}/\sqrt{\varphi}$. Для функции $F(\eta)$ получаем краевую задачу (начальный профиль задавать не надо, так как он определяется условием автомодельности)

$$2F'''' + FF'' - \beta\eta F'' = 0, \quad \beta = V\tau^{-1/2}$$

$$F''(0) = -1, \quad F(0) = F'(\infty) = 0 \quad (2.2)$$

Решение задачи (2.2) построено численно методом Рунге — Кутты для разных $\beta < 0$. На фиг. 1 сплошной линией изображен график функции $F'(0)$ (скорость жидкости на свободной границе), а штриховой — график $F(\infty)$ в зависимости от параметра $|\beta|$. С ростом $|\beta|$ величина $F'(0)$ монотонно убывает от значения 1,7188 при $\beta = 0$, до нуля при $|\beta| \rightarrow \infty$. При $|\beta| \gg 1$ асимптотика решения задачи (2.2) имеет вид $F'(\eta) = \sqrt{\pi/|\beta|} \operatorname{erfc}(\frac{1}{2}\eta\sqrt{|\beta|})$. Отметим, что при всех $|\beta| \geq 10$ асимптотические значения $F'(0)$ отличаются от численных менее чем на 2%.



Фиг. 1

Для фиксированного β с ростом η функция $F'(\eta)$ монотонно убывает, а $F(\eta)$ монотонно возрастает и стремится к конечному пределу. При $\beta = -1$ приведем численные значения $F'(0) = 1,3115$ и $F(\infty) = 1,1410$. Толщина ПС монотонно убывает с ростом $|\beta|$.

При $\beta > 0$ автомодельное решение строится в виде $\psi = \sqrt{\varphi\tau^{1/2}}F_1$ с условием на бесконечности $F_1'(\infty) = 0$. Функция $F_1(\eta)$ получается по формуле $F_1 = F + \alpha\eta$, где $\alpha \geq \beta$, а $F(\eta)$ удовлетворяет задаче (2.2), в которой β следует заменить на $-|\beta|$.

Теперь определим главный член в асимптотическом разложении (1.3) для давления в ПС q_0 . Применяя второй итерационный процесс [9] к системе (1.1), спроектированной на нормаль к свободной границе, выводим уравнение для q_0 , из которого следует

$$q_0 = -k \int_s^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds \quad (2.3)$$

Найдем значение q_0 на свободной границе. Интегрируя первое уравнение в (2.1) по s на полуоси $[0, \infty)$, применяя интегрирование по частям и интегрируя полученное соотношение по φ , выводим соотношение

$$\int_0^{\infty} h_{\varphi 0}^2 ds - V \int_0^{\infty} h_{\varphi 0} ds = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi + \int_0^{\infty} f_0 (f_0 - V) ds \quad (2.4)$$

Здесь $f_0 = h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$ — профиль скорости в ПС в сечении $\varphi = \varphi_0$. Полагая $s = 0$ в (2.3) и учитывая (2.4), находим значение q_0 на свободной границе

$$q_0|_{\Gamma} = k \left[\int_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi + V \int_0^{\infty} h_{\varphi 0} ds + \int_0^{\infty} f_0 (f_0 - V) ds \right] \quad (2.5)$$

Отметим, что при $V = 0$ значение $q_0|_{\Gamma}$ можно определить без решения задачи для ПС (2.1), если известен профиль скорости в ПС в некотором сечении $\varphi = \varphi_0$ (например, в окрестности критической точки [7]).

Функции v_1, p_0, ξ_0 , определяющие невязкое течение вне ПС и асимптотическую форму свободной границы, получаются применением первого итерационного процесса [9] к системе (1.1).

Обозначим через Γ_0 свободную границу $z = \xi_0$ невязкого течения. Вблизи поверхности Γ_0 введем локальные ортогональные координаты ξ_1, φ_1 , где ξ_1 — расстояние до границы Γ_0 . Кривизну кривой Γ представим в виде $k = k_0 + \varepsilon^{1/2} k_1 + \dots$, где k_0 кривизна кривой Γ_0 . Подставляя разложения (1.2) в систему (1.1), учитывая, что $h_0 = h_1 = w_1 = q_0 = q_1 = 0$ вне ПС, и, приравнявая нулю коэффициенты при $\varepsilon^0, \varepsilon$, получаем краевую задачу для v_1, p_0, ξ_0 , которую приведем в размерном виде

$$\partial v_1 / \partial t_1 + (v_1, \nabla) v_1 = -\rho^{-1} \nabla p_0, \quad \text{div } v_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$p_0 = \rho g z - k_0 \left[\sigma + \int_{\varphi_0}^{\varphi} T d\varphi + c \int_0^{\infty} h_{\varphi 0} ds + \int_0^{\infty} f_0 (f_0 - c) ds \right], \quad (x, z) \in \Gamma_0$$

$$\partial \xi_0 / \partial t + v_{x_1} \partial \xi_0 / \partial x_1 = v_{z_1}, \quad (x, z) \in \Gamma_0; \quad v_1 n_1 |_S = 0$$

Здесь учтено, что $h_{z_1} = 0$; n_1 — нормаль к твердой границе S .

Таким образом, действие касательных напряжений на свободной границе маловязкой жидкости приводит к появлению в динамическом краевом условии на свободной границе соответствующего течения идеальной жидкости (2.6) дополнительных членов, зависящих от кривизны границы, поля скоростей в ПС и касательной нагрузки.

Вектор-функция w_1 определяет поле скоростей в ПС вблизи твердой стенки S и компенсирует невязку, возникающую при выполнении вектором v_1 условия прилипания на S . Краевая задача для w_1, r_1 не приводится, так как эти функции дают вклад в возвышение свободной границы в высших приближениях начиная со второго.

3. Рассмотрим задачу о влиянии поверхностных касательных напряжений на длинные волны, распространяющиеся со скоростью c в слое толщиной H . Предполагая течение идеальной жидкости, удовлетворяющее системе (2.6), безвихревым, определим потенциал скоростей Φ соотношением $v_1 = \nabla \Phi$.

Введем параметр $\delta = H/L$, где L — характерный горизонтальный масштаб течения (например, длина волны), тогда для длинных волн $\delta \ll \ll 1$. Условие малости толщины ПС по сравнению с безразмерной толщиной слоя δ приводит к соотношению $\rho v^2 L H^{-3} T_*^{-1} \ll 1$. В системе (2.6) переходим к безразмерным переменным $t' = \delta t \sqrt{g/H}$, $z' = z/H$, $x' =$

$= \delta x / H$, $\Phi' = \delta H \sqrt{gH} \Phi$, вводим подвижные координаты $x_1 = x' - t'$, $z_1 = z'$ и медленное время $t_1 = \delta^2 t'$. Касательное напряжение представим в виде $T = \delta T_1$.

Уравнения длинных волн получаются методом [10], основанным на разложении решения в ряд по степеням малого параметра

$$\Phi = \Phi_0 + \delta^2 \Phi_1 + \dots, \quad \xi_0 = 1 + \delta^2 \xi_{01} + \dots$$

Функция $u = \xi_{01}$, определяющая главную поправку к возвышению свободной границы, удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{1}{3} - \sigma_0 - \int_0^{x_1} T_1 dx_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - V \int_0^\infty h_{\varphi 0} ds + \int_0^\infty f_0 (V - f_0) ds \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma T_*^{-1} L^{-1}$ — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, $f_0(s)$ — продольная компонента скорости в пограничном слое в сечении $x_1 = 0$. Уравнение (3.1) обобщает уравнение Кортвега де Вриза теории длинных нелинейных волн [10] на случай действия поверхностных касательных напряжений.

Представим скорость распространения волн в виде ряда: $c/\sqrt{gH} = 1 + \delta^2 c_1 + \dots$. Отметим, что при $T_1 = 0$ среди решений уравнения (3.1) содержатся уединенные волны, движущиеся со сверхкритической скоростью при $c_1 > 0$, и периодические волны для $c_1 < 0$ [10].

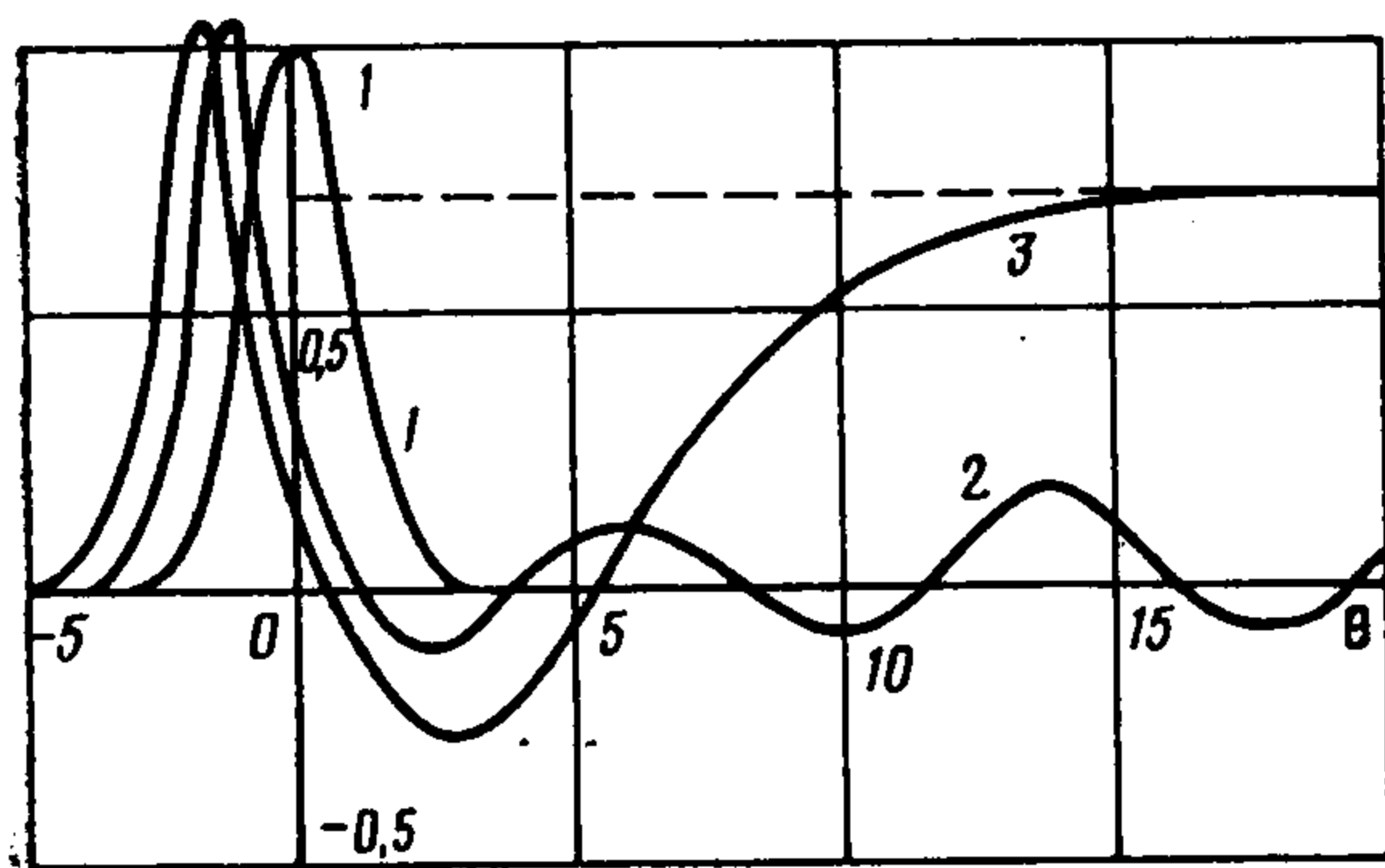
Определим решения типа бегущей волны $u(x - c_1 t)$ для несимметричной касательной нагрузки $T_1 = 2\lambda \exp[-(\theta - 1)^2/3]$ при $\theta = x_1 - c_1 t$ в случае $V \ll 1$. Можно показать, что $f_0 = h_{\varphi 0}|_{\theta=0} = 0$ в уравнении (3.1). Для этого вблизи $\theta = 0$, аппроксимируя нагрузку линейной функцией, находим решение уравнений пс (2.1), где $h_{\varphi 0} = a^2 \theta \exp(-as)$, $a = [2\lambda \exp(-1)/3]^{1/2}$.

Теперь, пренебрегая в (3.1) поверхностным натяжением и полагая $V = 0$, выводим уравнение

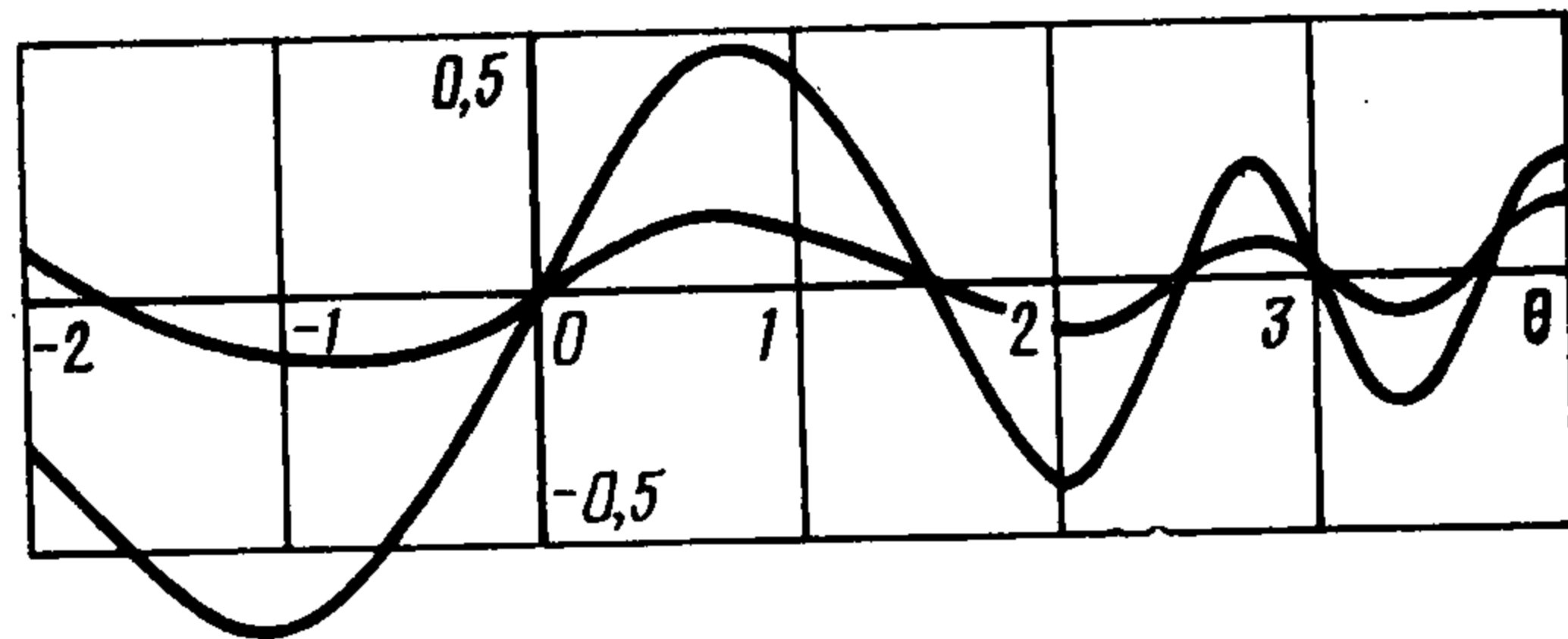
$$\left(1 - 3 \int_0^\theta T_1 d\theta \right) u'' + 4,5u^2 - 6c_1 u = 0 \quad (3.2)$$

На фиг. 2 изображена свободная граница, полученная в результате численного решения уравнения (3.2) для разных значений амплитуды λ при $c_1 = 0,5$. При $\lambda = 0$ уравнение (3.2) описывает солитон (кривая 1) [10]. Для значений λ из интервала $0 \leq \lambda \leq \lambda_1 = 0,2751$ «горб» солитона смещается влево. При $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 = 3,624$ с правой стороны горба появляются волны, амплитуды которых увеличиваются с ростом λ (типичная форма волны изображена кривой 2). При $\lambda = \lambda_2$ получена волна типа «бор» (кривая 3), для которой $u \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow 2/3$ при $\theta \rightarrow \infty$. Для значений $\lambda > \lambda_2$ ограниченных численных решений не найдено. На фиг. 3 изображены результаты численных расчетов формы волны, движущейся с докритической скоростью при $c_1 = -0,5$ и $\lambda = 0,25$. Касательная нагрузка приводит к уменьшению амплитуды волны и ее длины. Этот эффект тем значительнее, чем больше амплитуда нагрузки.

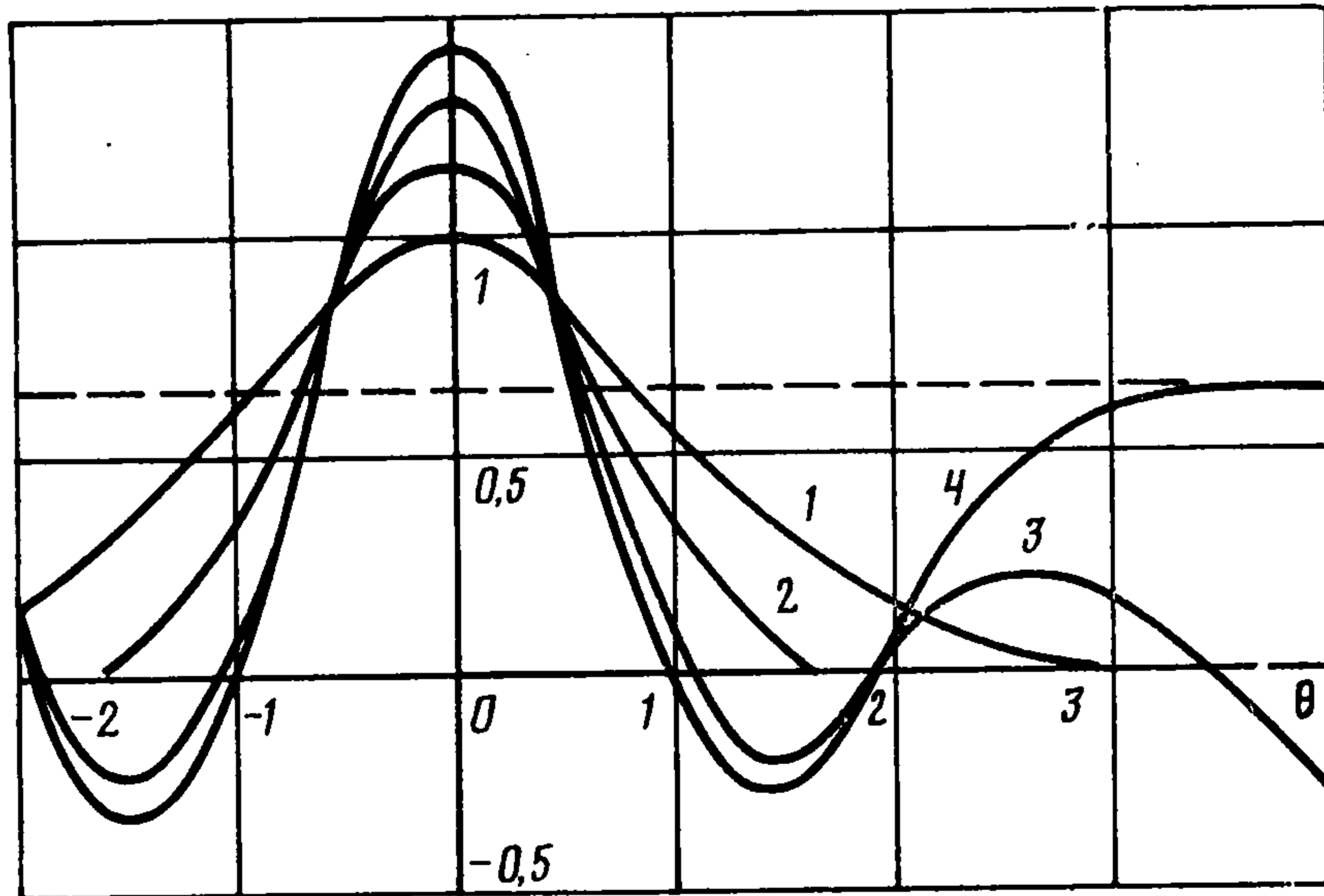
Численные расчеты проведены также при воздействии на свободную границу симметричной касательной нагрузки $T_1 = 2/3 \lambda \exp(-\theta^2)$ для $c_1 = 0,5$. В этом случае при $0 \leq \lambda \leq 1$ получено семейство солитонов, у которых высота горба увеличивается с ростом λ и достигает значения 1,184 при $\lambda = 1$. В интервале $1 \leq \lambda \leq \lambda_* =$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$= 1,667$ с обеих сторон горба появляются волны, при этом длины и амплитуды волн увеличиваются с ростом λ . При $\lambda = \lambda_*$ решение представляет собой солитон, у которого $u(0) = 1,50$ и $u(\pm\infty) = 2/3$. При $\lambda > \lambda_*$ численных решений не обнаружено. Типичные графики формы волны изображены на фиг. 4. Кривые 1—4 соответствуют значениям λ , равным 0; 1; 1,2 и λ_* .

Решения типа бегущей волны численно изучались для уравнения (3.1) при $V = -1$ и $T_1 = \lambda \sqrt{\theta}/\theta > 0$, $T_1 = 0$ ($\theta < 0$). В этом случае скорость в ПС $h_{\varphi 0} = 0$ ($\theta < 0$), $h_{\varphi 0} = F'(\eta)$ ($\theta > 0$), где функция $F(\eta)$ определена из краевой задачи (2.2). При $\lambda > 0$ получены уединенные волны, у которых горб смещен вправо от линии $\theta = 0$, а высота горба незначительно превышает единицу.

4. Исследуем влияние касательных напряжений на распространение прогрессивных капиллярно-гравитационных волн малой амплитуды. Предположим, что по поверхности потока, движущегося со скоростью w , перемещается система касательных напряжений $T(x - ct)$. Считая течение невязкой жидкости медленным и потенциальным, для функции тока $\psi(\varphi, z)$ ($\varphi = x - ct$) путем линеаризации системы (2.6) получаем краевую задачу, определяющую бегущие волны]

$$\Delta\psi = 0$$

$$(c - w)^2 \frac{\partial\psi}{\partial z} - g\psi = -\rho^{-1}f(\varphi) \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (z = 0) \quad (4.1)$$

$$\partial\psi/\partial\varphi = 0 \quad (z = -H)$$

$$f(\varphi) = \sigma + \int_0^\varphi T d\varphi + c \int_0^\infty h_{\varphi 0} ds + \int_0^\infty f_0(f_0 - c) ds$$

Предположим, что касательные напряжения заданы локально дельта — функцией $T = \tau\delta(\varphi)$, где $\tau \geq 0$, а характерная скорость в ПС существенно больше скорости c ($U \gg c$), тогда с точностью до малых высшего порядка

$$f(\varphi) = \sigma + \tau \quad (\varphi > 0), \quad f(\varphi) = \sigma \quad (\varphi < 0)$$

Решение задачи (4.1) получается в виде

$$\psi_i = A_i \operatorname{sh} \Omega_i (z + H) \sin \Omega_i \varphi$$

где $i = 1$ при $\varphi > 0$ и $i = 2$ при $\varphi < 0$. Волновое число Ω_1 удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$F_1(\Omega_1) \equiv (\tau + \sigma) \Omega_1^2 \operatorname{th} \Omega_1 H - \rho \Omega_1 (w - c)^2 + \rho g \operatorname{th} \Omega_1 H = 0$$

Параметр Ω_2 — решение этого уравнения при $\tau = 0$. Исследование корней дисперсионного уравнения показывает, что при $(w - c)^2 < gH$ существуют два решения, соответствующие гравитационным и капиллярным волнам. Эти решения ограничены при $\tau < \tau_*$ и становятся неограниченными при $\tau \geq \tau_*$. Значение τ_* определено численно из уравнения, полученного при исключении Ω_1 из системы $F_1 = 0$, $\partial F_1 / \partial \Omega_1 = 0$. Отметим, что $\tau_* = 0$ при $w = c$, а с ростом параметра $\gamma = (w - c)^2 / (gH)$ значение τ_* монотонно возрастает и при $\gamma = 1$ достигает максимального значения, равного $\tau_m = 1/3 \rho g H^3 - \sigma_0$.

Анализ амплитуд $A_i(\tau, \sigma, g, w - c, H)$ показывает, что касательные напряжения гасят гравитационные и усиливают капиллярные волны. При $(w - c)^2 = gH$, $\tau < \tau_m$ существуют только капиллярные волны, амплитуды которых при $\tau \geq \tau_m$ становятся неограниченными. Если же $(w - c)^2 > gH$, то при любых $\tau > 0$ существуют только капиллярные волны, у которых с ростом τ увеличиваются амплитуды и длины волн.

Для слоя бесконечной глубины гравитационные и капиллярные волны существуют только при $\tau < \tau_0 = -\sigma + 1/4 \rho (w - c)^4 g^{-1}$. При достижении касательной нагрузки критического значения τ_0 волны разрушаются (их амплитуды становятся неограниченными при $\varphi \rightarrow \infty$).

Пусть на свободной границе заданы касательные напряжения вида $T = \lambda f(\varphi)$ ($\varphi > 0$), $T = 0$ ($\varphi < 0$), где $f(\varphi)$ — интегрируемая на полуоси функция. Можно показать, что критическое значение касательной нагрузки, при котором амплитуды волн становятся неограниченными, не превосходит значения

$$\lambda_* = [1/4 \rho (w - c)^4 g^{-1} - \sigma] / \int_0^{\infty} f(\varphi) d\varphi$$

Так же как и в слое конечной глубины, действие касательных напряжений приводит к гашению гравитационных и усилению капиллярных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. 3rd Europ. Sympos. Material Science in Space. Grenoble (ESA); 1979. P. 313—345. SP — 142.
2. *Napolitano L. G., Golia C.* Coupled Marangoni boundary layers // Applications of Space developments // Selection Paper 31. Intern. Astronaut Congress. Tokyo, 1980 // Acta Astronautica. 1981. V. 8. № 5—6. P. 417—434.
3. *Кузнецов В. В.* О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1984. Вып. 67. С. 61—69.
4. *Pucknachov V. V.* Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers. Dublin: Bool Press, 1982. P. 97—110.
5. *Потетюк Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 891—910.
6. *Миропольский Ю. З.* О генерации внутренних волн в океане полем ветра // Океанология. 1975. Т. 10. № 3. С. 389—396.
7. *Батищев В. А.* Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 425—432.
8. *Батищев В. А.* Асимптотика осесимметричных течений жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости // ПМТФ. 1975. № 3. С. 101—109.
9. *Вишик М. А., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3—102.
10. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 318 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
5.X.1989