Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 62—50

П. В. Прокопович, А. А. Чикрий

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ С НЕФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Выделен класс конфликтно-управляемых процессов [1—3], для которых разрешающие функции, используемые при решении задачи группового преследования [4—7], не зависят от момента завершения игры, а ошибки убегающего приводят к окончанию процесса раньше гарантированного времени. Получены достаточные условия разрешимости задач преследования и убегания, попутно подробно изучено свойство непрерывности разрешающих функций. При этом среди достаточных условий разрешимости задачи преследования не присутствует условие Л. С. Понтрягина [3, 8]; оно заменяется на более слабое предположение, связанное с начальным состоянием процесса. Предложенная методика позволила усилить ряд известных результатов по решению задач группового преследования.

1. Движение конфликтно-управляемого объекта $z = (z_1, \ldots, z_n)$ в конечномерном евклидовом пространстве R^ν описывается системой дифференциальных уравнений

$$z_i^{\cdot} = A_i z_i + \varphi_i(u_i, v), \ z_i \in R^{\nu_i}, \ u_i \in U_i, \ v \in V, \ z_i(0) = z_i^0 \qquad (1.1)$$

Здесь A_i — заданная квадратная матрица порядка ν_i, U_i и V — непустые компактные подмножества соответственно пространств R^{p_i} и R^q, функция $\varphi_i(u_i, v)$ непрерывна по совокупности переменных. Здесь и всюду далее $i = 1, 2, \ldots, n$.

Терминальное множество M^* состоит из множеств M_i^*, каждое из которых представимо в виде

$$M_i^* = M_i^0 + M_i \qquad (1.2)$$

где M_i^0 — линейное подпространство пространства R^{ν_i}, а M_i — выпуклый компакт, принадлежащий L_i — ортогональному дополнению к M_i^0 в R^{ν_i}.

Говорят, что игра (1.1) может быть закончена из начального состояния $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ не позже, чем за время $T(z^0)$, если существуют такие измеримые функции $u_i(t) = u_i(z_i^0, v(t)) \in U_i$, $0 \leqslant t < t^*$, $t^* \leqslant T(z^0)$, что $z_i(t^*) \in M_i^*$, хотя бы для одного i при любой измеримой функции $v(t) \in V$, $0 \leqslant t \leqslant T(z^0)$, где $z_i(t)$ — решение системы уравнений (1.1), соответствующее паре управлений $u_i(t)$ $v(t)$ и начальному состоянию z_i^0.

Говорят, что в игре (1.1) из начального состояния $z^0 \in R^\nu \setminus M^*$ возможно уклонение от встречи с множеством M^*, если существует такая измеримая функция $v(t) \in V$, $0 \leqslant t < \infty$, что $z_i(t) \notin M_i^*$ для всех $t \in [0, \infty)$ при любых измеримых функциях $u_i(t) \in U_i$, $0 \leqslant t < \infty$. При этом убегающий строит свое управление программным образом, т. е. использует только информацию о начальном состоянии z^0.

2. Обозначим через $\operatorname{int} H$, $\bar{H}$, ∂H, $\operatorname{co} H$, $\operatorname{con} H$ соответственно внутренность, замыкание, границу, выпуклую и коническую оболочки произвольного подмножества H пространства R^k; пусть $B_r^k(x)$ — шар с цент-

ром в точке $x \in R^k$ и радиусом $r > 0$, т. е.

$$B_r^k(x) = \{y \in R^k : \|y - x\| \leqslant r\} \tag{2.1}$$

Введем в пространстве $\Omega(R^k)$, состоящем из всех непустых компактных подмножеств пространства R^k, метрику Хаусдорфа $h(A, B)$ между двумя множествами $A, B \in \Omega(R^k)$ по формуле

$$h(A, B) = \min\{r \geqslant 0: A \subset B + B_r^k(0),\ B \subset A + B_r^k(0)\} \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем рассматривать также пространство $\mathrm{co}\,\Omega(R^k)$, состоящее из всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства R^k.

Для множества $F \in \Omega(R^k)$ определим опорную функцию

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F}(f, \psi),\ \psi \in R^k \tag{2.3}$$

Пусть $\psi_0 \in R^k$, $\|\psi_0\| \neq 0$. Множество

$$U(F, \psi_0) = \{f \in F: (f, \psi_0) = c(F, \psi_0)\} \tag{2.4}$$

называется опорным множеством к множеству F в направлении ψ_0. Если опорное множество $U(F, \psi_0)$ состоит из единственной точки, то говорят, что множество F строго выпукло в направлении $\psi_0 \in R^k$ [9]. Говорят, что множество $F \in \Omega(R^k)$ строго выпукло, если оно строго выпукло в любом направлении $\psi_0 \in R^k$, $\|\psi_0\| \neq 0$. Множество $F \in \Omega(R^k)$ назовем компактом с гладкой границей, если

$$U(F, \psi) \cap U(F, \psi') = \varnothing,\ \forall \psi, \psi' \in \partial B_1^k(0),\ \psi \neq \psi' \tag{2.5}$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $X \in \Omega(R^p)$, $Y \in \Omega(R^q)$, $B \in \Omega(R^k)$, $\mathit{V}: X \times Y \to \Omega(R^k)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение, f: $X \to R^k$ — непрерывная функция и

$$f(\mathit{e}) \notin B,\ -\overline{\mathrm{con}}\,(f(x) - B) \cap A(x, y) \neq \varnothing,\ \forall x \in X,\ y \in Y$$

Тогда функция α: $X \times Y \to R$, определенная по формуле

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha \geqslant 0: -\alpha(f(x) - B) \cap A(x, y) \neq \varnothing\} \tag{2.6}$$

полунепрерывна сверху.

Доказательство. Убедимся, что функция $\alpha(x, y)$ полунепрерывна сверху в произвольно взятой точке (x_0, y_0) из $X \times Y$. Для этого положим

$$\alpha_0' = \limsup_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \alpha(x, y),\ (x, y) \in X \times Y \tag{2.7}$$

Выберем последовательность таких точек $(x_r, y_r) \in X \times Y$, что

$$\lim_{r \to \infty} \alpha(x_r, y_r) = \alpha_0'$$

Так как

$$-\alpha(x_r, y_r)(f(x_r) - B) \cap A(x_r, y_r) \neq \varnothing$$

то найдется такой вектор $b_r \in B$, что

$$-\alpha(x_r, y_r)(f(x_r) - b_r) \in A(x_r, y_r)$$

Используя компактность множества B, из последовательности $\{b_r\}$ выделим сходящуюся к некоторой точке $b_0 \in B$ подпоследовательность $\{b_{r_l}\}$. Тогда

$$-\alpha(x_{r_l}, y_{r_l})(f(x_{r_l}) - b_{r_l}) \in A(x_{r_l}, y_{r_l}) \tag{2.8}$$

Поскольку многозначное отображение $A(x, y)$ полунепрерывно сверху, то, переходя к пределу при $r_l \to \infty$, из (2.8) получаем, что

$$-\alpha_0'(f_0 - b_0) \in A_0\ (f_0 = f(x_0),\ A_0 = A(x_0, y_0))$$

Учитывая определение функции $\alpha(x, y)$, имеем

$$\alpha_0' \leqslant \alpha_0\ (\alpha_0 = \alpha(x_0, y_0))$$

Таким образом, функция $\alpha(x, y)$ полунепрерывна сверху в точке (x_0, y_0).

Лемма 2. Пусть $X \in \Omega(R^p)$, $Y \in \Omega(R^q)$, f: $X \to R^k$ — непрерывная функция и $\|f(x)\| \neq 0$, $\forall x \in X$, многозначное отображение Ψ: $X \to \Omega(R^k)$ определяется по формуле

$$\Psi(x) = \{\psi \in \partial B_1^k(0): (\psi, f(x)) = 0\} \tag{2.9}$$

Пусть A: $X \times Y \to \operatorname{co}\Omega(R^k)$ — непрерывное многозначное отображение, множество $A(x, y)$ для каждой точки $(x, y) \in X \times Y$ строго выпукло в любом направлении $\psi \in \Psi(x)$ и

$$-\overline{\operatorname{con}}\, f(x) \cap A(x, y) \neq \varnothing, \ \forall x \in X, \ y \in Y$$

Тогда функция α: $X \times Y \to R$, определенная по формуле

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha \geqslant 0: -\alpha f(x) \in A(x, y)\} \tag{2.10}$$

непрерывна.

Доказательство. Полунепрерывность сверху функции α: $X \times Y \to R$ следует из леммы 1. Докажем, что $\alpha(x, y)$ — полунепрерывная снизу функция. Предположим противное: в некоторой точке (x_0, y_0) из множества $X \times Y$ функция $\alpha(x, y)$ не является полунепрерывной снизу, т. е. существует такая последовательность $\{(x_r, y_r)\}$, $(x_r, y_r) \in X \times Y$, сходящаяся к точке (x_0, y_0), что

$$\lim_{r \to \infty} \alpha(x_r, y_r) = \alpha_0' < \alpha_0$$

На основании определения функции $\alpha(x, y)$ получаем, что

$$-\alpha_0 f_0 \in \partial A_0, \ -\alpha(x_r, y_r) f(x_r) \in \partial A(x_r, y_r)$$

Так как непрерывное многозначное отображение $A(x, y)$ выпуклозначно, что отображение ∂A: $X \times Y \to \Omega(R^k)$ также непрерывно [10]. Поэтому

$$-\alpha_0' f_0 \in \partial A_0$$

Если отрезок $G = [-\alpha'_0 f_0, -\alpha_0 f_0]$ лежит на границе множества A_0, то существует вектор $\psi \in \partial B_1^k(0)$, при котором $G \subset U(A_0, \psi)$ и $(f_0, \psi) = 0$, что противоречит условию строгой выпуклости множества A_0 в любом направлении $\psi \in \Psi(x_0)$. Таким образом, каждая отличная от концов $-\alpha_0 f_0$, $-\alpha_0' f_0$ точка отрезка G является внутренней для A_0.

Пусть $\rho = \alpha_0 - \alpha_0'$. Так как последовательность $\{\alpha(x_r, y_r)\}$ сходится к α_0', то для $\varepsilon = \rho/3$ можно указать такое натуральное число N_1, что

$$|\alpha(x_r, y_r) - \alpha_0'| \leqslant \varepsilon, \ \forall r \geqslant N_1$$

Точка $p = -{}^1/_3\alpha_0' f_0 - {}^2/_3\alpha_0 f_0$ принадлежит внутренности множества A_0. Многозначное отображение $A(x, y)$ непрерывно, поэтому найдется такое натуральное число N_2, что при $r \geqslant N_2$ точка $p \in \operatorname{int} A(x_r, y_r)$. Таким образом, при $r \geqslant N_2$

$$\alpha(x_r, y_r) \geqslant {}^1/_3\alpha_0' + {}^2/_3\alpha_0$$

Итак, при $r \geqslant \max\{N_1, N_2\}$

$$\alpha(x_r, y_r) - \alpha_0' \leqslant {}^1/_3\rho, \ \alpha_0 - \alpha(x_r, y_r) \leqslant {}^1/_3\rho \tag{2.11}$$

Складывая неравенства (2.11), получим противоречие

$$\alpha_0 - \alpha_0' \leqslant {}^2/_3\rho$$

Следовательно, функция α: $X \times Y \to R$ полунепрерывна снизу.

Лемма 3. Пусть $X \in \Omega(R^p)$, $Y \in \Omega(R^q)$, A: $X \times Y \to \operatorname{co}\Omega(R^k)$ — непрерывное многозначное отображение, f: $X \to R^k$ — непрерывная функция и

$$\|f(x)\| \neq 0, \ -\overline{\operatorname{con}}\, f(x) \cap \operatorname{int} A(x, y) \neq \varnothing, \ \forall x \in X, \ y \in Y. \tag{2.12}$$

Тогда функция α: $X \times Y \to R$, определенная по формуле (2.10), непрерывна.

Доказательство леммы 3 проводится по схеме доказательства леммы 2. Отметим только, что интервал $(-\alpha_0' f_0, -\alpha_0 f_0)$ лежит во внутренности множества A_0 в силу второго соотношения из (2.12).

Лемма 4. Пусть $A \in \mathrm{co}\,\Omega(R^2)$, $Y \in \Omega(R^2)$, $x \in R^2 \setminus \{0\}$ и $-\overline{\mathrm{con}}\, x \cap (A - y) \neq \varnothing$, $\forall y \in Y$.

Тогда функция α: $Y \to R$, определенная по формуле

$$\alpha(y) = \max\{\alpha \geqslant 0:\ -\alpha x \in A - y\} \tag{2.13}$$

непрерывна.

Доказательство. Покажем, что функция $\alpha(y)$ полунепрерывна снизу в произвольно взятой точке y_0 из множества Y. Допустим противное: существует такая последовательность $\{y_r\}$, $y_r \in Y$, сходящаяся к y_0, что соответствующая последовательность $\{\alpha(y_4)\}$ сходится к α_0', $\alpha_0' < \alpha_0$. Как и раньше, отсюда получаем, что

$$-\alpha_0' x \in \partial A - y_0,\ -\alpha_0 x \in \partial A - y_0$$

Если интервал $(-\alpha_0' x,\ -\alpha_0 x)$ лежит во внутренности множества $A - y_0$, то дальнейшие рассуждения повторяют проведенные ранее при доказательстве леммы 2. Поэтому предположим, что отрезок $G = [-\alpha_0' x,\ -\alpha_0 x]$ принадлежит границе множества $A - y_0$. Обозначим $\rho = \alpha_0 - \alpha_0'$. Так как $\alpha(y_r) \to \alpha_0'$ при $r \to \infty$, то можем считать, что для любого $r \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$\| y_r - y_0 \| < {}^1/_4 \rho \| x \|,\ | \alpha(y_r) - \alpha_0' | < {}^1/_4 \rho \tag{2.14}$$

Поскольку $G \subset \partial A - y_0$, то найдется такой вектор $\psi_0 \in \partial B_1^2(0)$, при котором $G + y_0 \in U(A, \psi_0)$. Отсюда имеем, что $(x, \psi_0) = 0$ и $c(A, \psi_0) = (y_0, \psi_0)$. Так как $-\alpha(y_r)x + y_r \in A$, то $(y_r, \psi_0) \leqslant (y_0, \psi_0)$.

Покажем, что $(y_r, \psi_0) < (y_0, \psi_0)$ для любого $r \geqslant 1$. Действительно

$$-{}^1/_2(\alpha_0 + \alpha_0')x + y_0 - y_r + y_r \in A$$

Поэтому, если $(y_r, \psi_0) = (y_0, \psi_0)$, то $y_0 - y_r = \alpha x$, $|\alpha| < {}^1/_4\rho$ и, следовательно, $\alpha(y_r) > \alpha_0' + {}^1/_4\rho$, что противоречит (2.14). Итак, при любом $r \geqslant 1$ точка $-\alpha(y_r)x + y_r$ не лежит на прямой, проходящей через точки $-\alpha_0' x + y_0$, $-\alpha_0 x + y_0$. Рассмотрим множества

$$K = \mathrm{co}\{-\alpha_0' x + y_0,\ -\alpha_0 x + y_0,\ -\alpha(y_1)x + y_1\}$$

$$K_\delta = \{z \in R^2:\ z \in B_\delta^2(-{}^1/_2(\alpha_0 + \alpha_0')x + y_0),\ (z, \psi_0) \leqslant (y, \psi_0)\}$$

Понятно, что $K \subset A$ и существует $\delta > 0$, при котором $K_\delta \subset K$. Начиная с некоторого номера N, элементы последовательности $\{z_r\}$, $z_r = -{}^1/_2(\alpha_0 + \alpha_0')x + y_r$, принадлежат множеству K_δ. В то же время, из условий (2.14) имеем

$$[-(\alpha_0' + {}^1/_4\rho)x,\ -\alpha_0 x] + y_r \cap A = \varnothing,\ r = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, множество A не содержит ни одного элемента последовательности $\{z_r\}$. Получили противоречие. Таким образом, функция $\alpha(y)$ полунепрерывна снизу на множестве Y.

Замечание 1. Уже в пространстве R^3 при выполнении всех остальных предположений леммы 4, даже если $Y = A$, $0 \in A$, функция $\alpha(y)$, определенная по формуле (2.13), может не являться полунепрерывной снизу.

3. Перейдем к описанию схемы преследования. Обозначим через π_i оператор ортогонального проектирования из R^{ν_i} на L_i.

Условие 1. Для фиксированной точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^\nu$, такой, что $\pi_i \exp(tA_i) \notin M_i$ при $t \geqslant 0$, справедливы соотношения

$$-\overline{\mathrm{con}}\,(\pi_i \exp(tA_i) z_i - M_i) \cap \pi_i \exp((t - \tau) A_i)\, \varphi_i(U_i, v) \neq \varnothing \tag{3.1}$$

для всех $0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty$, $v \in V$.

Зафиксируем точку z, для которой выполнено условие 1 и введем в рассмотрение разрешающие функции

$$\alpha_i(z_i, t, \tau, v) = \max\{\alpha \geqslant 0:\ -\alpha(\pi_i \exp(tA_i) z_i - M_i) \cap$$
$$\cap\, \pi_i \exp((t - \tau) A_i)\, \varphi_i(U_i, v) \neq \varnothing\},\ 0 \leqslant \tau \leqslant t < \infty,\ v \in V \tag{3.2}$$

Следствие. Пусть точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^\nu$ удовлетворяет условию 1. Тогда при любом $T \in [0, \infty)$ функция $\alpha_i(z_i, t, \tau, v)$: $[0, T] \times [0, T] \times V \to R$ полунепрерывна сверху.

Доказательство. Функция φ_i: $U_i \times V \to R^{\nu_i}$ непрерывна, поэтому многозначное отображение $\varphi_i(U_i, v)$: $V \to \Omega(R^{\nu_i})$ непрерывно [11]. Так как матрица $\exp((t-\tau)A_i)$ непрерывно зависит от (t, τ), то многозначное отображение $\pi_i \exp((t-\tau)A_i)\varphi_i(U_i, v)$: $[0, T] \times [0, T] \times V \to \Omega(R^{\nu_i})$ непрерывно. Из леммы 1 вытекает утверждение следствия.

Обозначим

$$\lambda(z, t) = 1 - \inf_{v_t(\cdot)} \max_i \int_0^t \alpha_i(z_i, t, \tau, v(\tau))\, d\tau \tag{3.3}$$

$$T(z) = \inf\{t \geqslant 0\colon \lambda(z, t) \leqslant 0\} \tag{3.4}$$

Точная нижняя грань в (3.3) берется по всевозможным измеримым на отрезке $[0, t]$ функциям, принимающим значения из множества V.

Теорема 1. Пусть $M_i = \{0\}$, $\pi_i A_i = A_i \pi_i$, точка $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in R^\nu$ удовлетворяет условию 1 и $T^0 = T(z^0) < \infty$.

Тогда игра (1.1) может быть закончена из начального состояния z^0 не позже, чем за время T^0.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что функции $\alpha_i(z_i^0, t, \tau, v)$ не зависят от t и представимы в виде

$$\alpha_i(z_i^0, \tau, v) = \max\{\alpha \geqslant 0\colon -\alpha\pi_i z_i^0 \in \pi_i \exp(-\tau A_i)\, \varphi_i(U_i, v)\}$$
$$z_i^0 \notin M_i^*, \quad 0 \leqslant \tau < \infty, \quad v \in V$$

Пусть $v(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T^0$, — некоторая измеримая функция, принимающая значения из множества V. Поскольку функция $\alpha_i(z_i^0, \tau, v)$: $[0, T^0] \times V \to R$ полунепрерывна сверху, то функция $\alpha_i(z_i^0, \tau, v(\tau))$ измерима по τ на отрезке $[0, T^0]$. Положим

$$h(t) = 1 - \max_i \int_0^t \alpha_i(z_i^\circ, \tau, v(\tau))\, d\tau$$

Пусть t_* — первый положительный корень уравнения $h(t) = 0$. Такой корень существует и $t_* \leqslant T^0$. Это следует из непрерывности функции $h(t)$ и неравенства $h(T^0) \leqslant 0$.

В силу условия 1 и теоремы Филиппова — Кастена [12] для любого i существует измеримая функция $u_i(\tau) \in U_i$, $0 \leqslant \tau \leqslant T^0$, являющаяся при любом фиксированном $\tau_0 \in [0, T^0]$ решением уравнения

$$-\alpha_i(z_i^0, \tau_0, v(\tau_0))\, \pi_i z_i^0 = \pi_i \exp(-\tau_0 A_i)\, \varphi_i(u_i, v(\tau_0)) \tag{3.5}$$

В момент τ_0 значение управления $u_i(\tau_0)$ есть лексикографический минимум среди всех точек $u_i \in U_i$, для которых имеет место равенство (3.5).

Покажем, что если управления преследователей выбираются таким образом, то $z(t_*) \in M^*$. Действительно, в момент t_* найдется номер $s \in \{1, \ldots, n\}$, при котором

$$1 - \int_0^{t_*} \alpha_s(z_s^\circ, \tau, v(\tau))\, d\tau = 0$$

Матрицы π_s и A_s перестановочны, поэтому из формулы Коши имеем

$$\pi_s z_s(t_*) = \exp(t_* A_s)\left(\pi_s z_s^\circ + \int_0^{t_*} \pi_s \exp(-\tau A_s)\, \varphi_s(u_s(\tau), v(\tau))\, d\tau\right) =$$

$$= \exp(t_* A_s)\left(\pi_s z_s^\circ - \pi_s z_s^\circ \int_0^{t_*} \alpha_s(z_s^\circ, \tau, v(\tau))\, d\tau\right) = 0.$$

Следовательно, $z_s(t_*) \in M_s^*$.

4. Рассмотрим подробнее конфликтно-управляемый процесс (1.1) в случае, если A_i — нулевая квадратная матрица порядка ν_i для любого i. Итак, конфликтно-управляемый процесс типа простого движения с перемешанными управлениями игроков описывается системой дифференциальных уравнений

$$z_i^{\cdot} = \varphi_i(u_i, v), \; z_i \in R^{\nu_i}, \; u_i \in U_i, \; v \in V, \; z_i(0) = z_i^0 \tag{4.1}$$

Здесь $U_i \in \Omega(R^{p_i})$, $V \in \Omega(R^q)$, функция $\varphi_i(u_i, v)$ непрерывна по совокупности переменных. Терминальное множество M^* состоит из множеств M_i^*, каждое из которых представимо в виде (1.2).

Образуем многозначные отображения

$$W_i(z_i, v) = -\overline{\mathrm{con}}\,(\pi_i z_i - M_i) \cap \pi_i \varphi_i(U_i, v)$$

$$\overline{W}_i(z_i, v) = -\overline{\mathrm{con}}\,(\pi_i z_i - M_i) \cap \mathrm{co}\,\pi_i \varphi_i(U_i, v), \; z_i \in R^{\nu_i} \setminus M_i^*, \; v \in V$$

Условие 2. Для фиксированной точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^\nu \setminus M^*$ справедливы соотношения $W_i(z_i, v) \neq \varnothing$ при любом $v \in V$.

Условие 3. Для фиксированной точки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in R^\nu \setminus M^*$ справедливы соотношения $\overline{W}_i(z_i, v) \neq \varnothing$ при любом $v \in V$.

Зафиксируем точки z, $\bar{z}$, для которых выполнены соответственно условия 1, 2, и введем разрешающие функции

$$\alpha_i(z_i, v) = \max\{\alpha \geqslant 0: -\alpha(\pi_i z_i - M_i) \cap \pi_i \varphi_i(U_i, v) \neq \varnothing\} \tag{4.2}$$

$$\bar{\alpha}_i(z_i, v) = \max\{\alpha \geqslant 0: -\alpha(\pi_i \bar{z}_i - M_i) \cap \mathrm{co}\,\pi_i \varphi_i(U_i, v) \neq \varnothing\}, \; v \in V \tag{4.3}$$

Рассмотрим функцию

$$T(z) = \inf\left\{t \geqslant 0: 1 - \inf_{v_t(\cdot)} \max_i \int_0^t \alpha_i(z_i, v(\tau))\, d\tau \leqslant 0\right\}$$

Пусть

$$\alpha(z) = \inf_{v \in V} \max_i \alpha_i(z_i, v), \quad \bar{\alpha}(\bar{z}) = \inf_{v \in V} \max_i \bar{\alpha}_i(\bar{z}_i, v)$$

Теорема 2. Пусть точка $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0) \in R^\nu \setminus M^*$ удовлетворяет условию 2 и $\alpha^0 > 0$, тогда игра (4.1) может быть закончена из начального состояния z^0 не позже чем, за время T°, для которого справедлива оценка $T^\circ \leqslant n/\alpha^\circ$.

Доказательство основано на идеях, используемых при доказательстве теоремы 1. Получим оценку сверху момента T°. Так как

$$1 - \inf_{v_t(\cdot)} \max_i \int_0^t \alpha_i(z_i^\circ, v(\tau))\, d\tau \leqslant 1 - \frac{1}{n} \inf_{v_t(\cdot)} \int_0^t \sum_i \alpha_i(z_i^\circ, v(\tau))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{n} \inf_{v_t(\cdot)} \int_0^t \max_i \alpha_i(z_i^\circ, v(\tau))\, d\tau = 1 - \frac{1}{n}\alpha(z^\circ)\, t$$

то $T^\circ \leqslant n/\alpha^\circ$, если $\alpha^\circ > 0$.

Теорема 3. Пусть точка $z^\circ = (z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ) \in R^\nu \setminus M^*$ удовлетворяет условию 3, $\bar{\alpha}(z^\circ) = 0$, причем точная нижняя грань в выражении

$$\inf_{v \in V} \max_i \bar{\alpha}_i(z_i^\circ, v)$$

достигается на некотором векторе $v_0 \in V$. Тогда в игре (4.1) из начального состояния z° возможно уклонение от встречи с множеством M^*.

Доказательство. Положим $v(t) \equiv v_0$ при $t \geqslant 0$. Поскольку $\bar{\alpha}(z^\circ) = 0$, то $\bar{\alpha}_i(z_i^\circ, v_0) = 0$. Последнее в свою очередь означает, что

$$-\mathrm{con}\,(\pi_i z_i^\circ - M_i) \cap \mathrm{co}\,\pi_i \varphi_i(U_i, v_0) = \varnothing$$

Отсюда получаем

$$\{\pi_i z_i^\circ + t \operatorname{co} \pi_i \varphi_i (U_i, v_0)\} \cap M_i = \varnothing, \ \forall t > 0 \qquad (4.4)$$

Заметим, что

$$\pi_i z_i (t) \subset \pi_i z_i^\circ + t \operatorname{co} \pi_i \varphi_i (U_i, v_0), \ \forall t > 0$$

Поэтому, учитывая соотношения (4.4), получаем, что $\pi_i z_i (t) \notin M_i$ при $t > 0$.

Замечание 2. Если $M_i = \{0\}$, то достаточные условия для того, чтобы точная нижняя грань в выражении

$$\inf_{v \in V} \max_i \alpha_i (z_i^\circ, v)$$

достигалась, следует из лемм 2—4.

В общем случае (игра (1.1)) предположения $\pi_i A_i = A_i \pi_i$, $M_i = \{0\}$ ограничивают решаемый класс задач преследования, однако условия, налагаемые на области управлений преследователей в предложенной схеме, в некотором смысле слабее, чем в известных методах решения задачи преследования.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Задана дифференциальная игра

$$\dot{z_i} = u_i - v, \ z_i \in R^k, \ u_i \in U_i (z_i^0), \ v \in V, \ z_i (0) = z_i^0$$

Здесь V — строго выпуклый и выпуклый компакт с гладкой границей, $U_i (z_i^\circ) = \bigcup_{\psi \in S^-(z_i^\circ)} U (V, \psi)$, $S^- (z_i^\circ) = \{\psi \in \partial B_1^k (0)\colon (\psi, z_i^\circ) \leqslant 0\}$ и $M_k^* = \{0\}$

Необходимым условием для возможности применения известных методов группового преследования [4—7, 13, 14] при решении задачи преследования в этой дифференциальной игре является условие

$$\bigcap_{v \in V} (U_i - v) \neq \varnothing$$

которое в данном случае не выполняется, так как область управления каждого преследователя есть лишь часть границы области управления убегающего.

Можно показать, что точка $z^\circ = (z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ) \in R^{kn} \setminus M^*$ удовлетворяет условию 2, и $\alpha^\circ > 0$ тогда и только тогда, когда справедливо следующее включение

$$0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} \{z_1^\circ, \ldots, z_n^\circ\} \qquad (4.5)$$

Пример 2. Дифференциальная игра задается системой уравнений

$$\dot{z_i} = u_i - v, \ z_i \in R^k, \ u_i \in \partial B_1^k (0), \ v \in B_1^k (0), \ z_i (0) = z_i^0$$

Как и в примере 1, $M_i^* = \{0\}$.

На основании теорем 2, 3 заключаем, что необходимым и достаточным условием возможности завершения игры за конечное время является справедливость включения (4.5).∎

5. Пусть $n = 1$, тогда конфликтно-управляемый процесс (4.1) задается уравнением

$$\dot{z} = \varphi (u, v), \ z \in R^\nu, \ u \in U, \ v \in V, \ z (0) = z^\circ \qquad (5.1)$$

Здесь $U \in \Omega (R^p)$, $V \in \Omega (R^q)$, функция $\varphi (u, v)$ непрерывна по совокупности переменных. Терминальное множество M^* представимо в виде $M^* = M^\circ + M$, где M° — линейное подпространство пространства R^ν, а M — выпуклый компакт из ортогонального дополнения L к M° в пространстве R^ν.

Определим для точки z, удовлетворяющей условию 2 при $n = 1$ по формуле (4.2), функцию $\alpha (z, v)$ (в этом случае индекс i можем опустить). Рассмотрим многозначные отображения

$$W_0 (z, v) = -\operatorname{con} (\pi z - M) \cap \pi\varphi (U, v)$$

$$\overline{W}_0 (z, v) = -\operatorname{con} (\pi z - M) \cap \operatorname{co} \pi\varphi (U, v), \ z \in R^\nu \setminus M^*, \ v \in V$$

Образуем следующие множества

$$W = \{z \in R^\nu \setminus M^* : W_0(z, v) \neq \varnothing, \forall v \in V\}$$

$$\overline{W} = \{z \in R^\nu \setminus M^* : \overline{W}_0(z, v) \neq \varnothing, \forall v \in V\}$$

Утверждение 1. Пусть точка $z^\circ \in W$, $\pi\varphi(U, v)$: $V \to \mathrm{co}\,\Omega(R^\nu)$, $M = \{0\}$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) множество $\pi\varphi(U, v)$ при каждом $v \in V$ строго выпукло в любом направлении $\psi_0 \in \Psi$, $\Psi = \{\psi \in \partial B_1^k(0)$: $(\psi, \pi z^\circ) = 0\}$;

2) $-\mathrm{con}\,\pi z^\circ \cap \inf \pi\varphi(U, v) \neq \varnothing$, $\forall v \in V$;

3) $\nu = 2$, $\varphi(u, v) = u - v$.

Тогда игра (5.1) может быть закончена из начального состояния z° не позже, чем за время $T^\circ = 1/\alpha^\circ$, где $\alpha^\circ = \min\limits_{v \in V} \alpha(z^\circ, v)$.

Доказательство. Поскольку $z^\circ \in W$, то точка z° удовлетворяет условию 2 и $\alpha(z^\circ, v) > 0$ для любого $v \in V$. Выполнение любого из указанных в формулировке утверждения трех условий влечет за собой непрерывность функции $\alpha(z^\circ, v)$ по v (леммы 2—4), следовательно, $\alpha^\circ > 0$. В силу теоремы 2 игра (5.1) может быть закончена из начального состояния z° не позже, чем за время

$$T^0 = \min\left\{t \geqslant 0: 1 - \inf_{v_t(\cdot)} \int_0^t \alpha(z^0, v(\tau))\, d\tau = 0\right\} = \min\{t \geqslant 0: 1 - \alpha^0 t = 0\}$$

Отсюда следует, что $T^\circ = 1/\alpha^\circ$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть точка $z^\circ \in R^\nu \setminus \overline{W}$, $z^\circ \notin M^*$. Тогда в игре (5.1) из начального состояния z° возможно уклонение от встречи с множеством M^*.

Доказательство. При выполнении условия утверждения существует такой вектор $v_0 \in V$, что

$$-\mathrm{con}(\pi z^\circ - M) \cap \mathrm{co}\,\pi\varphi(U, v_0) = \varnothing$$

Положим $v(t) \equiv v_0$ при $t \geqslant 0$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, убеждаемся в том, что при выбранном указанным образом управлении убегающего $z(t) \notin M^*$ при $t \geqslant 0$.

Подчеркнем некоторые преимущества предложенной выше схемы. Условие Л. С. Понтрягина для игры (5.1) имеет вид

$$K = \bigcap_{v \in V} \pi\varphi(U, v) \neq \varnothing \tag{5.2}$$

Введем функцию

$$P(z) = \min\{t \geqslant 0: \pi z \in M - t\,\mathrm{co}\,K\}$$

Теорема 4. Пусть в игре (5.1) $z^\circ \in R^\nu \setminus M^*$ выполнено условие (5.2), $P(z^\circ) < \infty$ и множество K выпукло, тогда для точки z° выполнено условие 2, $\alpha^\circ > 0$ и $T^\circ \leqslant P^\circ$ $(P^\circ = P(z^\circ))$.

Доказательство. Так как $P^\circ < \infty$, то в момент $t = P^\circ$ справедливо включение $\pi z^\circ \in M - P^\circ K$, эквивалентное следующему соотношению

$$(M - \pi z^\circ) \cap P^\circ K \neq \varnothing$$

Из того, что $P^\circ > 0$, получаем

$$1/P^\circ (M - \pi z^\circ) \cap \pi\varphi(U, v) \neq \varnothing, \ \forall v \in V$$

т. е. для точки z° условие 2 выполнено и $\alpha(z^\circ, v) \geqslant 1/P^\circ$, $\forall v \in V$. Поэтому

$$\alpha^\circ = \inf_{v \in V} \alpha(z^\circ, v) \geqslant 1/P^\circ \tag{5.3}$$

следовательно, $\alpha^\circ > 0$. Из неравенства в (5.3) имеем

$$T^\circ = 1/\alpha^\circ \leqslant P^\circ$$

Пример 3. Конфликтно-управляемый процесс задается уравнением

$$\dot{z} = u - v, \ z \in R^2, \ u \in U, \ v \in V, \ z(0) = z^0 \tag{5.4}$$

Области управлений: $U = \{u : u = (u_1, u_2), -1 \leqslant u_1 \leqslant 1, \ u_2 = 2\}$, $V = B_1^2(0)$. Терминальное множество $M^* = \{0\}$.

Условие (5.2) при данных областях управлений не выполнено, поэтому первый прямой метод Л. С. Понтрягина для решения этой задачи преследования неприменим. В то же время из утверждения 1 следует, что если $z^0 \in W = \mathrm{con}\{(0, -1)\}$, то игра (5.4) может быть закончена из заданного начального состояния $z^0 = (z^{01}, z^{02})$ не позже, чем за время $T^0 = -z^{02}$.

Понятно, что $W = \overline{W}$. На основании утверждения 2 заключаем, что если $z^0 \in R^2 \setminus W$, $\| z^0 \| \neq 0$, то в игре (5.4) из начального состояния z^0 возможно уклонение от встречи с множеством M^*.

Замечание 3. Все теоремы, утверждения разд. 4, 5 можно доказать для игры (1.1), если $A_i = a_i E$, $a_i \in R$, $a_i < 0$, E_i — единичная матрица порядка ν_i и $M_i = \{0\}$ [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307—330.
4. *Чикрий А. А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906—913.
5. *Григоренко Н. Л.* Дифференциальные игры преследования несколькими объектами. М.: Изд-во МГУ, 1983. 79 с.
6. *Чикрий А. А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Математическая теория управления. Варшава: Центр Банаха, 1985. С. 81—107.
7. *Чикрий А. А., Питцык М. В., Шишкина Н. Б.* Первый прямой метод Л. С. Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования // Кибернетика, 1986. № 5. С. 75—81.
8. *Никольский М. С.* Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
9. *Благодатских В. И.* Теория дифференциальных включений. 1. М.: Изд-во МГУ, 1979. 89 с.
10. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. М.: МФТИ, 1982. 126 с.
11. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
13. *Пшеничный Б. Н.* Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145—156.
14. *Фам Хонг Куанг.* О достаточных условиях поимки в дифференциальных играх преследования многими объектами одного убегающего // Кибернетика. 1986. № 6. С. 91—97.
15. *Ляшко В. И., Прокопович П. В., Чикрий А. А.* Об одном классе конфликтно-управляемых процессов с нефиксированным временем // Докл. АН УССР. Сер. А. 1989. № 5. С. 71—73.

Киев

Поступила в редакцию
11.III.1990