**Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991**

УДК 62—50



**Х. Г. Гусейнов, В. Н. Ушаков**

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК И СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ

На основе применения конструкций левых производных многозначного отображения, аналогичных представленным ранее [1, 2], получены необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять интегральная воронка дифференциального включения (ДВ). В терминах конструкций, развитых при исследовании функции цены дифференциальной игры (см., например, [3, 4]) и обобщенных (вязких в смысле [5, 6]) решений уравнения Гамильтона—Якоби, дано описание интегральной воронки при помощи вязких решений уравнения Беллмана. Исследуются свойства стабильных мостов [7] на базе применения конструкций левых производных. Приводятся необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять стабильные мосты [1].

Исследованию свойств интегральных воронок ДВ и стабильных мостов посвящены работы многих авторов (см., например, работы [7—21] и библиографию в них). Интегральные воронки в рамках так называемых $R$-решений относительно правой части ДВ изучались в [11, 12]. Дифференциальные (инфинитезимальные) соотношения, характеризующие границу интегральной воронки, получены в [13, 14]. Дано [15] описание интегральной воронки при помощи скалярной функции, которая при некоторых предположениях является решением уравнения Беллмана. С использованием понятия производных многозначного отображения приведены соотношения [2, 16, 20], характеризующие $u$-стабильные мосты и сильно и слабо инвариантные множества относительно ДВ.

1. Пусть задана система, поведение которой описывается ДВ

$$x^{\cdot}(t) \in F(t, x(t)), \quad x \in R^n, \quad t \in [0, \vartheta] = T \tag{1.1}$$

Решением ДВ (1.1) называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, почти всюду удовлетворяющая ДВ (1.1) (см., например, [21]).

Совокупность решений ДВ (1.1), удовлетворяющих начальному условию $x(t_*) \in X(t_*)$, обозначим символом $X_-(t_*, X_*)$, а интегральную воронку ДВ (1.1) с начальным множеством $(t_*, X_*)$ — символом $H_+(t_*, X_*)$. По определению

$$H_+(t_*, X_*) = \{(t, x(t)) : t \in [t_*, \vartheta],\ x(\cdot) \in X_+(t_*, X_*)\}$$

В ДВ (1.1) произведем замену переменных, полагая $\tau = \vartheta - t$, $y(\tau) = x(\vartheta - \tau)$, где $t \in [0, \vartheta]$.

При такой замене ДВ (1.1) переходит в ДВ

$$dy(\tau)/d\tau \in -F(\tau, y(\tau)), \quad \tau \in [0, \vartheta] \tag{1.2}$$

Совокупность решений ДВ (1.2), удовлетворяющих начальному условию $y(\tau_*) \in Y_*$, обозначим символом $X_-(\tau_*, Y_*)$, а интегральную воронку ДВ (1.2) с начальным множеством $(\tau_*, Y_*)$ — символом $H_-(\tau_*, Y_*)$ так что

$$H_-(\tau_*, Y_*) = \{(\tau, y(\tau)) : \tau \in [\tau_*, \vartheta],\ y(\cdot) \in X_-(\tau_*, Y_*)\}$$

---

[1] Подробные доказательства сформулированных ниже утверждений даны в работе: *Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н.* Инфинитезимальные свойства интегральных воронок и стабильных мостов. Баку, 1988. 32 с.— Деп. в ВИНИТИ. 6.05.88, № 3571-В88.

Укажем необходимые и достаточные условия, при которых заданное множество $W \subset T \times R^n$ совпадает с интегральной воронкой ДВ (1.1), обладающей начальным множеством $(0, X_0)$.

В связи с этим приведем определения сильной и слабой инвариантности множества относительно ДВ (см., например, [2]).

Для множества $W \subset T \times R^n$ полагаем

$$W(t) = \{x \in R^n: (t, x) \in W\}, \quad W^*(\tau) = W(\vartheta - \tau) \tag{1.3}$$
$$W^* = \{(\tau, y) \in [0, \vartheta] \times R^n: y \in W^*(\tau)\}$$

*Определение* 1.1. Множество $W^* \subset T \times R^n$ называется слабо инвариантным относительно ДВ (1.2), если для любой точки $(\tau_*, y_*) \in W^*$ существует решение $y(\cdot) \in X_-(\tau_*, y_*)$, такое, что $y(\tau) \in W^*(\tau)$ при всех $\tau \in [\tau_*, \vartheta]$.

*Определение* 1.2. Множество $W \subset T \times R^n$ называется сильно инвариантным относительно ДВ (1.1), если для любых точки $(t_*, x_*) \in W$ и решения $x(\cdot) \in X_+(t_*, X_*)$ выполняется условие $x(t) \in W(t)$ при всех $t \in [t_*, \vartheta]$.

Предполагаем, что $H_+(0, X_0) \cap \{(t, x): x \in R^n\} \neq \varnothing$ при любом $t \in [0, \vartheta]$.

*Теорема* 1.1. Для того чтобы множество $W \subset T \times R^n$ было интегральной воронкой ДВ (1.1) с начальным множеством $(0, X_0)$ $(X_0 \subset R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(0) = X_0$, а множества $W$ и $W^*$ были соответственно сильно инвариантны относительно ДВ (1.1) и слабо инвариантны относительно ДВ (1.2).

**2.** Приведем определения производных многозначного отображения (см., например, [2, 17]).

Для замкнутого множества $W \subset T \times R^n$ и точки $(t, x) \in T \times R^n$ полагаем

$$D_+W(t, x) = \{d \in R^n: \exists (t_k, x_k) \in W, \ t_k > t$$
$$k = 1, 2, \ldots, \lim_{t_k \to t+0} (x_k - x)/(t_k - t) = d\}$$

Аналогично определяется $D_-W(t, x)$ с тем лишь отличием, что $t_k < t$ и предел вычисляется при $t_k \to t - 0$.

Множество $D_+W(t, x)$ $(D_-W(t, x))$ называется соответственно верхним правым (левым) производным множеством многозначного отображения $t \mapsto W(t)$, вычисленным в точке $(t, x)$.

Отметим, что такие определения производной многозначного отображения тесно связаны с понятием верхнего конуса касательных направлении (см., например, [1]). Можно установить, что верхний конус $T_W^B(t, x)$ связан с производными множествами равенствами

$$D_\pm W(t, x) = \{d \in R^n: (\pm 1, \pm d) \in T_W^B(t, x)\}$$

Приведем одно простое свойство производных множеств.

*Утверждение* 2.1. Пусть $W \subset T \times R^n$ — замкнутое множество, а многозначные отображения $t \to W(t)$, $\tau \mapsto W^*(\tau)$ определены соответственно соотношениями (1.3).

Тогда для любых $(t, x) \in T \times R^n$

$$D_\pm W(t, x) = -D_\mp W^*(\vartheta - t, x)$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, что правая часть ДВ (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

А) $F(t, x)$ — выпуклый компакт при всех $(t, x) \in T \times R^n$;

Б) многозначное отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ непрерывно по $(t, x)$ и локально-липшицево по $x$, т. е.

$$\alpha(F(\tau, y), F(t, x)) \to 0 \text{ при } (\tau, y) \to (t, x)$$

$$\alpha(F(t, x_1), F(t, x_2)) \leqslant \lambda(G) \| x_1 - x_2 \|$$

В) $\max \| f \| \leqslant c(1 + \| x \|)$ при $f \in F(t, x)$, $c = \text{const}$

В условии Б) $\alpha(\cdot, \cdot)$ — хаусдорфово расстояние, $G \subset T \times R^n$ — любая ограниченная замкнутая область, $(t, x_i) \in G$, $i = 1, 2$.

Введем обозначения

$$\Pi_-(t, x, s) = \{y \in R^n\colon \langle s, y\rangle \leqslant \xi\}, \quad \Pi_+(t, x, s) = \{y \in R^n\colon \langle s, y\rangle \geqslant \xi\}$$

$$\rho_{\mp}(t, x, s) = \begin{Bmatrix}\inf \\ \sup\end{Bmatrix} \langle s, d\rangle, \quad d \in D_{\pm}W(t, x)$$

$$\xi = \xi(t, x, s) = \min \langle s, f\rangle, \ f \in F(t, x)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение).

*Теорема* 2.1. Пусть $W \subset T \times R^n$, $X_0 \subset R^n$ — замкнутые множества. Для того чтобы $W$ было интегральной воронкой ДВ (1.1) с начальным множеством $(0, X_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(0) = X_0$ и выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:

а) $F(t, x) \subset D_+W(t, x)$, $F(t, x) \cap D_-W(t, x) \neq \varnothing$

б) $F(t, x) \subset \operatorname{co} D_+W(t, x)$, $F(t, x) \cap \operatorname{co} D_-W(t, x) \neq \varnothing$

в) $\operatorname{co} D_+W(t, x) \cap \Pi_-(t, x, s) \neq \varnothing$, $\operatorname{co} D_-W(t, x) \cap \Pi_+(t, x, s) \neq \varnothing$

г) $\rho_-(t, x, s) \leqslant \xi$, $\rho_+(t, x, s) \geqslant \xi$

Здесь $(t, x) \in \partial W$, $s \in R^n$, $\operatorname{co}\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$, $\partial W$ — граница множества $W$.

Рассмотрим случай, когда

$$W = \{(t, x) \in T \times R^n\colon g(t, x) \leqslant 0\} \tag{2.1}$$

где предполагаем, что функция $g(\cdot)\colon T \times R^n \mapsto R^1$ непрерывна по $(t, x)$, локально-липшицева по $x$.

Введем обозначения

$$\begin{Bmatrix} A(t, x) \\ B(t, x)\end{Bmatrix} = \left\{d \in R^n : \frac{\partial^- g(t, x)}{\partial(\pm 1, \pm d)} \leqslant 0\right\}$$

$$\begin{Bmatrix} A^-(t, x) \\ B^-(t, x)\end{Bmatrix} = \left\{d \in R^n : \frac{\partial^- g(t, x)}{\partial(\pm 1, \pm d)} < 0\right\}$$

$$\frac{\partial^- g(t, x)}{\partial(\alpha, a)} = \liminf_{\delta \to +0} [g(t + \delta\alpha, x + \delta a) - g(t, x)]\, \delta^{-1}$$

*Определение* 2.1. Множество $W \subset T \times R^n$ вида (1.6) называется регулярным, если

$$\operatorname{cl} A^-(t, x) = A(t, x), \ \operatorname{cl} B^-(t, x) = B(t, x), \ \forall (t, x) \in \partial W$$

где $\operatorname{cl}\{\cdot\}$ — замыкание множества $\{\cdot\}$.

Если множество $W$ регулярно, то $D_+W(t, x) = A(t, x)$, $D_-W(t, x) = B(t, x)$ (см. [17]), и тогда из теоремы 2.1 следует

*Теорема* 2.2. Пусть $X_0$ — замкнутое множество в $R^n$. Для того чтобы регулярное множество $W \subset T \times R^n$, определенное соотношением (2.1), было интегральной воронкой ДВ (1.1) с начальным множеством $(O, X_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(0) = X_0$ и выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:

а) $$\max_{f \in F(t, x)} \frac{\partial^- g(t, x)}{\partial(1, f)} \leqslant 0, \quad \min_{f \in F(t, x)} \frac{\partial^- g(t, x)}{\partial(-1, -f)} \leqslant 0$$

б) $$\inf_{d \in A(t, x)} \langle s, d\rangle \leqslant \xi(t, x, l) \leqslant \sup_{d \in B(t, x)} \langle s, d\rangle$$

Здесь $(t, x) \in \partial W$, $s \in R^n$.

Отметим, что необходимые и достаточные условия интегральной воронки выписываются и в более общем случае множеств с кусочно-гладкой границей.

Покажем связь интегральной воронки с вязким решением уравнения Беллмана.

Пусть множество $X_0 \subset R^n$ описывается соотношением

$$X_0 = \{x \in R^n\colon \alpha(x) \leqslant 0\} \tag{2.2}$$

Предполагается, что функция $\alpha(\cdot)\colon R^n \mapsto R^1$ локально-липшицева. Если $X_0$ — замкнутое множество, то, в частности, его можно определить следующим образом:

$$X_0 = \{x \in R^n\colon r(x) \leqslant 0\}, \quad r(x) = \operatorname{dist}(x, X_0)$$

Рассмотрим задачу

$$y^{\cdot}(\tau) \in -F(\vartheta - \tau, y(\tau)), \quad y(\tau_0) = y_0$$

$$\gamma(y(\cdot)) = \alpha(y(\vartheta)) \mapsto \min \text{ при } y(\cdot) \in X_-(\tau_0, y_0)$$

Обозначим $c(\tau_0, y(\tau_0)) = \min \alpha(y(\vartheta))$ при $y(\cdot) \in X_-(\tau_0, y_0)$. Известно [2], что функция $c(\cdot)\colon T \times R^n \mapsto R^1$ локально-липшицева и является вязким решением уравнения Беллмана

$$\partial c(\tau, y)/\partial \tau + \psi(\tau, y, \partial c(\tau, y)/\partial y) = 0$$

с краевым условием $c(\vartheta, y) = \alpha(y)$; здесь $\psi(\tau, y, z) = \min \langle z, f\rangle$ при $f \in -F(\vartheta - \tau, y)$.

Можно установить, что множество

$$V = \{(t, y) \in [0, \vartheta] \times R^n\colon c(\vartheta - t, y) \leqslant 0\} \tag{2.3}$$

совпадает с интегральной воронкой ДВ (1.1), имеющей начальное множество $(0, X_0)$, где $X_0$ определяется соотношением (2.2).

*Теорема* 2.3. Пусть множество $X_0$ определено соотношением (2.2). Тогда $H_+(0, X_0) = V$, где множество $V$ определено соотношением (2.3).

**3.** Рассмотрим вопросы описания при помощи инфинитезимальных конструкций стабильных мостов в дифференциальной игре сближения.

Пусть поведение конфликтно-управляемой системы на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ $(\vartheta > t_0)$ описывается дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \; x(t_0) = x_0, \; u \in P \subset R^p, \; v \in Q \subset R^q \tag{3.1}$$

Здесь $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, $u$ — вектор управляющих воздействий, $v$ — вектор помех, $P$ и $Q$ — компакты.

Предполагаем, что функция $f(t, x, u, v)$ стеснена стандартными в дифференциальных играх ограничениями (см., например, [7]).

Предполагаем также, что все рассматриваемые ниже позиции $(t, x)$ содержатся в некоторой компактной области $D \subset [t_0, \vartheta] \times R^n$ и для любых $(t_*, x_*)$, $(t^*, x^*)$ из $D$ выполняется неравенство

$$\alpha(F_v(t^*, x^*), F_v(t_*, x_*)) \leqslant \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|)$$

$$F_v(t, x) = \operatorname{co}\{f(t, x, u, v)\colon u \in P\}$$

Здесь $\omega^*(\delta)$ — некоторая функция, монотонно убывающая к нулю при $\delta \to +0$, не зависящая от выбора $(t_*, x_*)$.

---

[2] *Гусейнов Х. Г.* Производные слабо и сильно инвариантных множеств и их применение к задачам управления. Баку, 1986. 24 с.— Деп. в ВИНИТИ. 1.12.86, № 8155-В86.

Полагая $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $W^* \subset R^n$, введем обозначения $X_v(t_*; t^*, W^*) = \{x^* \in R^n:\ W^* \cap X_v(t^*; t_*, x_*) \neq \varnothing$, $X_v(t^*; t_*, x_*)$ — множество в $R^n$ всех точек, в которые в момент $t^*$ приходят решения $x(\cdot) = (x(t):\ t_* \leqslant t \leqslant t^*,\ x(t_*) = x_*)$ ДВ $\dot{x} \in F_v(t, x)$.

Пусть заданы замкнутые множества $M \subset R^n$, $W \subset D$.

Приведем определение $u$-стабильного моста [7].

*Определение* 3.1. Множество $W$ называется $u$-стабильным мостом в задаче сближения с целью $M$, если

$$W(\vartheta) = M, \quad W(t_*) \subset \bigcap_{v \in Q} X_r(t_*; t^*, W(t^*))$$
$$\forall t_*, t^* \quad (t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$$

(множество $W(t)$ определено соотношением (1.3)).

Приведем утверждение из [17], показывающее, что определение $u$-стабильного моста можно сформулировать на основе понятия правой производной многозначного отображения $t \mapsto W(t)$.

*Теорема* 3.1. Множество $W$ является $u$-стабильным мостом в задаче сближения с целью $M$ тогда и только тогда, когда

$$W(\vartheta) \subset M, \ D_+W(t_*, x_*) \cap F_v(t_*, x_*) \neq \varnothing$$
$$\forall (t_*, x_*) \quad (t_* \in [t_0, \vartheta]), \quad v \in Q$$

Теорема 3.1, таким образом, представляет собой критерий $u$-стабильности, сформулированный в терминах правой производной $D_+W(t, x)$. Ниже сформулируем один критерий $u$-стабильности на основе понятия левой производной $D\_W(t, x)$.

В связи с этим, полагая, что $W$ — замкнутое множество из $D$, введем обозначения

$$KW(t_*, x_*) = \{d \in R^n:\ \exists \{\alpha_k\} \ (\alpha_k \to 0 \text{ при } k \to +\infty),$$
$$\operatorname{dist}(x_* + \alpha_k d, W(t_*))\, \alpha_k^{-1} \to 0 \text{ при } k \to +\infty\};$$
$$\Omega_v(t^*, x^*; f^*) = \{(h_v, f_v) \in KW(t^*, x^*) \times F_v(t^*, x^*):\ f^* = -h_v + f_v;$$
$$\sigma(W_1, W_2) = \sup \operatorname{dist}(x, W_2) \text{ при } x \in W_1$$

Здесь $(t^*, x^*)$, $(t_*, x_*)$ — точки из $W$; $W_1$, $W_2$ — множества из $R^n$; $\operatorname{dist}(x, W_2)$ — расстояние от точки $x$ до множества $W_2$.

Будем говорить, что выполняется условие $C$, если

Для каждой точки $(t_*, x_*) \in W$ $(t_* \in (t_0, \vartheta))$ найдутся функция $\omega(\Delta)$ $(\lim \omega(\Delta)/\Delta = 0$ при $\Delta \to +0)$ и $R \in [0, \infty)$ такие, что

$C1$) для любого $\delta \in (0, \vartheta - t_*)$ найдутся $t^* \in (t_*, t_* + \delta]$, $(t^*, x^*) \in W$, $f^* \in D\_W(t^*, x^*) \cap G_R$, удовлетворяющие неравенству

$$\| x_* - x^* - (t^* - t_*) f^* \| \leqslant \omega(t^* - t_*) \tag{3.2}$$

$C2$) для пары $(x^*, f^*)$ из условия $C1$ и любого $v \in Q$ найдутся пара $(h_v, f_v) \in \Omega_v(t^*, x^*; f^*)$ и точка $x^* \in W(t^*)$, такие, что

$$\| x^* - (t^* - t_*) h_v - w^* \| \leqslant \omega(t^* - t_*)$$

Здесь $G_R = \{x \in R^n:\ \| x \| \leqslant R\}$.

*Теорема* 3.2. Если замкнутое множество $W \subset D$ является $u$-стабильным мостом, то необходимо

$$D\_W(t_*, x_*) \subset \bigcap_{v \in Q} (-KW(t_*, x_*) + F_v(t_*, x_*)) \tag{3.3}$$
$$\forall (t_*, x_*) \in W \quad (t_* \in (t_0, \vartheta))$$

Если для замкнутого множества $W$ выполняется условие (3.3) для любых точек $(t_*, x_*) \in W$ $(t_* \in (t_0, \vartheta))$ и, кроме того, выполняется условие $C$, то множество $W$ $u$-стабильно.

Наряду с условием $C$ введем в рассмотрение еще одно условие, более проверяемое.

Будем говорить, что выполняется условие $C^*$, если

Для каждой точки $(t_*, x_*) \in W$ $(t_* \in (t_0, \vartheta))$ найдутся функция $\omega(\Delta)$ ($\lim \omega(\Delta)/\Delta = 0$ при $\Delta \to +0$) и $R \in [0, \infty)$ такие, что

$C^*1$) для любого $\delta \in (0, \vartheta - t_*)$ найдутся $t^* \in (t_*, t_* + \delta]$, $(t^*, x^*) \in W$, $f^* \in D\_W(t^*, x^*) \cap G_R$, такие, что выполняется условие (3.2); $C^*2$) для любых $(t^*, x^*)$ из $C^*1$ выполняется неравенство

$$\sigma(K^\Delta(t^*, x^*), W(t^*)) \leqslant \omega(\Delta) \quad (\Delta \geqslant 0)$$

$$K^\Delta(t^*, x^*) = x^* + KW(t^*, x^*) \cap G_{(K+R)\Delta}$$

$$(K = \max \| f(t, x, u, v) \| \text{ при } (t, x, u, v) \in D \times P \times Q$$

Справедливо утверждение, показывающее, что условие $C^*$ — более жесткое, чем условие $C$.

*Утверждение* 3.1. Пусть $W$ — замкнутое множество из $D$, для которого выполняется условие (3.3) при всех $(t_*, x_*) \in W$ $(t_* \in (t_0, \vartheta))$. Если выполняется условие $C^*$, то выполняется и условие $C$.

Кроме того, имеются примеры, показывающие, что условия $C$ и $C^*$ неэквивалентны. Так, например, неэквивалентность имеет место в случае, когда $W$ — максимальный $u$-стабильный мост в задаче сближения конфликтно-управляемой системы $\dot{x} = v + (2 - t)u$, $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, $t \in [0, 2]$ с целью $M = \{x: |x| \leqslant 1/2\}$ в момент $\vartheta = 2$.

Авторы благодарят А. И. Субботина за обсуждение и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Половинкин Е. С., Смирнов Г. В.* Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Дифференц. ур-ния. 1986. Т. 22. № 6. С. 944—954.
2. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions: Setvalued maps and viability theory. Berlin: Springer, 1984. 342 p.
3. *Субботин А. И., Субботина Н. Н.* Свойства потенциала дифференциальной игры // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 204—211.
4. *Субботин А. И., Тарасьев А. М.* Свойства стабильности функции цены дифференциальной игры и вязкие решения уравнений Гамильтона — Якоби // Пробл. управл. и теории информ. 1986. Т. 15. № 6. С. 451—463.
5. *Crandall M. G., Lions P. L.* Viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc., 1983. V. 277. № 1. P. 1—42.
6. *Lions P. L., Souganidis P. E.* Differential games., Optimal Control and directional derevatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaac's Equations // SIAM Control and Optimiz. 1985. V. 23. № 4.
7. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. *Красовский Н. Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260—1263.
9. *Красовский Н. Н.* Минимаксное поглощение в игре сближения // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 945—951.
10. *Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф.* Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303—1315.
11. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 429—437.
12. *Толстоногов А. А.* Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения // Мат. заметки. 1982. Т. 32. № 6. С. 841—852.
13. *Панасюк А. И.* Уравнения динамики множеств достижимости в задачах оптимизации и управления в условиях неопределенности // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 531—543.
14. *Бутковский А. Г.* Метод интегральных воронок дифференциальных включений для исследования управляемых систем // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 8. С. 1304—1313.
15. *Гурман В. И., Константинов Г. Н.* Описание и оценка множеств достижимости управляемых систем // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 3. С. 416—423.
16. *Овсеевич А. И., Черноусько Ф. Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 737—744.

17. *Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н.* Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Пробл. управл. и теории информ. 1985. Т. 14. № 3. С. 155—167.
18. *Никольский М. С.* Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31—34.
19. *Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 216—222.
20. *Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 4. С. 794—796.
21. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194—252.

Свердловск

Поступила в редакцию
23.X.1989